



MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING DAN PEMANENAN

Mustika Khadijah^{1*}, Yuni Yulida^{1,3}, Dewi Sri Susanti²

¹*Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat*

²*Program Studi Statistika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat*

³*Kelompok Keahlian Matematika Lingkungan dan Industri*

Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan

**E-mail: mustikakh@gmail.com*

ABSTRACT

The mathematical model of prey-predator interaction is one of the stages of solving mathematical problems by simplifying events that occur in mathematical form. In this research, we discuss a prey-predator model using a type II Holling response function without harvesting and a prey-predator model using a type II Holling response function with harvesting. The purpose of this research was to explain the formation of a prey-predator model with a type II Holling response and a prey-predator model with a type II Holling response with harvesting, to determine the stability at the equilibrium point of the model, and to create a model simulation using several sample parameters. The results obtained were three equilibrium points for the prey-predator model with type II Holling response without harvesting and two equilibrium points for the prey-predator model with type II Holling response with harvesting. The stability at two equilibrium points of the prey-predator model using the type II Holling response function without harvesting was asymptotically stable and the stability at one equilibrium point in the prey-predator model using the type II Holling response function in the presence of harvesting in the prey population was asymptotically stable. The comparison of numerical simulations showed that the number of predator population without harvesting was greater than the number of predator population with harvesting.

Keywords: Prey-Predator Model, Holling Response Function, Harvesting, Stability.

ABSTRAK

Model matematika dalam suatu interaksi mangsa pemangsa adalah salah satu langkah dalam menyelesaikan masalah matematika dengan cara menyederhanakan kejadian-kejadian yang terjadi dalam bentuk matematika. Pada penelitian ini, kami membahas model mangsa-pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe II tanpa pemanenan dan model mangsa-pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe II dengan pemanenan. Tujuan dari penelitian ini adalah menjelaskan pembentukan model mangsa pemangsa dengan respon Holling tipe II dan model mangsa pemangsa dengan respon Holling tipe II dengan pemanenan, menentukan stabilitas pada titik kesetimbangan model dan membuat simulasi model menggunakan beberapa sampel parameter. Hasil yang diperoleh adalah tiga titik kesetimbangan untuk model mangsa-pemangsa dengan respon Holling tipe II tanpa pemanenan dan dua titik kesetimbangan untuk model mangsa pemangsa dengan respon Holling tipe II dengan pemanenan. Kestabilan di dua titik kesetimbangan model mangsa-pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe II tanpa pemanenan diperoleh stabil asimtotik dan kestabilan di satu titik kesetimbangan pada model mangsa-pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe II dengan adanya pemanenan pada populasi mangsa diperoleh stabil asimtotik. Perbandingan simulasi numerik terlihat pada jumlah populasi pemangsa tanpa pemanenan lebih besar daripada jumlah populasi pemangsa dengan menggunakan pemanenan.

Kata Kunci: Model Mangsa-Pemangsa, Fungsi Respon Holling, Pemanenan, Kestabilan.

1. PENDAHULUAN

Ekosistem merupakan salah satu bagian utama dari lingkungan hidup yang tersusun dari beberapa unsur seperti unsur hayati dan nonhayati. Unsur hayati terdiri dari manusia, hewan, dan tumbuhan sedangkan unsur nonhayati terdiri komponen pendukung kehidupan lainnya (Colburn, 2009). Ekosistem ditemukan dalam sebuah proses misalnya rantai makanan, proses perkembangan, dan pengendalian populasi. Bagian yang paling sederhana pada rantai makanan berupa interaksi dua spesies, yaitu mangsa (*prey*) dan pemangsa (*predator*). Suatu interaksi mangsa-pemangsa dari rantai makanan dapat dimodelkan menggunakan sistem persamaan diferensial. Lotka dan Volterra merumuskan model matematika tersebut ke suatu sistem persamaan diferensial Lotka-Volterra berdasarkan asumsi bahwa populasi ikan dan hiu berada dalam hubungan mangsa-pemangsa (Henson et al., 2003). (Bairagi et al., 2009) telah melakukan penelitian tentang pemanenan pada model dua mangsa-satu pemangsa dalam perikanan. Menurut (Chakraborty et al., 2012) bahwa pemanenan digunakan sebagai salah satu control terhadap mangsa pemangsa.

Fungsi respon pada model interaksi predator (Henson et al., 2003) merupakan banyaknya hasil makanan yang dimangsa oleh pemangsa adalah sebagai fungsi dari kepadatan makanan. Fungsi respon dapat menjadi tiga jenis, yaitu fungsi respon tipe I, tipe II dan tipe III (Skalski & Gilliam, 2001). Pada tahun 2017, Ghorai membahas model mangsa pemangsa dengan laju pertumbuhan alami mengikuti model eksponensial dan cara berinteraksinya menggunakan fungsi linear biasa (fungsi respon Holling tipe I)(Jha & Ghorai, 2017). Oleh karena itu, untuk mengkaji model mangsa pemangsa tersebut dengan menggunakan laju pertumbuhan populasi mangsa mengikuti model pertumbuhan logistik dan memperhatikan cara pemangsa berinteraksi dengan mangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe II dengan menambahkan adanya pemanenan agar dapat membandingkan analisa model tersebut dengan adanya pengaruh pemanenan pada model.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Mangsa-Pemangsa

Diberikan model mangsa-pemangsa d sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(\alpha - by) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-\beta + ax) \end{aligned} \quad (2.1)$$

dengan α, β, a, b bernilai positif, dan $\frac{dx}{dt}$ menunjukkan perubahan jumlah populasi mangsa terhadap waktu, serta $\frac{dy}{dt}$ menunjukkan perubahan jumlah populasi pemangsa terhadap waktu(Henson et al., 2003).

2.2 Fungsi Respon Holling Tipe II

Adapun bentuk fungsi respon Holling tipe II (Skalski & Gilliam, 2001), (Abdulghafour & Naji, 2018) yaitu:

$$F_2(x) = \frac{cx}{1 + dx} \quad (2.2)$$

dengan

- c : Laju konsumsi pemangsa terhadap mangsa
- d : Konstanta setengah jenuh
- x : Jumlah populasi mangsa

2.3 Titik Ekuilibrium

Definisi 2.1 (Perko, 2001)

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.3)$$

Titik $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ dikatakan sebagai titik ekuilibrium untuk Persamaan (2.3) jika $f(\hat{x}) = 0$.

2.4 Kriteria Routh-Hurwitz dan Teorema Kestabilan

Definisi 2.2 (Gantmacher, 2000)

Diberikan persamaan karakteristik berikut:

$$f(\lambda) = \gamma_0 \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \gamma_2 \lambda^{n-2} + \dots + \gamma_{n-1} \lambda + \gamma_n \quad (2.4)$$

dengan γ_n bilangan riil, $n = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $\gamma_n \neq 0, \gamma_0 > 0$. Selanjutnya didefinisikan matriks Routh-Hurwitz untuk (2.4) sebagai matriks persegi yang berukuran $n \times n$:

$$H = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 & \gamma_5 & \gamma_7 & \dots & 0 \\ \gamma_0 & \gamma_2 & \gamma_4 & \gamma_6 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_3 & \gamma_5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_n \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Determinan Routh-Hurwitz tingkat ke- n dinotasikan dengan $\Delta_j; j = 1, 2, 3, \dots, n$, yang dibentuk dari matriks Routh-Hurwitz (2.5), didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |\gamma_1| \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 \\ \gamma_0 & \gamma_2 \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 & \gamma_5 \\ \gamma_0 & \gamma_2 & \gamma_4 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} \\ &\vdots \\ \Delta_n &= \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 & \gamma_5 & \gamma_7 & \dots & 0 \\ \gamma_0 & \gamma_2 & \gamma_4 & \gamma_6 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_3 & \gamma_5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Akar-akar dari (2.4) memiliki bagian riil negatif, jika dan hanya jika determinan dari semua matriks (2.5) adalah positif, yaitu $\Delta_j > 0$, untuk $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Teorema 2.3 (Bellomo & Preziosi, 1993)

Jika λ_i sebagai nilai eigen dari matriks Jacobian $n \times n$ di titik kesetimbangan \hat{x} dan $Re(\lambda_i)$ adalah bagian riil dari λ_i maka:

1. Jika $Re(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$, maka \hat{x} stabil asimtotik.
2. Jika terdapat $Re(\lambda_i) > 0$ untuk suatu i maka \hat{x} tidak stabil.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini diawali dengan memahami materi-materi terkait dengan model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II. Kemudian menjelaskan asumsi-asumsi yang sesuai dengan model, menjelaskan terbentuknya

model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II tanpa pemanenan dan model mangsa-pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe II, menentukan titik kesetimbangan, menganalisa kestabilan lokal di titik kesetimbangan dengan linearisasi sistem menggunakan matrik Jacobian, kemudian menggunakan kriteria Routh-Hurwitz dan teorema kestabilan. Selanjutnya, melakukan simulasi yaitu solusi model dan perbandingan solusi tanpa pemanenan dan dengan adanya pemanenan pada populasi mangsa.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Pembentukan Model Mangsa-Pemangsa Dengan Fungsi Respon Holling Tipe II Tanpa Pemanenan

Berikut ini diberikan model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II tanpa pemanenan yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta xy}{a+x} \\ \frac{dy}{dt} &= -\gamma y + \frac{\delta xy}{a+x} \end{aligned} \quad (4.1)$$

dengan $\alpha, K, a, \gamma, \beta, \delta$ bernilai positif dan nilai awal $x(0) > 0$ dan $y(0) > 0$. (Jha & Ghorai, 2017)

4.2 Titik Kesetimbangan

Berdasarkan Definisi 2.1, titik kesetimbangan pada (4.1) dapat ditentukan dengan memenuhi kondisi $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$, sehingga diperoleh:

$$\alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta xy}{a+x} = 0 \quad (4.2)$$

$$-\gamma y + \frac{\delta xy}{a+x} = 0 \quad (4.3)$$

diperoleh titik kesetimbangan yang memenuhi Persamaan (4.2) dan (4.3) sebagai berikut:

$$E_0(x_0, y_0) = (0, 0) \quad (4.4)$$

$$E_1(x_1, y_1) = (K, 0) \quad (4.5)$$

dan

$$E^*(x^*, y^*) = \left(\frac{a\gamma}{\delta - \gamma}, \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) (a + x^*) \right) \quad (4.6)$$

4.3 Kestabilan Model pada Titik Kesetimbangan

Pada Persamaan (4.1), Model dianalisa kestabilannya di titik kesetimbangan dengan menggunakan linearisasi. Matriks Jacobian hasil linierisasi sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha \left(1 - \frac{2x}{K}\right) - \frac{a\beta y}{(a+x)^2} & -\frac{\beta x}{(a+x)} \\ \frac{a\delta y}{(a+x)^2} & -\gamma + \frac{\delta x}{(a+x)} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

1. Kestabilan model pada titik kesetimbangan $E_0(0,0)$

Matriks Jacobian (4.7) di titik kesetimbangan $E_0(0,0)$ diperoleh sebagai berikut:

$$J_{(E_0)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Persamaan karakteristik dari Matriks (4.8) adalah:

$$\begin{aligned} |J_{(E_0)} - \lambda I| &= 0 \\ \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 0 \\ 0 & -\gamma - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (\alpha - \lambda)(-\gamma - \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dari Persamaan (4.9) diperoleh: $\lambda_1 = \alpha > 0$ dan $\lambda_2 = -\gamma < 0$.

Karena terdapat bagian riil dari nilai eigen λ_1 positif maka berdasarkan Teorema 2.3, titik kesetimbangan $E_0(0,0)$ tidak stabil.

2. Kestabilan model pada titik kesetimbangan $E_1(K, 0)$

Matriks Jacobian (4.7) di titik kesetimbangan $E_1(K, 0)$ diperoleh sebagai berikut:

$$J_{(E_1)} = \begin{pmatrix} -\alpha & -\frac{\beta K}{a+K} \\ 0 & -\gamma + \frac{\delta K}{a+K} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Persamaan karakteristik dari Matriks (4.10) adalah:

$$\begin{aligned} |J_{(E_1)} - \lambda I| &= 0 \\ \begin{vmatrix} -\alpha - \lambda & -\frac{\beta K}{a+K} \\ 0 & -\gamma + \frac{\delta K}{a+K} - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (-\alpha - \lambda) \left(-\gamma + \frac{\delta K}{a+K} - \lambda \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dari Persamaan (4.11) diperoleh: $\lambda_1 = -\alpha < 0$ dan $\lambda_2 = -\gamma + \frac{\delta K}{a+K} < 0$, dengan syarat $K < \frac{a\gamma}{\delta - \gamma}$. Karena bagian riil dari nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ maka berdasarkan Teorema 2.3 maka titik kesetimbangan $E_1(K, 0)$ stabil asimtotik, dengan syarat $K < \frac{a\gamma}{\delta - \gamma}$.

3. Kestabilan model pada titik kesetimbangan $E^*(x^*, y^*)$

Matriks Jacobian di titik kesetimbangan $E^*(x^*, y^*)$ diperoleh sebagai berikut:

$$J_{(E^*)} = \begin{pmatrix} \frac{\beta x^* y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{\alpha x^*}{K} & -\frac{\beta x^*}{a+x^*} \\ \frac{a\delta y^*}{(a+x^*)^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Persamaan karakteristik dari Matriks (4.12) adalah:

$$\begin{aligned} |J_{(E^*)} - \lambda I| &= 0 \\ \begin{vmatrix} \frac{\beta x^* y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{\alpha x^*}{K} - \lambda & -\frac{\beta x^*}{a+x^*} \\ \frac{a\delta y^*}{(a+x^*)^2} & -\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 + \left(\frac{\beta x^* y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{\alpha x^*}{K} \right) \lambda + \frac{\beta a \delta x^* y^*}{(a+x^*)^3} &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Untuk memenuhi bagian riil dari nilai eigen bernilai negatif dari Persamaan (4.13) digunakan Kriteria Routh-Hurwitz. Berdasarkan Definisi 2.2, Persamaan (4.13) dapat dibentuk menjadi matriks berikut

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\beta x^* y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{\alpha x^*}{K} & 0 \\ 1 & \frac{\beta a \delta x^* y^*}{(a+x^*)^3} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Dari Matriks Routh-Hurwitz (4.14), diselidiki bahwa determinan submatriks Routh-Hurwitz adalah positif, yaitu sebagai berikut:

$$\Delta_1 = \frac{\beta x^* y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{\alpha x^*}{K} > 0 \text{ dengan syarat } K < \frac{\alpha x^* (a+x^*)^2}{\beta x^* y^*}$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{\beta x^* y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{\alpha x^*}{K} \right) \left(\frac{\beta a \delta x^* y^*}{(a+x^*)^3} \right) > 0 \text{ dengan syarat } K < \frac{\alpha x^* (a+x^*)^2}{\beta x^* y^*}$$

Karena $\Delta_1, \Delta_2 > 0$ dengan syarat $K < \frac{\alpha x^* (a+x^*)^2}{\beta x^* y^*}$ maka berdasarkan Definisi 2.2, dapat dinyatakan bahwa akar-akar dari Persamaan (4.13) memiliki bagian riil negatif dan berdasarkan Teorema 2.3 bahwa titik kesetimbangan $E^*(x^*, y^*)$ stabil asimtotik dengan syarat $K < \frac{\alpha x^* (a+x^*)^2}{\beta x^* y^*}$.

4.4 Pembentukan Model Dengan Adanya Pemanenan Pada Populasi Mangsa

Berikut ini didapatkan bentuk model dengan adanya pemanenan pada populasi mangsa yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta xy}{a+x} - h_1 \\ \frac{dy}{dt} &= -\gamma y + \frac{\delta xy}{a+x} \end{aligned} \quad (4.15)$$

dengan $\alpha, K, a, \gamma, \beta, \delta, h$ bernilai positif dan nilai awal $x(0) > 0$ dan $y(0) > 0$ (Jha & Ghorai, 2017).

4.5 Titik Kesetimbangan

Berdasarkan Definisi 2.1, titik kesetimbangan pada Persamaan (4.15) dapat ditentukan dengan memenuhi kondisi $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$, sehingga diperoleh:

$$\alpha x \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta xy}{a+x} - h_1 = 0 \quad (4.16)$$

$$-\gamma y + \frac{\delta xy}{a+x} = 0 \quad (4.17)$$

diperoleh titik kesetimbangan sebagai berikut:

$$E_0(x_0, y_0) = (x', 0) \quad (4.18)$$

dan

$$E^*(x^*, y^*) = \left(x^*, \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{x^*}{K} \right) (a+x^*) - \frac{h_1(a+x^*)}{\beta x^*} \right) \quad (4.19)$$

dengan $x^* = \frac{a\gamma}{\delta - \gamma}$

4.6 Kestabilan Model pada Titik Kesetimbangan

Pada Persamaan (4.15), Model dianalisa kestabilannya di titik kesetimbangan dengan menggunakan linearisasi. Matriks Jacobian hasil linierisasi sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha \left(1 - \frac{2x}{K}\right) - \frac{a\beta y}{(a+x)^2} & -\frac{\beta x}{(a+x)} \\ \frac{a\delta y}{(a+x)^2} & -\gamma + \frac{\delta x}{(a+x)} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

1. Kestabilan model pada titik kesetimbangan $E_0(x', 0)$

Matriks Jacobian di titik kesetimbangan $E_0(x', 0)$ diperoleh sebagai berikut:

$$J_{(E_0)} = \begin{pmatrix} \frac{h_1}{x'} - \frac{\alpha x'}{K} & -\frac{\beta x'}{(a+x')} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Persamaan karakteristik dari Matriks (4.21) adalah:

$$\begin{aligned} |J_{(E_0)} - \lambda I| &= 0 \\ \begin{vmatrix} \frac{h_1}{x'} - \frac{\alpha x'}{K} - \lambda & -\frac{\beta x'}{(a+x')} \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \left(\frac{h_1}{x'} - \frac{\alpha x'}{K} - \lambda\right)(-\lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dari Persamaan (4.22) diperoleh: $\lambda_1 = \frac{h_1}{x'} - \frac{\alpha x'}{K} < 0$ dan $\lambda_2 = 0$

Karena nilai eigen $\lambda_2 = 0$ maka berdasarkan Teorema 2.2 pada titik kesetimbangan $E_0(x', 0)$ tidak dapat ditentukan jenis kestabilannya. Ketika $\lambda_2 = 0$ maka terjadi bifurkasi.

2. Kestabilan model pada titik kesetimbangan $E^*(x^*, y^*)$

Matriks Jacobian di titik kesetimbangan $E^*(x^*, y^*)$ diperoleh sebagai berikut:

$$J_{(E^*)} = \begin{pmatrix} \frac{\beta x^* y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{\alpha x^*}{K} & -\frac{\beta x^*}{a+x^*} \\ \frac{a\delta y^*}{(a+x^*)^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Persamaan karakteristik dari Matriks (4.23) adalah:

$$\begin{aligned} |J_{(E^*)} - \lambda I| &= 0 \\ \begin{vmatrix} \frac{\beta x^* y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{\alpha x^*}{K} - \lambda & -\frac{\beta x^*}{a+x^*} \\ \frac{a\delta y^*}{(a+x^*)^2} & -\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 + \left(\frac{\beta x^* y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{\alpha x^*}{K}\right)\lambda + \frac{\beta a\delta x^* y^*}{(a+x^*)^3} &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Untuk memenuhi bagian riil dari nilai eigen bernilai negatif dari Persamaan (4.24) digunakan Kriteria Routh-Hurwitz. Berdasarkan Definisi 2.2, Persamaan (4.24) dapat dibentuk Matriks menjadi:

$$= \begin{bmatrix} \frac{\beta x^* y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{\alpha x^*}{K} & 0 \\ 1 & \frac{\beta a\delta x^* y^*}{(a+x^*)^3} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Dari matriks Routh-Hurwitz (4.25) di atas diselidiki bahwa determinan matriks Routh-Hurwitz adalah positif, yaitu sebagai berikut:

$$\Delta_1 = \frac{\beta x^* y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{\alpha x^*}{K} > 0 \text{ dengan syarat } K < \frac{\alpha x^* (a+x^*)^2}{\beta x^* y^*}$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{\beta x^* y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{\alpha x^*}{K} \right) \left(\frac{\beta a \delta x^* y^*}{(a+x^*)^3} \right) > 0 \text{ dengan syarat } K < \frac{\alpha x^* (a+x^*)^2}{\beta x^* y^*}$$

Karena $\Delta_1, \Delta_2 > 0$ dengan syarat $K < \frac{\alpha x^* (a+x^*)^2}{\beta x^* y^*}$ berdasarkan Definisi 2.2 dapat dinyatakan bahwa akar-akar Persamaan (4.24) memiliki bagian riil negatif dan berdasarkan Teorema 2.3 bahwa titik kesetimbangan $E^*(x^*, y^*)$ stabil asimtotik yang berarti bahwa jumlah populasi mangsa menuju x^* dan jumlah populasi pemangsa menuju y^* dengan syarat $K < \frac{\alpha x^* (a+x^*)^2}{\beta x^* y^*}$.

4.7 Simulasi Numerik Pada Model Tanpa Pemanenan

Berikut simulasi untuk tiga titik kesetimbangan tersebut:

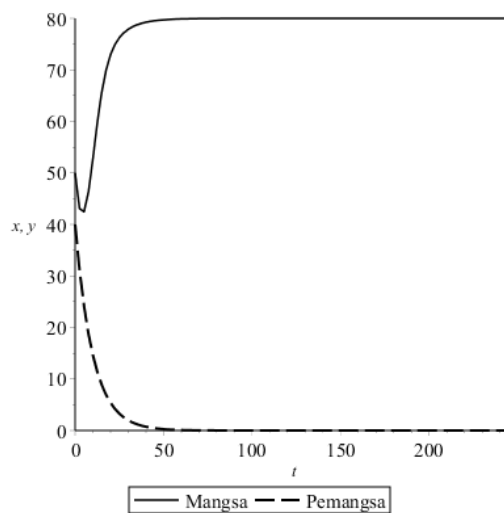
1. Simulasi Numerik pada Titik $E_0(0,0)$

Diberikan nilai awal dan parameter yang digunakan untuk simulasi titik $E_0(0,0)$.

Tabel 4.1 Nilai awal dan parameter yang digunakan untuk simulasi titik $E_0(0,0)$

$x(0)$	$y(0)$	K	α	β	δ	γ	a
50	40	80	0,4	0,3	0,1	0,2	0,2

Simulasi parameter untuk titik $E_0(0,0)$ dapat dilihat pada Gambar 4.1 sebagai berikut:



Gambar 4.1 Simulasi Titik $E_0(0,0)$

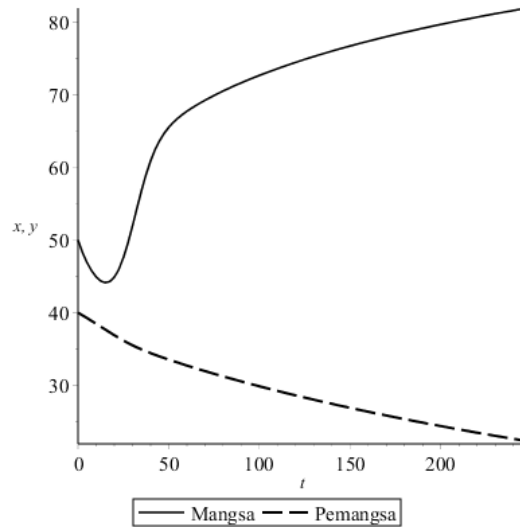
2. Simulasi Numerik pada Titik $E_1(K, 0)$

Berikut simulasi Numerik dengan memenuhi syarat $K < \frac{a\gamma}{\delta-\gamma}$ yaitu:

Tabel 4.2 Nilai awal dan parameter yang digunakan untuk simulasi titik $E_1(K, 0)$

$x(0)$	$y(0)$	K	α	β	δ	γ	a
50	40	80	0,6	0,4	0,301	0,3	0,777

Simulasi parameter untuk titik $E_1(K, 0)$ dapat dilihat pada Gambar 4.2 sebagai berikut:



Gambar 4.2 Simulasi Titik $E_1(K, 0)$

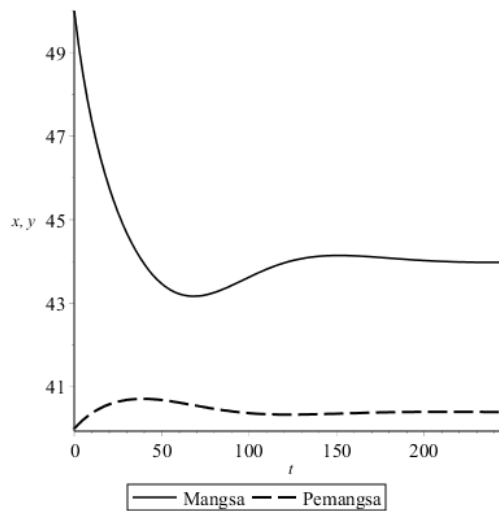
3. Simulasi Numerik pada Titik $E^*(x^*, y^*)$ tanpa pemanenan.

Berikut simulasi Numerik dengan memenuhi syarat $K < \frac{\alpha x^*(a+x^*)^2}{\beta x^* y^*}$ yaitu:

Tabel 4.3 Nilai awal dan parameter yang digunakan untuk simulasi titik $E^*(x^*, y^*)$ tanpa pemanenan

$x(0)$	$y(0)$	K	α	β	δ	γ	a
50	40	80	0,4	0,2	0,51	0,5	0,88

Simulasi parameter untuk titik $E^*(x^*, y^*)$ tanpa pemanenan dapat dilihat pada Gambar 4.3 sebagai berikut:



Gambar 4.3 Simulasi Titik $E^*(x^*, y^*)$ tanpa pemanenan

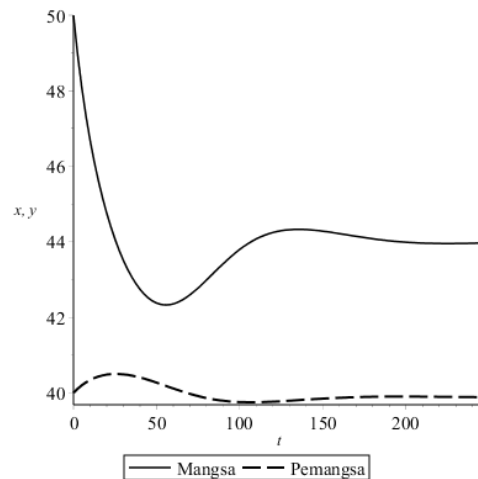
4.8 Simulasi Numerik Pada Model Dengan Adanya Pemanenan Pada Populasi Mangsa

Pada Titik $E^*(x^*, y^*)$ menggunakan pemanenan pada populasi mangsa dengan syarat $K < \frac{\alpha x^*(a+x^*)^2}{\beta x^* y^*}$ sebagai berikut:

Tabel 4.4 Nilai awal dan parameter yang digunakan untuk simulasi titik $E^*(x^*, y^*)$ menggunakan pemanenan pada populasi mangsa

$x(0)$	$y(0)$	K	α	β	δ	γ	a	h
50	40	80	0,4	0,2	0,51	0,5	0,88	0,1

Simulasi parameter untuk titik $E^*(x^*, y^*)$ dengan menggunakan pemanenan pada populasi mangsa dapat dilihat pada Gambar 4.4 sebagai berikut:



Gambar 4.4 Simulasi Titik $E^*(x^*, y^*)$ dengan pemanenan pada populasi mangsa

Berdasarkan dari simulasi yang dilakukan untuk $E^*(x^*, y^*)$ tanpa pemanenan dan $E^*(x^*, y^*)$ dengan pemanenan terlihat bahwa perbedaan pada pemangsa yang ditunjukkan oleh grafik putus-putus sangat sedikit. Pada titik $E^*(x^*, y^*)$ tanpa pemanenan dari waktu ke waktu yang semakin meningkat kemudian seiring dengan berjalannya waktu jumlah populasi mangsa menurun sehingga stabil menuju nilai 40.39, karena adanya laju konsumsi menggunakan fungsi respon Holling tipe II yang aktif pada pemangsa terhadap mangsa. Sedangkan pada titik $E^*(x^*, y^*)$ dengan pemanenan pada populasi pemangsa dari waktu ke waktu yang semakin meningkat kemudian seiring dengan berjalannya waktu jumlah populasi mangsa menurun sehingga stabil menuju nilai 39.88, karena adanya pemanenan menggunakan fungsi respon Holling tipe II yang aktif pada pemangsa terhadap mangsa.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang terdapat dalam pembahasan, diperoleh kesimpulan yaitu:

1. Model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II tanpa pemanenan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta xy}{a + x} \\ \frac{dy}{dt} &= -\gamma y + \frac{\delta xy}{a + x} \end{aligned}$$

2. Didapatkan tiga titik kesetimbangan pada model tanpa pemanenan dengan analisa kestabilan di titik kesetimbangan adalah sebagai berikut:

- a. Titik $E_0(0,0)$ tidak stabil.
- b. Titik $E_1(K, 0)$ stabil asimtotik dengan syarat $K < \frac{a\gamma}{\delta - \gamma}$

- c. Titik $E^*(x^*, y^*)$ stabil asimtotik dengan syarat $K < \frac{\alpha x^*(a+x^*)^2}{\beta x^* y^*}$
3. Model mangsa pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe II dengan adanya pemanenan pada populasi mangsa dapat ditulis sebagai berikut:
- $$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta xy}{a+x} - h_1 \\ \frac{dy}{dt} &= -\gamma y + \frac{\delta xy}{a+x} \end{aligned}$$
4. Didapatkan dua titik kesetimbangan pada model dengan analisa kestabilan sebagai berikut:
- Titik $E_0(x', 0)$ tidak dapat ditentukan jenis kestabilannya.
 - Titik $E^*(x^*, y^*)$ stabil asimtotik dengan syarat $K < \frac{\alpha x^*(a+x^*)^2}{\beta x^* y^*}$
5. Simulasi numerik untuk kedua model menjelaskan bahwa di sekitar titik kesetimbangan tanpa adanya mangsa dan pemangsa E_0 tidak stabil dan titik kesetimbangan tanpa adanya pemangsa E_1 , titik kesetimbangan dengan adanya populasi mangsa dan populasi pemangsa E^* tanpa pemanenan dan titik kesetimbangan adanya populasi mangsa dan populasi pemangsa E^* dengan pemanenan terbukti stabil asimtotik.

REFERENSI

- Abdulghafour, A. S., & Naji, R. K. (2018). The Impact of Refuge and Harvesting On The Dynamics Of Prey-Predator Prey-Predator System. *Sci.Int.(Lahore)*, 30(2), 315–323.
- Bairagi, N., Chaudhuri, S., & Chattopadhyay, J. (2009). Harvesting as a disease control measure in an eco-epidemiological system - A theoretical study. *Mathematical Biosciences*, 217(2), 134–144. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2008.11.002>
- Bellomo, N., & Preziosi, L. (1993). *Modelling mathematical Methods and Scientific Computation*. Springer-Verlag New York Inc.
- Chakraborty, S., Pal, S., & Bairagi, N. (2012). Predator-prey interaction with harvesting: Mathematical study with biological ramifications. *Applied Mathematical Modelling*, 36(9), 4044–4059. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.11.029>
- Colburn, E. A. (2009). Temporary Waters. In *Encyclopedia of Ecology, Five-Volume Set*. <https://doi.org/10.1016/B978-008045405-4.00361-X>
- Gantmacher, F. (2000). *The Theory Of Matrices*. Chelsea Publishing Company.
- Henson, S. M., Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2003). Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. *The American Mathematical Monthly*, 110(3). <https://doi.org/https://doi.org/10.2307/3647954>
- Jha, P. K., & Ghorai, S. (2017). Stability of Prey-Predator Model with Holling type Response Function and Selective Harvesting. *Journal of Applied & Computational Mathematics*, 06(03). <https://doi.org/10.4172/2168-9679.1000358>
- Perko, L. (2001). *Differential Equation and Dynamics*. Springer.
- Skalski, G. T., & Gilliam, J. F. (2001). Functional responses with predator

interference: Viable alternatives to the Holling type II model. *Ecology*,
82(11), 3083–3092. [https://doi.org/10.1890/0012-9658\(2001\)082\[3083:FRWPIV\]2.0.CO;2](https://doi.org/10.1890/0012-9658(2001)082[3083:FRWPIV]2.0.CO;2)