



MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT DIARE DENGAN ADANYA *TREATMENT*

Vika Astuti, Yuni Yulida, Thresye

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat

Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan

Email: vikaasty@gmail.com

ABSTRACT

Diarrhea is a disease based on the environment. The most dominant factors causing diarrhea are clean water and feces disposal. These two factors will interact with human behavior. If environmental factors are not healthy because they are contaminated with bacteria or viruses and accumulate unhealthy human behavior (through food and drink), it can cause diarrhea. Individuals infected with diarrheal diseases can be given protection to fight infection through treatment (treatment). Diarrhea disease can be expressed through the SIR model but this model is not sufficient to solve this problem, so the model is developed by adding a Treatment compartment. The purpose of this study is to explain the model formation, determine positive solutions, determine the equilibrium, determine the value of the Basic Reproduction Number and determine the stability of the mathematical model of diarrhea disease with treatment. In this study, the Basic Reproduction Number value was determined using the Next Generation Matrix, while the stability analysis around the disease equilibrium used the eigenvalues from the Jacobian Matrix. Then the disease-free equilibrium in this model is local asymptotically stable if $R_0 < 1$ and the endemic equilibrium is local asymptotically stable if $R_0 > 1$ with additional conditions. Model simulation is given using parameters that correspond to the requirements of the stability analysis.

Keywords: *Diarrhea, Mathematical Model, Equilibrium, Stability Analysis.*

ABSTRAK

Diare (*diarrhea*) merupakan suatu penyakit lingkungan dengan faktor penyebab yang paling dominan adalah pembuangan tinja dan sarana air bersih. Dua faktor tersebut akan berinteraksi bersamaan dengan perlakuan manusia. Jika lingkungan tercemar virus atau bakteri kemudian ditambah dengan perlakuan manusia yang tidak sehat dengan melalui apa yang mereka makan juga minum, maka akan mendatangkan penyakit diare. Individu yang terinfeksi penyakit diare dapat diberikan perlindungan untuk melawan infeksi melalui pengobatan (*treatment*). Penyakit diare tersebut dapat dinyatakan melalui model SIR tetapi model tersebut tidak cukup untuk menyelesaikan permasalahan ini maka dilakukan pengembangan model tersebut dengan menambahkan adanya kompartemen *Treatment*. Tujuan dari penelitian ini yaitu membentuk model kemudian menentukan solusi positif, setelah itu menentukan ekuilibrium, menentukan nilai *Basic Reproduction Number* dan yang terakhir menentukan kestabilan model matematika penyakit diare dengan adanya *treatment*. Pada penelitian ini nilai *Basic Reproduction Number* ditentukan menggunakan *Next Generation Matrix*, sedangkan analisa kestabilan di sekitar ekuilibrium penyakit menggunakan nilai eigen dari Matriks Jacobian. Hasil dari penelitian ini adalah terbentuknya model diare dengan adanya *treatment* dan diperoleh solusi positifnya. Kemudian ekuilibrium bebas penyakit pada model ini stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan ekuilibrium endemiknya yaitu stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$ dan syarat tambahan. Simulasi model diberikan menggunakan parameter-parameter yang bersesuaian dengan syarat pada analisa kestabilan.

Kata Kunci: Diare, Pemodelan Matematika, Ekuilibrium, Analisis Kestabilan.

1. PENDAHULUAN

Diare (*diarrhea*) merupakan suatu penyakit lingkungan dengan faktor penyebab yang paling dominan adalah pembuangan tinja dan sarana air bersih. Dua faktor tersebut akan berinteraksi bersamaan dengan perlakuan manusia. Jika lingkungan tercemar virus atau bakteri kemudian ditambah dengan perlakuan manusia yang tidak sehat dengan melalui apa yang mereka makan juga minum, maka akan mendatangkan penyakit yaitu diare. Diare ini adalah penyebab kematian nomor dua di Indonesia yang terjadi pada anak-anak terutama di bawah usia lima tahun [3].

Kementerian Kesehatan Republik Indonesia dalam Buletin Jendela Data dan Informasi Kesehatan (2011) menyatakan bahwa diare adalah salah satu penyakit yang mampu membunuh lebih banyak anak-anak dibandingkan penyakit HIV/AIDS, malaria dan campak. Penyakit diare ini menyebabkan lebih dari 1,5 juta kasus kematian yang terjadi setiap tahunnya. Dengan demikian penyakit ini menjadi ancaman kesehatan yang lebih buruk dari kanker atau AIDS dalam hal jumlah kematian.

Berdasarkan penelitian Jose dkk (1994), penyebaran penyakit deare dinyatakan dalam model matematika berupa model epidemiologi dengan adanya pencegahan dan kontrol [12]. Model ini mampu meniru pola epidemiologi yang diamati dari penyakit diare terhadap anak-anak. Pada penyakit ini, proses pencegahan dan kontrol dilakukan melalui vaksinasi dan terapi pemberian larutan secara oral. Penelitian lainnya, Adewale dkk pada tahun 2009, menganalisis model matematika diare dengan adanya vaksin dan analisis kestabilan model melibatkan *Basic Reproduction Number* (R_0) [1]. Kemudian, pada tahun 2019, Bonyah dkk membangun model matematika penyakit diare dengan memperhatikan adanya subkelas *treatment* (adanya perawatan kepada orang-orang yang telah terinfeksi) [6].

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier

Sistem persamaan diferensial nonlinear dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut [14,15,8,7]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1)$$

dengan

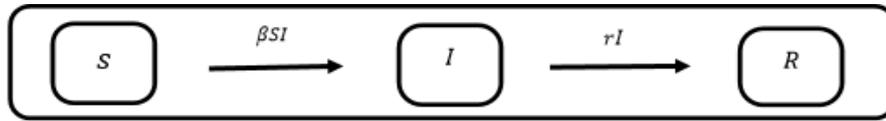
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} \text{ dan } f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$ dan $f(x) \in \mathbb{R}^n$.

2.2 Model SIR Klasik

Model SIR klasik dicetuskan pertama kali pada tahun 1927 oleh W.O. Kermack dan A.G. McKendrick. Model matematika epidemiologi *SIR* (*Susceptible, Infected, Recovered*) adalah suatu model yang membagi suatu individu menjadi tiga kelompok atau kelas individu yang berbeda, yaitu (*S*) *susceptible* yang menyatakan jumlah kelas individu yang rawan tertular penyakit, kemudian (*I*) *infected* ini menyatakan jumlah kelas individu yang terinfeksi oleh penyakit, dan (*R*) *recovered* yang menyatakan

jumlah kelas individu yang sehat kembali (sembuh) dari infeksi dan kebal terhadap penyakit. Berikut adalah diagram dari penyebaran penyakit model ini [4,16]:



Gambar 2.1 Diagram Alir Model SIR Kermack-McKendrick

Perpindahan kelas individu dari S menuju kelas I kemudian dari kelas I menuju ke kelas R dapat dijabarkan dengan sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - rI \\ \frac{dR}{dt} &= rI \end{aligned}$$

dengan t adalah waktu, dan

- $S(t)$: Jumlah individu yang sehat tetapi rentan terinfeksi penyakit pada saat t .
- $I(t)$: Jumlah individu yang terinfeksi penyakit pada saat t .
- $R(t)$: Jumlah individu yang sembuh dari infeksi pada saat t .
- β : Laju efektif kontak individu yang terinfeksi.
- r : Laju kesembuhan individu yang terinfeksi oleh penyakit.

2.3 Ekuilibrium

Definisi 2.1 [13]

Titik $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik keimbangan (ekuilibrium) untuk Sistem Persamaan Diferensial jika $f(\hat{x}) = \mathbf{0}$.

2.4 Analisis Kestabilan

2.4.1 Linearisasi

Kestabilan lokal sistem dapat dianalisa pada titik kesetimbangan menggunakan metode linearisasi. Berdasarkan Persamaan (1) digunakan deret Taylor di persekitaran titik kesetimbangan diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut [5,10]:

$$J = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\hat{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\hat{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\hat{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\hat{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\hat{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\hat{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\hat{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\hat{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\hat{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

2.4.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.2 [8]

Diberikan matriks persegi A berukuran $n \times n$ dari bilangan real dan S menyatakan himpunan semua vektor kolom $n \times 1$, maka persamaannya dapat ditulis

$$Ax = \lambda x \tag{2}$$

dengan $x \in S$ sebuah vektor tak nol yang merupakan vektor dari A dan untuk sebarang skalar λ . Skalar λ dinotasikan sebagai nilai eigen dari A jika persamaan (2) memiliki solusi vektor tak nol x .

Kemudian untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks A berukuran $n \times n$ maka Persamaan (2) dapat dituliskan sebagai berikut[2]:

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{3}$$

dengan I adalah matriks identitas. Persamaan (1) akan memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika,

$$\det(A - \lambda I)x = 0 \tag{4}$$

Persamaan (4) dinyatakan sebagai persamaan karakteristik dari A .

2.4.3 Basic Reproduction Number

Basic Reproduction Number (R_0) merupakan nilai yang didapat dari total rata-rata individu infeksi sekunder karena tertular oleh individu infeksi primer yang masuk sepenuhnya di dalam populasi *susceptible*, rumus R_0 (radius *spectral* atau nilai eigen dominan dari matriks G) yang dinyatakan sebagai berikut [9, 16]

$$R_0 = \rho[G_i(x, y)H_i(x, y)^{-1}] \tag{5}$$

kemudian berdasarkan nilai R_0 diberikan potensi penyebaran penyakit dalam suatu populasi sebagai berikut:

- a). Apabila $R_0 < 1$ maka infeksi akan lenyap.
- b). Apabila $R_0 > 1$ maka infeksi akan menyebar kedalam suatu populasi.

2.4.4 Kriteria Routh-Hurwitz

Definisi 2.3 [11]

Diberikan persamaan polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{6}$$

dengan a_k bilangan real, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $a_0 \neq 0$. Persamaan (5) oleh Routh-Hurwitz didefinisikan sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

Determinan tingkat ke- n dari matriks Routh-Hurwitz (7) dinotasikan dengan $\Delta_j; j = 1, 2, 3, \dots, n$. Determinan Routh-Hurwitz dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |a_1| \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

Akar-akar dari persamaan (6) memiliki bagian real yang negatif jika dan hanya jika determinannya positif dari semua matriks Routh-Hurwitz (7), yaitu $\Delta_j > 0$; dengan $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Teorema 2.4 [5]

Jika λ_i adalah nilai eigen yang diperoleh dari perhitungan matriks Jacobian $n \times n$ di ekuilibrium \hat{x} , kemudian $Re(\lambda_i)$ merupakan bagian real dari λ_i maka:

1. $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n, Re(\lambda_i) < 0$ maka \hat{x} stabil asimtotik.
2. Jika terdapat $Re(\lambda_i) > 0$ untuk suatu i maka \hat{x} tidak stabil.

3. METODE PENELITIAN

Beikut merupakan prosedur yang dilakukan dalam penelitian ini.

1. Membentuk model matematika penyakit diare dengan adanya *treatment*.
2. Menentukan ekuilibrium model matematika penyakit diare dengan adanya *treatment*
3. Menentukan *Basic Reproduction Number* (R_0) dengan metode *Next Generation Matrix*
 - a. Mengelompokkan subpopulasi berdasarkan individu yang terinfeksi penyakit dan yang tidak terinfeksi penyakit.
 - b. Linearisasi matriks hanya pada kelompok bagian terinfeksi.
 - c. Menentukan invers matriks.
 - d. Membentuk matriks *Next Generation*.
 - e. Menentukan nilai eigen dominan dari matriks *Next Generation* sehingga diperoleh *Basic Reproduction Number* (R_0)
4. Menentukan kestabilan lokal dengan nilai eigen yang didapat dari matriks Jacobian, Teorema 2.4 dan Kriteria Routh Hurwitz model matematika penyakit diare dengan adanya *treatment* di ekuilibrium.
5. Membuat simulasi model matematika penyakit diare dengan adanya kelas *treatment*.
6. Menginterpretasikan hasil yang diperoleh.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Pembentukan Model Matematika Penyakit Diare dengan Adanya *Treatment*

Penyakit diare adalah suatu penyakit menular yang dapat dimodelkan menggunakan model matematika. Pembentukan model ini dimulai dengan mempelajari kompartemen yang sesuai dengan karakteristik penyakit tersebut. Pembentukan model matematika dapat dikelompokkan menjadi 4 kompartemen sebagai berikut:

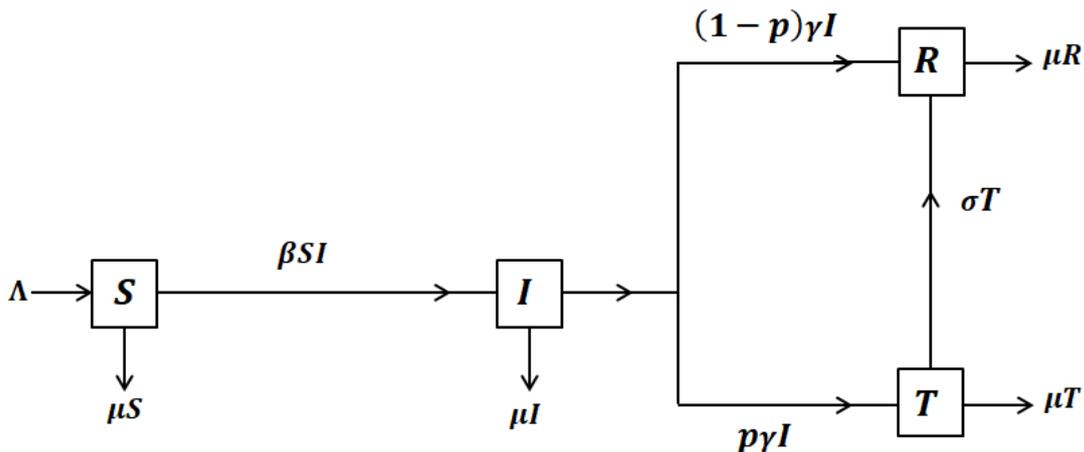
1. Populasi *susceptible*, yang dinotasikan dengan $S(t)$ yang menotasikan jumlah individu yang sehat tetapi rawan terinfeksi penyakit diare pada saat t .
2. Populasi *infected*, yang dinotasikan dengan $I(t)$ menyatakan jumlah individu yang terinfeksi oleh penyakit diare pada saat t .

3. Populasi *treatment*, ini dinotasikan dengan $T(t)$ menyatakan jumlah individu yang terinfeksi penyakit diare yang diberikan perlakuan berupa pengobatan pada saat t .
4. Populasi *recovered* (sembuh), ini dinotasikan dengan $R(t)$ yaitu jumlah individu yang sehat kembali (sembuh) dari infeksi pada saat t .

Berikut asumsi yang digunakan pada model ini.

1. Individu yang terinfeksi diare dapat sembuh mejadi individu yang *recovered* jika sembuh secara alami atau setelah melalui proses *treatment*
2. Jumlah pertambahan individu baru bernilai tetap dan diasumsikan rentan terhadap penyakit deare.
3. Populasi *susceptible* akan menjadi populasi terinfeksi jika terjangkit melalui bakteri yang terdapat pada air dan makanan yang terkontaminasi yang dibawa oleh orang yang terinfeksi.
4. Setiap individu diasumsikan mengalami laju kematian alami yang sama.
5. Individu yang sedang diberi *treatment* diasumsikan tidak akan meninggal karena penyakit diare.
6. Individu yang terinfeksi dapat sembuh secara alami tanpa diberi *treatment*

Berikut diberikan diagram alur dari model matematika penyebaran penyakit deare



Gambar 1. Diagram alur penyebaran model matematika penyebaran penyakit deare

Dari asumsi dan Gambar 1. didapat model matematika penyebaran penyakit diare sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \mu S - \beta SI \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\mu + \gamma)I \\
 \frac{dT}{dt} &= p\gamma I - (\mu + \sigma)T \\
 \frac{dR}{dt} &= (1 - p)\gamma I + \sigma T - \mu R
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

dengan:

Λ : Laju pertambahan individu baru

β : Laju efektif kontak individu yang sehat dengan individu yang terinfeksi

- p : Proporsi populasi infeksi yang akan di *treatment*
 γ : Laju individu yang di *treatment*
 σ : Laju kesembuhan akibat adanya *treatment*
 μ : Laju kematian alami dalam setiap populasi

4.3 Titik Ekuilibrium dan *Basic Reproduction Number* pada Model Penyakit Diare dengan Adanya *Treatment*.

Berdasarkan Definisi 2.1, diperoleh titik-titik ekuilibrium dari Model (8) sebagai berikut:

1. Titik bebas penyakit: $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$
2. *Basic Reproduction Number*
Basic Reproduction Number yang disimbolkan R_0 , ditentukan dengan metode *Matrix Next Generation* sebagai berikut

- a. Dari Persamaan (8), perubahan populasi yang terinfeksi terhadap waktu dapat dilihat melalui dua persamaan yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\mu + \gamma)I \\ \frac{dT}{dt} &= p\gamma I - (\mu + \sigma)T\end{aligned}\tag{9}$$

Dari Persamaan (8), perubahan populasi yang tidak terinfeksi terhadap waktu dapat dilihat melalui dua persamaan yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \mu S - \beta SI \\ \frac{dR}{dt} &= (1 - p)\gamma I + \sigma T - \mu R\end{aligned}\tag{10}$$

- b. Persamaan (9), dapat dinyatakan sebagai :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dI}{dt} \\ \frac{dT}{dt} \end{pmatrix} = \mathcal{F} - \mathcal{H}\tag{11}$$

Dengan $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta SI \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mu + \gamma)I \\ -p\gamma I + (\mu + \sigma)T \end{bmatrix}$.

Matriks Jacobian dari F dan V diperoleh

$$D\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial I} & \frac{\partial F_1}{\partial T} \\ \frac{\partial F_2}{\partial I} & \frac{\partial F_2}{\partial T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } D\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial I} & \frac{\partial H_1}{\partial T} \\ \frac{\partial H_2}{\partial I} & \frac{\partial H_2}{\partial T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mu + \gamma) & 0 \\ -p\gamma & (\mu + \sigma) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya disubstitusi ekuilibrium E_0 , diperoleh :

$$F = \begin{bmatrix} \beta \frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} (\mu + \gamma) & 0 \\ -p\gamma & (\mu + \sigma) \end{bmatrix}$$

- c. Tentukan H^{-1} , dan diperoleh matriks *next generation* sebagai berikut :

$$G = FH^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta \Lambda}{\mu(\mu + \gamma)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- d. Dari matriks G , diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{\beta \Lambda}{\mu(\mu + \gamma)}$

Karena R_0 adalah nilai eigen dominan dari matriks G maka diperoleh R_0 Basic Reproduction Number adalah

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda}{\mu(\mu + \gamma)} \quad (12)$$

3. Titik ekuilibrium endemik:

$$E^* = \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1), \frac{p\gamma}{\mu + \sigma} \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1), \frac{(1-p)\gamma + \sigma \left(\frac{p\gamma}{\mu + \sigma} \right)}{\beta}(R_0 - 1) \right) \quad (13)$$

4.4 Kestabilan Lokal Model Matematika Penyakit Diare dengan Adanya Treatment

Dalam menganalisa kestabilan titik kesetimbangan digunakan linearisasi pada Persamaan (8) dan diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\beta P}{S+I} + \frac{\beta SP}{(S+I)^2} - \mu & \frac{\beta SP}{(S+I)^2} & -\frac{\beta S}{S+I} \\ \frac{\beta P}{S+I} - \frac{\beta SP}{(S+I)^2} & -\frac{\beta SP}{(S+I)^2} - (\mu + \delta) & \frac{\beta S}{S+I} \\ 0 & \sigma & -\varepsilon \end{bmatrix} \quad (13)$$

4.4.1 Kestabilan di Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Matriks Jacobian dari titik kesetimbangan bebas penyakit yang diperoleh yaitu :

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -(\mu + \beta I) & -\beta S & 0 & 0 \\ \beta I & \beta S - (\mu + \gamma) & 0 & 0 \\ 0 & p\gamma & -(\mu + \sigma) & 0 \\ 0 & (1-p)\gamma & \sigma & -\mu \end{pmatrix}$$

Kemudian persamaan karakteristik yang didapat dari matriks Jacobian titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu sebagai berikut:

$$|J(E_0) - \lambda I| = \left(\frac{\beta\Lambda}{\mu} - (\mu + \gamma) - \lambda \right) (\mu + \sigma + \lambda)(\mu + \lambda)(\mu + \lambda) = 0 \quad (14)$$

diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = (\mu + \gamma)(R_0 - 1) < 0, \lambda_2 = -(\mu + \sigma) < 0, \lambda_3 = -\mu < 0, \text{ dan } \lambda_4 = -\mu < 0.$$

Karena $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,$ dan λ_4 bernilai negatif maka berdasarkan Teorema 2.4, ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0 \right)$ stabil asimtotik lokal dengan syarat $R_0 < 1$.

4.4.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Matriks Jacobian titik kesetimbangan endemik diperoleh

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -\mu R_0 & -(\mu + \gamma) & 0 & 0 \\ \mu(R_0 - 1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p\gamma & -(\mu + \sigma) & 0 \\ 0 & (1-p)\gamma & \sigma & -\mu \end{pmatrix}$$

dengan

$$E^* = \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1), \frac{p\gamma}{\mu + \sigma} \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1), \frac{(1-p)\gamma + \sigma \left(\frac{p\gamma}{\mu + \sigma} \right)}{\beta}(R_0 - 1) \right)$$

Persamaan karakteristik dari matriks J_{E^*} sebagai berikut:

$$|J(E^*) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\mu R_0 - \lambda & -(\mu + \gamma) & 0 & 0 \\ \mu(R_0 - 1) & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & p\gamma & -(\mu + \sigma) - \lambda & 0 \\ 0 & (1-p)\gamma & \sigma & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor, diperoleh:

$$(-\mu - \lambda)(-\mu + \sigma - \lambda)(\lambda^2 + (\mu R_0)\lambda + \mu(\mu + \gamma)(R_0 - 1)) = 0 \quad (15)$$

Dari Persamaan (15) diperoleh nilai eigennya sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -\mu < 0, \lambda_2 = -(\mu + \sigma) < 0, \text{ dan untuk } \lambda_{3,4} \text{ ditentukan oleh persamaan} \quad (16)$$

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

dengan

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = \mu R_0$$

$$a_2 = \mu(\mu + \gamma)(R_0 - 1).$$

Selanjutnya untuk menentukan bagian riil dari nilai eigen $\lambda_{3,4}$ digunakan Kriteria Routh-Hurwitz (Definisi 2.3) sebagai berikut:

i. $\Delta_1 = |a_1| = \mu R_0 > 0$

ii. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 = \Delta_1 a_2$

karena $\Delta_1 > 0$ maka cukup dibuktikan bahwa $a_2 > 0$, yaitu

$$a_2 = \mu(\mu + \gamma)(R_0 - 1) > 0 \text{ jika } R_0 > 1$$

Jadi terbukti $\Delta_2 > 0$.

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti bahwa $\Delta_1 > 0$ dan $\Delta_2 > 0$. Berdasarkan Kriteria Routh-Hurwitz bagian riil dari nilai eigen $\lambda_{3,4}$ bernilai negatif. Kemudian berdasarkan Teorema 2.4, titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal dengan syarat $R_0 > 1$.

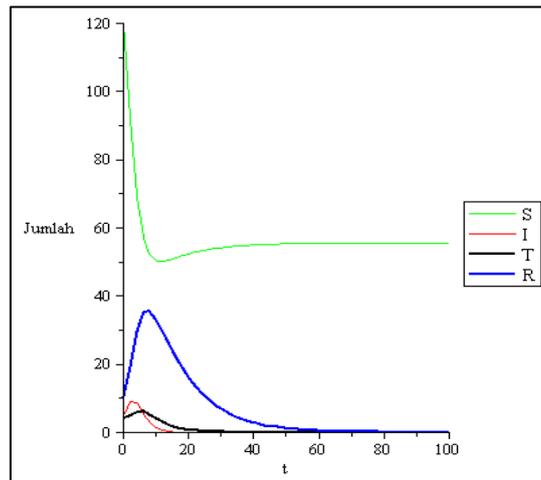
4.5 Simulasi Numerik

4.5.1 Simulasi di Titik Ekuilibrium E_0

Diberikan nilai awal berturut-turut $S(0) = 120, I(0) = 5, T(0) = 4, R(0) = 10$ dengan beberapa nilai parameter memenuhi syarat $R_0 = \frac{\beta\Lambda}{\mu(\mu+\gamma)} < 1$, yaitu:

Λ	β	γ	μ	p	σ
5	0,012	0,89	0,09	0,2	0,11

Berdasarkan nilai parameter-parameter di atas diperoleh grafik solusi model sebagai berikut



Gambar 4.2 Simulasi $R_0 < 1$

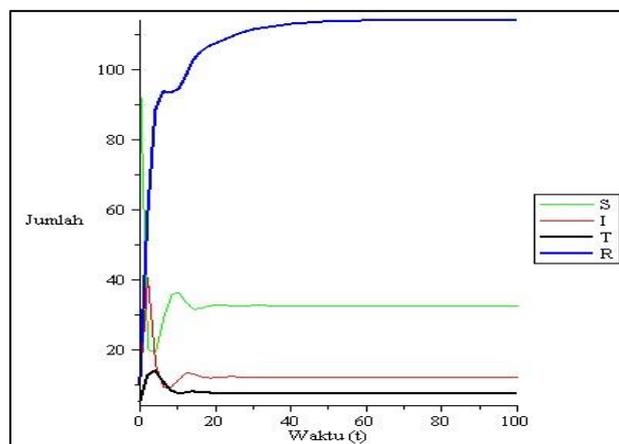
Berdasarkan Gambar 4.2 di atas menunjukkan bahwa, jumlah populasi *Susceptible* yang awalnya mengalami penurunan dari waktu ke waktu kemudian mengalami kenaikan dan stabil menuju 56. Selanjutnya, jumlah populasi *Infected*, *Treatment* dan *Recoverd* pada awalnya meningkat, tetapi dari waktu ke waktu kemudian mengalami penurunan dan konvergen menuju nol. Pada simulasi ini parameter-parameter yang diberikan R_0 kurang dari satu dan hasilnya sesuai dengan analisa kestabilan dari ekuilibrium bebas penyakit yaitu stabil asimtotik.

4.5.2 Simulasi di Titik Ekuilibrium E^*

Misalkan nilai awal berturut-turut $S(0) = 100$, $I(0) = 10$, $T(0) = 5$, dan $R(0) = 10$. Diberikan nilai parameter yang memenuhi syarat $R_0 > 1$ sebagai berikut:

Λ	β	γ	μ	p	σ
15	0,03	0,89	0,09	0,2	0,2

Berdasarkan nilai parameter-parameter di atas diperoleh grafik solusi model sebagai berikut



Gambar 4.3 Simulasi $R_0 > 1$

Berdasarkan Gambar 4.3 di atas dapat dilihat bahwa, jumlah populasi *Susceptible* yang awalnya mengalami penurunan dari waktu ke waktu kemudian

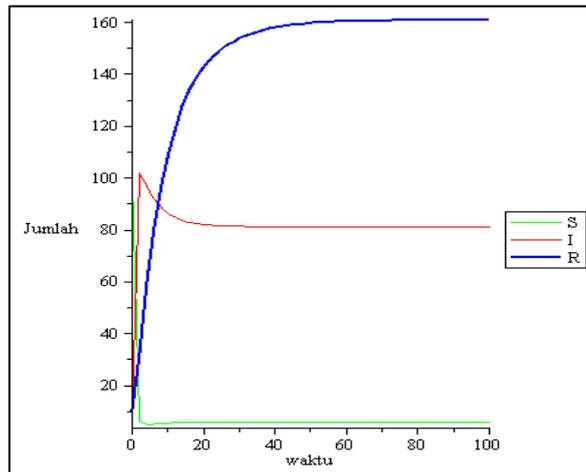
mengalami naik turun dan kemudian stabil menuju 32,66. Jumlah populasi *Infected* di awal waktu menaik namun dari waktu ke waktu akan mengalami penurunan dan naik kembali tetapi selanjutnya stabil menuju 12,30. Sedangkan, jumlah populasi *Treatment* awalnya meningkat kemudian mengalami penurunan kembali karena adanya individu yang terinfeksi dan kemudian menuju nilai 7,54. Selanjutnya, jumlah populasi *Recovered* dari waktu ke waktu terus meningkat disebabkan oleh adanya laju pengobatan dan adanya kesembuhan alami, peningkatan tersebut konvergen menuju 114. Pada simulasi ini parameter-parameter yang diberikan R_0 lebih dari satu dan hasilnya sesuai dengan analisa kestabilan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik.

4.5.3 Simulasi Model tanpa adanya *treatment*

Misalkan nilai awal berturut-turut $S(0) = 100$, $I(0) = 10$, dan $R(0)=10$. Diberikan nilai parameter sebagai berikut:

Λ	β	γ	μ
15	0,03	0,178	0,09

Berdasarkan nilai parameter-parameter di atas diperoleh grafik solusi model sebagai berikut



Gambar 4.4 Simulasi tanpa adanya *treatment*

5. PENUTUP

Berdasarkan dari hasil yang diperoleh, Penyebaran penyakit deare dengan adanya diberi *treatment* akan menyebar jika blangan reproduksi dasar lebih dari 1. Adanya *treatment* dapat mempercepat penanganan dalam rangka mengurangi jumlah individu yang terinfeksi, hal ini dapat dilihat dari Gambar 4.3 dan sedangkan Gambar 4.4 memperlihatkan bahwa jika tanpa diberi *treatment* maka jumlah populasi yang terinfeksi deare lebih meningkat.

Pada penelitian ini selanjutnya dapat memperhatikan lebih spesifik tentang penularan penyakit diare baik penularan melalui perilaku manusia dan faktor pencemaran lingkungan khususnya pencemaran air pada sungai yang digunakan untuk buang air besar oleh masyarakat.

REFERENSI

- [1] Adewale, S.O. dkk. (2015). *Mathematical Analysis of Diarrhea in Thr Presence of Vaccine*. International Journal of Scientific & Engineering Research. Volume 6: 396-404.
- [2] Anton, H. & Rorres, C. (2014). *Elementary Linear Algebra Application Version*. Eleventh Edition. John Wiley & Sons Inc. New York.
- [3] Ardkaew, J. & Phattrawan, T. (2009). *Statistical Modelling of Childhood Diarrhea in Northeastern Thailand*. Southeast Asian Trop Med Public Health. Thailand. Volume 40: 807-815.
- [4] Brauer, Fred, dkk. (2010). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Second Edition*. Springer-Verlag, New York.
- [5] Bellomo, N. & Preziosi, L. (1995). *Modelling Mathematical Methods and Scientific Computation*. CRC Press, Florida.
- [6] Bonyah, E. Gratien, T. & Patience, P.G. (2019). *Mathematical Analysis of Diarrhoea Model with Saturated Incidence Rate*. Open Jurnal of Mathematical Sciences.Ghana. Volume 3: 29-39.
- [7] Braun, M. 1992. *Differential Equation and Their Apllication-Fourth Edition*. Springer-Verlag , New York.
- [8] Cain, J.W. & Angela M.R. (2010). *Ordinary and Partial Differential Equations An Introduction to Dinamical Systems*. Richmond. Virginia.
- [9] Driessche, P. & Watmough, J. 2002). Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*. Volume 180: 29-48.
- [10] Finizio, N. & G. Ladas. (1998). Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan *Modern, Edisi Kedua, Terjemahan Widiarti Santoso*. Erlangga, Jakarta.
- [11] Gantmacher, F. R. (1959). *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Company, New York.
- [12] Jose, V. Marco. & Juan R.B. (1994). *Epidemiological Model of Diarrhoeal Diseases and Its Application in Prevention and Control*. Research Gate. Mexico. Volume 12: 110-116.
- [13] Perko, L. (2001). *Differential Equation and Dynamics System*. Third Edition. Springer-Verlag, New York.
- [14] Ross, Shepley L. (2004). *Differential Equation. Thrid Edition*. John Wiley and Sons, New Delhi.
- [15] Yulida, Yuni. (2019). *Persamaan Diferensial Biasa*. CV IRDH, Malang.
- [16] Yulida, Y. dan Karim, M.A. (2020). Pemodelan Matematika Penyebaran Covid-19 di Provinsi Kalimantan Selatan, *Media Bina Ilmiah (MBI)*, p-ISSN 1978-3787, e-ISSN 2615-3505, Vol. 14 (10), Mei 2020. Dapat diakses dari <http://ejurnal.binawakya.or.id/index.php/MBI>