Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
Vol.9 No.2 (2015) Hal. 36-40

METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN PANAS

Andi Tri Wardana, Yuni Yulida, Na'imah Hijriati
Program Studi Matematika Fakultas MIPA
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km. 35,8 Banjarbaru 70714 Kalimantan Selatan
Email: Danenk_301183@yahoo.co.id

ABSTRAK

Persamaan diferensial adalah persamaan yang di dalamnya terdapat turunan terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial dapat dibagi menjadi dua kelompok, yaitu Persamaan Diferensial Biasa (*ordinary differential equation*) dan Persamaan Diferensial Parsial (*partial differential equation*). Salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa adalah Metode Dekomposisi Adomian yang digunakan untuk mempermudah dalam penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinier. Metode dekomposisi Adomian merupakan suatu metode yang juga dapat digunakan untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial parsial, salah satunya dapat diterapkan pada persamaan panas. Penelitian ini dilaksanakan dengan menggunakan studi literatur. Hasil dari penelitian ini menunjukan bahwa penyelesaian persamaan panas linier adalah:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=u(x,0)+L_t^{-1}g(x,t)+L_t^{-1}\left(L_{xx}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)\right) \text{ dengan}$$

$$u_0(x,t)=u(x,0)+L_t^{-1}g(x,t) \text{ dan}$$

$$u_n(x,t)=L_t^{-1}L_{xx}u_n(x,t),\ n=1,2,3,\ldots$$

dan penyelesaian persamaan panas nonlinier adalah:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=u(x,0)+L_t^{-1}L_{xx}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)+L_t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x,t) \text{ dengan}$$

$$u_0(x,t)=u(x,0)$$

dan

$$u_{n+1}(x,t)=L_t^{-1}L_{xx}u_n(x,t)+L_t^{-1}A_n(x,t),\ n=0,1,2,\ldots$$

Kata kunci : Persamaan differensial parsial, persamaan panas, metode dekomposisi Adomian

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah persamaan yang di dalamnya terdapat turunan terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial dapat dibagi menjadi dua kelompok, yaitu Persamaan Diferensial Biasa (*ordinary differential equation*) dan Persamaan Diferensial Parsial (*partial differential equation*). Persamaan Diferensial Biasa didefinisikan sebagai suatu persamaan diferensial yang mempunyai satu variabel bebas dan turunannya merupakan turunan biasa, sedangkan Persamaan Diferensial Parsial didefinisikan sebagai suatu persamaan diferensial yang mempunyai lebih dari satu variabel bebas dan turunannya adalah turunan parsial [1]. Metode dekomposisi Adomian merupakan suatu metode yang juga dapat digunakan untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial parsial salah satunya dapat diterapkan pada persamaan panas. Persamaan panas merupakan contoh dari persamaan diferensial parsial orde 2 [2].

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Operator

Operator diferensial atau operator turunan secara umum dapat dituliskan sebagai beikut:

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(.) = L_{tt}(.)$, $\frac{\partial}{\partial t}(.) = L_t(.)$, $\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}(.) = L_{tx}(.)$, $\frac{\partial}{\partial x}(.) = L_x(.)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(.) = L_{xx}(.)$. Bila L menyatakan operator turunan suatu fungsi, maka sebagai inversnya (integral suatu fungsi) digunakan notasi $\frac{1}{L}$ atau L^{-1} yang didefinisikan oleh hubungan $L_t^{-1} = \int_0^t (.)dt$ [2].

2.2 Metode Dekomposisi Adomian untuk PDP orde 2

Diberikan persamaan diferensial parsial orde 2 dengan koefisien 1 sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + F\left(u(x,t)\right) = G(x,t) \tag{1}$$

Persamaan (1) dituliskan dalam bentuk operator sebagai berikut:

$$L_{tt}u(x,t) + Ru(x,t) + Nu(x,t) = G(x,t) \tag{2}$$

dengan nilai awal: $u(x,t)|_{t=0} = u(x,0)$

$$L_t u(x,t)|_{t=0} = u_t(x,0)$$

Operator diferensial didefinisikan sebagai berikut:

$L_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $L_{xt} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}$, $L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ dan $L_x = \frac{\partial}{\partial x}$, serta operator non-linier N dari $F\left(u(x,t)\right)$.

Dan operator invers L_{tt}^{-1} ada yang didefinisikan sebagai berikut:

$$L_{tt}^{-1} = \iint (.)dtdt$$

Menerapkan operator invers pada persamaan (2) dan menggunakan nilai awal yang diberikan diperoleh sebagai berikut:

$$L_{tt}^{-1}L_{tt}u(x,t) = L_{tt}^{-1}G(x,t) - L_{tt}^{-1}Ru(x,t) - L_{tt}^{-1}Nu(x,t)$$

atau

$$u(x,t) = u(x,0) + tu_t(x,0) + L_{tt}^{-1}G(x,t) - L_{tt}^{-1}Ru(x,t) - L_{tt}^{-1}Nu(x,t) \tag{3}$$

Metode Dekomposisi Adomian mengasumsikan bahwa fungsi $u(x,t)$ dapat dituliskan dalam bentuk deret tak hingga, yaitu:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{4}$$

Bagian non-liniernya didekomposisikan sebagai deret tak hingga, yaitu:

$$Nu(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t) \tag{5}$$

Selanjutnya, substitusi persamaan (4) dan (5) ke dalam persamaan (3), sehingga diperoleh :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u_0 - L_{tt}^{-1} R \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) - L_{tt}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{6}$$

dengan

$$u_0 = u(x,0) + t u_t(x,0) + L_{tt}^{-1} G(x,t) \tag{7}$$

dan

$$u_n = -L_{tt}^{-1} R u_n - L_{tt}^{-1} A_n \quad ; n \geq 1 \tag{8}$$

dimana $A_n(x,t)$ tergantung pada $u_0(x,t), u_1(x,t), \cdots, u_n(x,t)$ disebut polinomial Adomian, yaitu:
dengan

$$A_0(x,t) = N(u_0(x,t)) \tag{9}$$

dan

$$A_n(x,t) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x,t) \lambda^i \right) \right]_{\lambda=0}, \; n = 1, 2, 3, \ldots \tag{10}$$

[3].

3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan bersifat studi literature, yaitu mempelajari tentang persamaan diferensial parsial, persamaan panas dan Metode Dekomposisi Adomian, menyelesaikan persamaan panas linier menggunakan Metode Dekomposisi Adomian, menyelsaikan persamaan panas nonlinier menggunakan Metode Dekomposisi Adomian dan membuat kesimpulan hasil penelitian.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Metode dekomposisi Adomian Pada Persamaan Panas Linier

Diberikan persamaan panas linier dengan bentuk:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t) \tag{11}$$

dengan nilai awal:

$$u(x,0) = f(x) \tag{12}$$

Persamaan (11) ditulis dalam bentuk operator sebagai berikut:

$$L_t u(x,t) = Ru(x,t) + g(x,t) \tag{13}$$

dengan menerapkan operator invers pada persamaan (13) maka diperoleh:

$$L_t^{-1} L_t u(x,t) = L_t^{-1} Ru(x,t) + L_t^{-1} g(x,t) \tag{14}$$

atau

$$u(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1} g(x,t) + L_t^{-1} Ru(x,t) \tag{15}$$

Berdasarkan persamaan (4) diperoleh:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1} g(x,t) + L_t^{-1}\left(L_{xx} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \right) \tag{16}$$

Persamaan (16) akan dihitung secara rekursif yaitu sebagai berikut:

$$u_0(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1} g(x,t) \tag{17}$$

dan

$$u_n(x,t) = L_t^{-1} L_{xx} u_n(x,t),\ n = 1,2,3... \tag{18}$$

4.2 Metode Dekomposisi Adomian Pada Persamaan Panas Nonlinier

Diberikan persamaan panas nonlinier dengan bentuk:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F\left(u(x,t)\right) \tag{19}$$

dengan nilai awal:

$$u(x,0) = f(x) \tag{20}$$

Persamaan (11) ditulis dalam bentuk operator sebagai berikut:

$$L_t u(x,t) = Ru(x,t) + Nu(x,t) \tag{21}$$

dengan menerapkan operatot invers pada persamaan (21) maka diperoleh:

$$L_t^{-1} L_t u(x,t) = L_t^{-1} Ru(x,t) + L_t^{-1} Nu(x,t) \tag{22}$$

atau

$$u(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1} Ru(x,t) + L_t^{-1} Nu(x,t) \tag{23}$$

Berdasarkan persamaan (4) dan persamaan (5) diperoleh:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1}\left(L_{xx} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \right) + L_t^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t) \right) \tag{24}$$

Persamaan (16) akan dihitung secara rekursif yaitu sebagai berikut:

$$u_0(x,t) = u(x,0) \tag{25}$$

dan

$$u_n(x,t) = L_t^{-1} L_{xx} u_n(x,t) + L_t^{-1} A_n(x,t),\ n = 1,2,3... \tag{18}$$

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan maka dapat ditarik kesimpulan bahwa penyelesaian persamaan panas linier adalah sebagai berikut:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1} g(x,t) + L_t^{-1}\left(L_{xx} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \right)$$

dengan :

$$u_0(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1} g(x,t)$$

dan

$$u_n(x,t) = L_t^{-1} L_{xx} u_n(x,t),\ n = 1,2,3,...$$

dan penyelesaian persamaan panas nonlinier adalah sebagai berikut:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1} L_{xx} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) + L_t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t)$$

dengan :

$$u_0(x,t) = u(x,0)$$

dan

$$u_n(x,t) = L_t^{-1} L_{xx} u_n(x,t) + L_t^{-1} A_n(x,t),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ayres, F. Jr. 1999. *Persamaan Diferensial*. Erlangga, Jakarta.

[2] Cheniguel, A & A. Ayadi. 2011. Solving non homogeneous heat equations by the Adomian decomposition method. *International Mathematical Forum*. 6: 639 - 649.

[3] Inc, Mustafa. 2004. On numerical solution of partial differential equations by the Adomian decomposition method. *Kragujevac J. Math*. 26: 153 – 164.