Jurnal Matematika Murni dan Terapan “εpsilon”
Vol.9 No.1 (2015) Hal. 47-54

REGRESI POISSON TERGENERALISASI I DALAM MENGATASI OVERDISPERSI PADA REGRESI POISSON

Zakiah, Nur Salam, Dewi Anggraini

Program Studi Matematika
FakultasMIPA UniversitasLambungMangkurat
Jl. Jend. A. Yani km. 36 Banjarbaru 70714 Kalsel

ABSTRAK

Analisis regresi adalah salah satu metode untuk menentukan dan menguji hubungan kausalitas (sebab-akibat) antara variabel tak bebas (Y) dengan variabel-variabel bebas (X). Pada umumnya analisis regresi digunakan untuk menganalisis data variabel tak bebas berupa data kontinu dan berdistribusi normal. Namun dalam beberapa penerapannya, data variabel tak bebas yang akan dianalisis berupa data diskrit dan tidak berdistribusi normal. Salah satu model regresi yang dapat digunakan untuk menganalisis hubungan antara variabel tak bebas (Y) yang berupa data diskrit adalah model regresi Poisson yang variabel tak bebasnya berdistribusi Poisson. Regresi Poisson mempunyai asumsi equidispersi yaitu kondisi dimana nilai mean dan variansi dari variabel tak bebas bernilai sama, namun terkadang terjadi pelanggaran asumsi, dimana nilai variansinya lebih besar dari nilai mean yang disebut overdispersi, sehingga untuk mengatasi hal tersebut dapat digunakan salah satu perluasan dari model regresi Poisson yaitu model regresi Poisson tergeneralisasi, hal ini dikarenakan asumsinya tidak mengharuskan nilai mean yang sama dengan nilai variansi. Tujuan dari penelitian ini adalah bagaimana pengestimasian model regresi Poisson dan model regresi Poisson tergeneralisasi I dan menjelaskan bagaimana model regresi Poisson tergeneralisasi I dalam mengatasi overdispersi pada regresi Poisson.

***Kata kunci**: Regresi Poisson, Regresi Poisson Tergeneralisasi I, Maksimum likelihood, Newton Raphson, Overdispersi.*

1. PENDAHULUAN

Analisis regresi dalam statistika adalah salah satu metode yang digunakan untuk menentukan dan menguji hubungan kausalitas (sebab-akibat) antara variabel tak bebas (*Y*) dengan variabel-variabel bebas (*X*). Pada umumnya analisis regresi digunakan untuk menganalisis data variabel tak bebas yang berupa data kontinu. Namun dalam beberapa penerapannya, suatu model regresi tidak hanya memiliki data variabel tak bebas berupa data kontinu, tetapi juga berupa data diskrit.

Selain itu, pada model regresi linier klasik mengasumsikan variabel tak bebasnya berdistribusi normal. Tetapi, dalam kenyataannya variabel tak bebas tidak selalu berdistribusi normal. Untuk mengatasi hal ini, dikembangkanlah suatu model linear yang merupakan perluasan dari model linier klasik yaitu *Generalized Linier Model* (GLM). Salah satu model regresi yang termasuk dalam GLM adalah model regresi Poisson.

Regresi Poisson adalah analisis regresi yang digunakan untuk menganalisa data yang bersifat diskrit tak negatif dengan variabel tak bebas yang berdistribusi

Poisson. Model regresi ini mempunyai asumsi equidispersi yaitu nilai mean dan variansi dari variabel tak bebas bernilai sama, namun terkadang terjadi pelanggaran asumsi, dimana nilai variansinya lebih besar dari nilai mean yang disebut overdispersi atau variansi lebih kecil dari nilai mean yang disebut underdispersi. Jika terjadi kasus overdispersi atau underdispersi, maka dapat digunakan model perluasan dari regresi Poisson yaitu regresi Poisson tergeneralisasi. Model tersebut dapat mengatasi masalah overdispersi atau underdispersi karena tidak mengharuskan nilai mean yang sama dengan nilai variansi seperti pada model regresi Poisson.

Tujuan dari penelitian ini adalah mengestimasi parameter yang terdapat pada model regresi Poisson dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood Estmation* (MLE) dan mengestimasi parameter model regresi Poisson tergeneralisasi I dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood Estmation* (MLE).

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian kali ini bersifat studi literatur, yaitu peneliti mengumpulkan bahan atau materi yang berkaitan dengan topik penelitian, baik yang bersumber dari buku maupun jurnal yang menunjang dan relevan dengan tinjauan yang dilakukan, kemudian memahami dan mempelajari konsep bahan atau materi tersebut dan mengaplikasikannya untuk melakukan penelitian.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Pengestimasian Parameter Model Regresi Poisson

Pengestimasian parameter regresi Poisson dilakukan dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Estimasi maksimum *likelihood* untuk parameter β_k dinyatakan dengan $\hat{\beta}_k$ yang merupakan penyelesaian dari turunan pertama dari fungsi *likelihood*nya.

Langkah-langkah pengestimasian parameter model regresi Poisson sebagai berikut:

1. Mengambil n sampel random $\{(y_i; x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik}), i = 1,2,...,n\}$ yang diasumsikan saling bebas.
2. Membuat fungsi *likelihood*nya. Berdasarkan persamaan fungsi kepadatan peluang regresi Poisson, yaitu:

$$f(y_i; \beta_0, \beta_1, ..., \beta_k) = \frac{\left(s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij}\right)\right)^{y_i} \exp\left(-s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij}\right)\right)}{y_i\,!}$$

maka fungsi *likelihood*nya adalah sebagai berikut:

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \beta_0, \beta_1, ..., \beta_k)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\left[s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij}\right)\right]^{y_i} \exp\left[-s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij}\right)\right]}{y_i!} \qquad (3.1)$$

3. Membentuk fungsi logaritma natural *likelihood* untuk menyederhanakan perhitungan dalam mendapatkan estimasi maksimum *likelihood* dari parameter $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$, sebagai berikut:

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \ln L(\boldsymbol{\beta})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i \ln s_i + y_i \left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij} \right) - s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij} \right) - \ln(y_i!) \right\} \quad (3.2)$$

4. Membentuk persamaan *likelihood* untuk mencari estimasi maksimum *likelihood* dengan diturunkan secara parsial terhadap parameter $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ pada fungsi ln *likelihood* dan disamakan dengan nol, didapatkan persamaan-persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i - s_i \exp\left(\hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij} \right) \right\} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ x_{i1} \left(y_i - s_i \exp\left(\beta_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \sum_{j=2}^{k} \beta_j x_{ij} \right) \right) \right\} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ x_{ij} \left(y_i - s_i \exp\left(\hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^{k} \hat{\beta}_j x_{ij} \right) \right) \right\} = 0 \text{ ,untuk } j = 2, 3, ..., k \quad (3.5)$$

karena bentuk dari persamaan (3.3), (3.4) dan (3.5) belum dapat diselesaikan secara trivial sehingga untuk mencari estimasi dari $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ digunakan suatu prosedur iterasi numerik yaitu dengan menggunakan metode iterasi *Newton Raphson Iteratively Reweighted Least Square* (IRLS). Prosedur iterasi *Newton Raphson* adalah sebagai berikut:

1) Memilih taksiran awal dari $\boldsymbol{\beta}$, yaitu $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$, penentuan nilai awal ini diperoleh dengan metode *Ordinary Least Square* (OLS), yaitu : $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)} = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$
2) Membentuk fungsi *likelihood* dari $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ yaitu $\ell(\boldsymbol{\beta})$ yang berdasarkan pada persaman (3.2)
3) Membentuk vektor gradien $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta_k} \end{bmatrix}$

dimana $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}\right)$ = vektor berukuran (k+1)$\times$1 yang elemen-elemennya merupakan turunan pertama yang diturunkan secara parsial dari $\ell(\boldsymbol{\beta})$ yang dihitung pada $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)}$.

4) Membentuk matriks Hessian $\mathbf{H}$ yaitu:

$$\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}\right)_{(k+1)\times(k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_0{}^2} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_k \partial \beta_0} \\ \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_1{}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_k \partial \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_k} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_k} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_k{}^2} \end{bmatrix}$$

dimana $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}\right)$ = matriks berukuran (k+1)$\times$(k+1) yang elemen-elemennya merupakan turunan kedua yang diturunkan secara parsial dari $\ell(\boldsymbol{\beta})$.

5) Menentukan taksiran dari $\boldsymbol{\beta}$ dengan menggunakan iterasi ke- m+1 (m=1, 2,..) yaitu $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)}$ dan persamaan iterasi sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)} - \left[\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}\right)\right]^{-1} \mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}\right) \tag{3.6}$$

dengan:

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)}$ = vektor taksiran parameter dari $\boldsymbol{\beta}$ pada iterasi ke-m+1

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}$ = vektor taksiran parameter dari $\boldsymbol{\beta}$ pada iterasi ke-m

atau menurut persamaan (3.6) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}_{(m+1)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}_{(m)} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_0{}^2} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_k \partial \beta_0} \\ \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_1{}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_k \partial \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_k} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_k} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_k{}^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta_k} \end{bmatrix}$$

6) Proses iterasi akan berhenti jika $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)} \approx \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}$ dimana $\left\|\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)}\right\| < \varepsilon$ (misal $\varepsilon = 10^{-5}$), sehingga $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)}$ dikatakan sebagai estimasi dari $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$

3.2 Pengestimasian Parameter Model Regresi Poisson Tergeneralisasi I

Langkah-langkah pengestimasian parameter model regresi Poisson tergeneralisasi I sebagai berikut:

1. Mengambil n sampel random $\{(y_i; x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik}), i = 1,2,...,n\}$ yang diasumsikan saling bebas.

2. Membuat fungsi *likelihood*nya. Berdasarkan persamaan fungsi kepadatan peluang regresi Poisson tergeneralisasi I, maka fungsi *likelihood*nya adalah sebagai berikut:

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_i; \beta_0, \beta_1, ..., \beta_k, \alpha\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}\right)}{1 + \alpha s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}\right)} \right)^{y_i} \frac{(1+\alpha y_i)^{y_i - 1}}{y_i!} \exp\left(- \frac{s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}\right)(1+\alpha y_i)}{1 + \alpha s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}\right)} \right) \quad (3.7)$$

3. Membentuk fungsi logaritma natural *likelihood* untuk menyederhanakan perhitungan mendapatkan taksiran maksimum *likelihood* dari parameter $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k, \alpha$, sebagai berikut:

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \ln L(\boldsymbol{\beta})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i \ln s_i + y_i \left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij} \right) - y_i \ln\left(1 + \alpha s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij} \right) \right) + (y_i - 1)\ln(1+\alpha y_i) - \frac{s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}\right)(1+\alpha y_i)}{1 + \alpha s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}\right)} - \ln(y_i!) \right\} \quad (3.8)$$

4. Membentuk persamaan *likelihood* untuk mencari estimasi maksimum *likelihood* dengan diturunkan secara parsial terhadap parameter $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k, \alpha$ pada fungsi ln *likelihood* dan disamakan dengan nol, didapatkan persamaan-persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_i - s_i \exp\left(\hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}\right)}{\left(1 + \alpha s_i \exp\left(\hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}\right)\right)^2} \right\} = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{X_{i1}\left(y_i - s_i \exp\left(\beta_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \sum_{j=2}^{k} \beta_j X_{ij}\right)\right)}{\left(1 + \alpha s_i \exp\left(\beta_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \sum_{j=2}^{k} \beta_j X_{ij}\right)\right)^2} \right\} = 0 \qquad (3.10)$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{X_{ij}\left(y_i - s_i \exp\left(\hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^{k} \hat{\beta}_j X_{ij}\right)\right)}{\left(1 + \alpha s_i \exp\left(\hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^{k} \hat{\beta}_j X_{ij}\right)\right)^2} \right\} = 0 \text{ ,untuk } j = 1, 2, 3, ..., k \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ -\frac{y_i s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}\right)}{1 + \hat{\alpha} s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}\right)} + \frac{y_i (y_i - 1)}{1 + \hat{\alpha} y_i} \right.$$
$$\left. - \left(\frac{s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}\right)\left(y_i - s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}\right)\right)}{\left(1 + \hat{\alpha} s_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}\right)\right)^2} \right) \right\} = 0 \quad (3.12)$$

Prosedur iterasi *Newton Raphson* adalah sebagai berikut:

1) Memilih estimasi awal dari $\boldsymbol{\beta}$, yaitu $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix}$, untuk parameter $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ didapat dari estimasi model regresi Poisson sedangkan untuk parameter α dimisalkan bernilai nol.
2) Membentuk fungsi *likelihood* dari $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ yaitu $\ell(\boldsymbol{\beta})$ yang berdasarkan pada persaman (3.8)
3) Membentuk vektor gradien $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta_k} \\ \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \alpha} \end{bmatrix}$

dimana $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}\right)$ = vektor berukuran (k+2)$\times$1 yang elemen-elemennya merupakan turunan pertama yang diturunkan secara parsial dari $\ell(\boldsymbol{\beta})$ yang dihitung pada $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)}$.

4) Membentuk matriks Hessian $\mathbf{H}$ yaitu:

$$\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}\right)_{(k+2)\times(k+2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_0{}^2} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_k \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \alpha \partial \beta_0} \\ \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_1{}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_k \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \alpha \partial \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_k} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_k} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_k{}^2} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \alpha \partial \beta_k} \\ \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \alpha} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_k \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \alpha^2} \end{bmatrix}$$

dimana $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}\right)$ = matriks berukuran (k+2)$\times$(k+2) yang elemen-elemennya merupakan turunan kedua yang diturunkan secara parsial dari $\ell(\boldsymbol{\beta})$.

5) Menentukan taksiran dari $\boldsymbol{\beta}$ dengan menggunakan iterasi ke- m+1 (m=1, 2,..) yaitu $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)}$ dan persamaan iterasi sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)} - \left[\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}\right)\right]^{-1} \mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}\right) \tag{3.13}$$

dengan:

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)}$ = vektor taksiran parameter dari $\boldsymbol{\beta}$ pada iterasi ke-m+1

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}$ = vektor taksiran parameter dari $\boldsymbol{\beta}$ pada iterasi ke-m

atau menurut persamaan (3.13) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix}_{(m+1)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix}_{(m)} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_0{}^2} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_k \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \alpha \partial \beta_0} \\ \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_1{}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_k \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \alpha \partial \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_k} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_k} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_k{}^2} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \alpha \partial \beta_k} \\ \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \alpha} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_k \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \alpha^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta_k} \\ \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \alpha} \end{bmatrix}$$

6) Proses iterasi akan berhenti jika $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)} \approx \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}$ dimana $\left\|\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)}\right\| < \varepsilon$ (misal $\varepsilon = 10^{-5}$), sehingga $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)}$ dikatakan sebagai estimasi dari $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \\ \alpha \end{bmatrix}$

4. KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini yaitu:

1. Estimasi parameter dari model regresi Poisson diperoleh dengan menggunakan metode maksimum *likelihood* yang melalui pendekatan metode iterasi *Newton Raphson* dengan menggunakan estimasi awalnya dari metode *Ordinary Least Square* (OLS).
2. Estimasi parameter dari model regresi Poisson tergeneralisasi I dilakukan dengan menggunakan metode maksimum *likelihood*, Karena bentuk dari persamaan-persamaannya belum dapat diselesaikan secara trivial sehingga digunakan pendekatan metode iterasi Newton Raphson yang menggunakan estimasi awalnya dari $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ didapat dari estimasi model regresi Poisson dan untuk parameter α dimisalkan bernilai nol.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Bain, L.J. &M. Engelhardt.1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Edisi-2. PT Belmont Company, California.

[2]. Ismail, N. & A. A. Jemain. 2007. *Handling Overdispersion with Negative Binomial and Generalized Poisson Regression Model*. http://www.casact.org/pubs/forum/07wforum/07w109.pdf Diakses tanggal 21 September 2010.

[3]. Le, C.T. 2003. *Introductory Biostatistics*. John Wiley And Sons Publication,United States of America.