Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.15 No.1 (Juni 2021) Hal. 27-45

PENGGUNAAN *JUMAN & HOQUE METHOD (JHM)* PADA PENENTUAN SOLUSI AWAL MASALAH TRANSPORTASI

Andry Nor Indrawan[1], Pardi Affandi[2], Oni Soesanto[3]

[1,2]Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
[3]Program Studi Statistika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan
Email: andrynor5@gmail.com

ABSTRACT

Transportation problems are related to the efficient process of distributing goods by a company or industry. The purpose of solving transportation problems is to minimize the costs incurred in the process of distributing goods from several sources (supply) to several destinations (demand). One way to solve transportation problems is to find an initial feasible solution, continued by finding the optimal solution. This research was done by finding an initial feasible solution using the JHM (Juman & Hoque Method) for both the case of solving balanced transportation problems and unbalanced transportation problems. The method has the characteristic in the initial allocation process starting at the cell with the smallest cost in each column as much as the quantity of each demand. In addition, identification of whether the row if occupied or not was done based on the allocation for each row to the quantity of each inventory. This research aimed to explain about solving transportation problems by determining the initial feasible solution using JHM and performing optimality test using potential method. The methods of this research was to identify categories of transportation problems, determine the initial solution using JHM, and test the optimality using potential method. Based on the results of this research, JHM model may be used to solve transportation problems. In the steps of JHM there are explanations of some theorem regarding the selection of the column and row which will be the first to be processed to determine the value of intial solution of transportation problems. The initial solution by using JHM tends to approach the value of optimal solution after test of optimality was done by using the potential method.

Keywords*:* Transportation Problems, Juman & Hoque Method, Potential Method.

ABSTRAK

Masalah transportasi berkaitan dengan proses efisiensi kegiatan pendistribusian barang oleh suatu perusahaan atau industri. Penyelesaian masalah transportasi bertujuan agar biaya yang dikeluarkan dalam proses pendistribusian barang dari beberapa sumber (persediaan) ke beberapa tujuan (permintaan) minimal. Salah satu cara untuk menyelesaikan masalah transportasi yaitu dengan mencari solusi fisibel awal kemudian dilanjutkan dengan mencari solusi optimal. Dalam penelitian ini dilakukan dengan mencari solusi fisibel awal menggunakan *JHM* (*Juman & Hoque Method*) untuk kasus penyelesaian masalah transportasi seimbang maupun tidak seimbang. Metode ini memiliki ciri khas dalam proses pengalokasian awal yang dimulai pada sel dengan biaya terkecil dalam masing-masing kolom sebanyak kuantitas masing-masing permintaan. Selain itu, dilakukan identifikasi baris terpenuhi atau tidak terpenuhi berdasarkan jumlah alokasi pada masing-masing baris terhadap kuantitas masing-masing persediaan. Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan penyelesaian masalah transportasi dengan penentuan solusi awal menggunakan *JHM* dan melakukan pengujian optimalitas menggunakan metode potensial. Metode dalam penelitian ini yaitu mengidentifikasi kategori masalah transportasi, menentukan solusi awal menggunakan *JHM*, serta menguji optimalitas menggunakan metode potensial. Berdasarkan hasil penelitian ini, model *JHM* dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah transportasi, di dalam langkah-langkah *JHM* terdapat penjelasan beberapa teorema tentang pemilihan kolom dan baris yang pertama diproses untuk menentukan nilai solusi awal dari masalah transportasi. Nilai solusi awal dengan *JHM* cenderung mendekati nilai dari solusi optimal setelah dilakukan uji optimalitas menggunakan metode potensial.

Kata Kunci: Masalah Transportasi, *Juman & Hoque Method*, Metode Potensial.

1. LATAR BELAKANG

Transportasi bagi perusahaan atau industri sangat penting, karena biaya yang dikeluarkan untuk transportasi sangat berpengaruh terhadap biaya operasional suatu industri. Dengan masalah transportasi dapat diperoleh perencanaan yang tepat dalam mengambil keputusan mengenai pendistribusian barang agar biaya yang dikeluarkan minimal. Penyelesaian masalah transportasi diperlukan untuk meminimumkan biaya pendistribusian barang dari beberapa sumber ke beberapa tujuan. Cara untuk menyelesaikan masalah transportasi yaitu mencari solusi fisibel awal kemudian dilanjutkan dengan mencari solusi optimal.

Perusahaan atau industri memerlukan rencana pendistribusian yang tepat untuk mendapatkan solusi fisibel awal (*Initial Feasible Solution*) dari masalah transportasi. Beberapa metode heuristik tersedia untuk mendapatkan solusi fisibel awal seperti *NWCM (North West Corner Method)*, *LCM (Least Cost Method)* dan *VAM (Vogel's Approximation Method)* [7]. Z. A. M. S. Juman dan M. A. Hoque menyajikan teknik solusi heuristik efisien untuk mendapatkan solusi fisibel awal pada masalah transportasi yang dilambangkan dengan *JHM (Juman & Hoque Method)*. *JHM* dapat menentukan solusi fisibel awal untuk masalah transportasi seimbang maupun tidak seimbang [5, 6].

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Masalah Transportasi

Masalah transportasi adalah program linier yang berkaitan dengan sistem pendistribusian barang dari sejumlah sumber ke sejumlah tujuan dan dapat diselesaikan dengan model transportasi [7].

Menurut [7] masalah transportasi yang dipertimbangkan di sini dapat dirumuskan dengan:

$$Minimum\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{2.1}$$

dengan fungsi kendala:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le S_i \ ; i = 1,2,\dots,m \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge D_j \ ; j = 1,2,\dots,n \end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan $x_{ij} \ge 0$ untuk setiap i dan j.

Berdasarkan Persamaan (2.1) dan (2.2), model masalah transportasi dapat diilustrasikan menggunakan Tabel 2.1 sebagai berikut:[2]

Tabel 2.1 Tabel Model Masalah Transportasi

Dari \ Ke		Tujuan						*Supply*
		1	2	...	j	...	n	
Sumber	1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	S_1
	2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}	S_2
	⋮	...						⋮
	i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	S_i
	⋮	...						⋮
	m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	S_m
Demand		D_1	D_2	...	D_j	...	D_n	

Keterangan:
c_{ij} = biaya transportasi per unit barang dari sumber i ke tujuan j
x_{ij} = jumlah barang yang dikirim dari sumber i ke tujuan j
S_i = jumlah barang yang tersedia atau kapasitas dari sumber i
D_j = jumlah barang yang diminta atau dipesan oleh tujuan j
m = banyaknya daerah sumber
n = banyaknya daerah tujuan.

Masalah transportasi disebut seimbang jika total persediaan dari semua sumber sama dengan total permintaan dari semua tujuan, dan disebut tidak seimbang jika total persediaan dari semua sumber berbeda dengan total permintaan dari semua tujuan [8].

Masalah transportasi seimbang dapat dinyatakan sebagai berikut [11]

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j \tag{2.3}$$

dan masalah transportasi tidak seimbang dinyatakan sebagai berikut

$$\sum_{i=1}^{m} S_i \neq \sum_{j=1}^{n} D_j \tag{2.4}$$

2.2 Solusi Fisibel Awal dengan *Juman & Hoque Method (JHM)*

Menentukan solusi fisibel awal adalah awal dalam penyelesaian masalah transportasi. Jika kondisi tabel masalah transportasi terdiri dari m sumber (baris) dan n tujuan (kolom), maka untuk menentukan nilai solusi fisibel awal harus dengan pengalokasian sebanyak $m + n - 1$ variabel basis secara maksimal agar memenuhi seluruh permintaan dan persediaan [9]. Untuk memperoleh solusi fisibel awal, secara umum ada beberapa prosedur yaitu:

1. Setiap kolom dan baris dalam tabel transportasi, dapat dijadikan variabel basis.
2. Pemilihan variabel basis berdasarkan beberapa kriteria pada metode yang digunakan.
3. Pengalokasian dibuat semaksimum mungkin agar memenuhi nilai persediaan dan nilai permintaan.
4. Pada pengalokasian berikutnya, kolom atau baris yang telah memenuhi permintaan dihilangkan.
5. Jika kolom atau baris hanya tersisa satu, maka pengalokasian diberikan pada kolom atau baris tersebut, sehingga prosedur selesai [3].

Metode untuk menentukan solusi fisibel awal, salah satunya dengan *Juman & Hoque Method* (*JHM*). Langkah-langkah umum dalam penentuan solusi fisibel awal masalah transportasi menggunakan *JHM* sebagai berikut:

a) Mengidentifikasi sel biaya terendah setiap kolom dan mengalokasikan setiap permintaan ke sel yang teridentifikasi.
b) Memeriksa jumlah alokasi pada setiap baris untuk mengidentifikasi baris terpenuhi atau tidak.
c) Mengidentifikasi kolom yang memiliki selisih terkecil dengan menghitung selisih antara biaya terkecil dengan biaya terkecil kedua pada masing-masing kolom.
d) Melakukan transfer maksimum kuantitas persediaan berlebih dari sel unit biaya terkecil ke sel unit biaya terkecil berikutnya dalam kolom, berdasarkan baris yang teridentifikasi hingga tidak ada lagi kelebihan persediaan dalam baris tersebut.
e) Menghapus baris yang telah terpenuhi, dan ulangi dari langkah 2 hingga setiap baris telah terpenuhi.
f) Menghitung total biaya transportasi dalam tabel akhir.

2.3 Solusi Optimal

Solusi optimal diperoleh setelah dilakukan uji optimalitas pada solusi fisibel awal. Solusi optimal adalah solusi fisibel yang memiliki nilai paling menguntungkan dari fungsi tujuan [4]. Dalam penelitian ini uji optimalitas dari *JHM* digunakan dengan menggunakan metode potensial yang merupakan suatu pengembangan dari metode *Stepping Stone* yang didasarkan rumusan *dual* [10]. Dalam metode potensial dicari setiap nilai u_i pada masing-masing baris serta setiap nilai v_j pada masing-masing kolom, dengan rumus berikut:

$$u_i + v_j = C_{ij} \qquad (2.5)$$

Untuk mendapatkan matriks evaluasi yang disimbolkan dengan D_{ij} diperlukan matriks biaya awal yang disimbolkan dengan C_{ij} serta matriks yang disimbolkan dengan Z_{ij} yaitu matriks perubahan biaya.

Adapun prosedur dari metode potensial yaitu [12]:

1. Menentukan setiap nilai u_i pada masing-masing baris dan setiap nilai v_j pada masing-masing kolom menggunakan Persamaan (2.5) untuk setiap variabel basis dengan dimisalkan nilai dari salah satu $u_i = 0$.
2. Membentuk matriks perubahan biaya Z_{ij}.
3. Menghitung matriks evaluasi D_{ij} untuk setiap variabel non basis, menggunakan persamaan berikut:
$$D_{ij} = C_{ij} - Z_{ij} \tag{2.6}$$
4. Jika dari perhitungan diperoleh nilai D_{ij} negatif, maka nilai dari solusi tersebut belum solusi optimal. Kemudian pilih x_{ij} yang merupakan D_{ij} dengan negatif terbesar untuk entering variabel.
5. Sejumlah nilai dialokasikan pada entering variabel x_{ij} sesuai lintasan, kemudian ulangi langkah (1) sampai (5) hingga seluruh nilai pada matriks D_{ij} yang dihasilkan positif.

3. METODE PENELITIAN

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah:

1. Mengidentifikasi dan membentuk model transportasi.
2. Mengidentifikasi masalah transportasi seimbang atau tidak seimbang
3. Menjelaskan teorema-teorema penyelesaian masalah transportasi dari *JHM*
4. Menjelaskan iterasi penentuan solusi awal masalah transportasi menggunakan *JHM.*
5. Melakukan uji optimalitas untuk menentukan nilai solusi optimal menggunakan Metode Potensial.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Pembentukan Model Masalah Transportasi

Model masalah transportasi merupakan model yang berkaitan dengan rencana pengiriman suatu barang dari beberapa sumber ke beberapa tujuan dengan biaya terendah. Dalam arti yang sederhana, tujuan dari model transportasi adalah penentuan rencana transportasi suatu barang dari sumber ke tujuan sehingga total biaya transportasi menjadi minimum[1].

Model tersebut diformulasikan dalam sebuah Model Matematika yaitu:

Meminimumkan

$$Z \quad = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{4.1}$$

dengan fungsi kendala:

$$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1j} = S_1 \quad (4.2)$$

$$x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2j} = S_2 \quad (4.3)$$

$$\vdots$$

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{ij} = S_i \quad (4.4)$$

$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{i1} = D_1 \quad (4.5)$$

$$x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{i2} = D_2 \quad (4.6)$$

$$\vdots$$

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{ij} = D_j \quad (4.7)$$

dengan $x_{ij,}\ c_{ij} \geq 0$ untuk setiap i dan j.

4.2 Langkah-langkah Penyelesaian Masalah Transportasi

4.2.1 Teorema Penyelesaian Masalah Transportasi Menggunakan *JHM*

Berikut teorema-teorema untuk pemilihan kolom dan baris yang pertama diproses dalam penyelesaian masalah transportasi dengan *JHM*.

Tabel 4.1 Tabel Matriks Transportasi $m \times n$ dengan Dua Alokasi

Dari \ Ke		Tujuan						*Supply*
		1	a	...	b	...	n	
Sumber	1							S_1
	k		c_1 x		d_1 y			S_k
	l		c_2					S_l
	g				d_2			S_g
	⋮							⋮
	m							S_m
Demand		D_1	$D_a = x$	...	$D_b = y$	...	D_n	

Dalam Tabel 4.1, S_k adalah jumlah persediaan pada baris sumber ke-k, x dan y adalah masing-masing jumlah permintaan pada kolom tujuan a dan b, c_1 dan c_2 merupakan biaya paling rendah kesatu dan kedua pada kolom tujuan a, serta d_1 dan d_2 merupakan biaya paling rendah kesatu dan kedua pada kolom tujuan b.

Teorema 4.1

Misalkan S_k adalah jumlah persedian pada baris sumber ke-k. Andaikan c_1 dan d_1 adalah biaya terkecil pada kolom ke-a dan kolom ke-b dengan alokasi masing-masing x dan y bersumber pada baris sumber ke-k serta $x + y > S_k$. Misalkan *pula c_2 dan d_2 adalah biaya terkecil kedua pada kolom ke-a dan kolom ke-b. Jika $(c_2 - c_1) < (d_2 - d_1)$, maka dengan mentransfer kuantitas persediaan berlebih $(x + y - S_k)$ dari sel biaya terkecil ke sel biaya terkecil kedua di kolom ke-a dapat meminimalkan kenaikan ke biaya total.*

Bukti:

(i) Perhitungan selisih total biaya sesuai selisih biaya terkecil $(c_2 - c_1)$

Kasus I: $\boldsymbol{x \geq x + y - S_k}$.

Selisih total biaya sesuai selisih biaya terkecil $(c_2 - c_1)$ adalah $T_{(c_2-c_1)} - T_{xy} = (c_2 - c_1)(x + y - S_k) > 0$, di mana $T_{xy} = c_1x + d_1y$ dan $T_{(c_2-c_1)} = c_1(S_k - y) + c_2(x + y - S_k) + d_1(y)$.

Kasus II: $\boldsymbol{x < x + y - S_k}$.

Selisih total biaya sesuai selisih biaya terkecil $(c_2 - c_1)$ adalah $T_{(c_2-c_1)} - T_{xy} = (c_2 - c_1)(x) + (d_2 - d_1)(y - S_k) > 0$, di mana $T_{xy} = c_1x + d_1y$ dan $T_{(c_2-c_1)} = c_1(x) + d_1(y) + (d_2 - d_1)(y - S_k) + (c_2 - c_1)(x)$.

(ii) Perhitungan selisih total biaya sesuai selisih biaya terbesar $(d_2 - d_1)$

Kasus I: $\boldsymbol{y \geq x + y - S_k}$.

Selisih total biaya sesuai selisih biaya terbesar $(d_2 - d_1)$ adalah $T_{(d_2-d_1)} - T_{xy} = (d_2 - d_1)(x + y - S_k) > 0$, di mana $T_{xy} = c_1x + d_1y$ dan $T_{(d_2-d_1)} = c_1(x) + d_1(y) + (d_2 - d_1)(x + y - S_k)$.

Kasus II: $\boldsymbol{y < x + y - S_k}$.

Selisih total biaya sesuai selisih biaya terbesar $(d_2 - d_1)$ adalah $T_{(d_2-d_1)} - T_{xy} = (d_2 - d_1)(y) + (c_2 - c_1)(x - S_k) > 0$, di mana $T_{xy} = c_1x + d_1y$ dan $T_{(d_2-d_1)} = c_1(x) + d_1(y) + (c_2 - c_1)(x - S_k) + (d_2 - d_1)(y)$.

Berdasarkan (i) dan (ii) diperoleh, $\left(T_{(d_2-d_1)} - T_{xy}\right) - (T_{(c_2-c_1)} - T_{xy})$ adalah $T_{(d_2-d_1)} > T_{(c_2-c_1)}$ sehingga Teorema 4.1 terbukti.■

Teorema 4.2

Misalkan S_k adalah jumlah persedian pada baris sumber ke-k. Andaikan c_1 dan d_1 adalah biaya terkecil pada kolom ke-a dan kolom ke-b dengan alokasi masing-masing x dan y bersumber pada baris sumber ke-k serta $x + y > S_k$. Misalkan pula c_2 dan d_2 adalah biaya terkecil kedua pada kolom ke-a dan kolom ke-b. Jika $c_2 - c_1 = d_2 - d_1$ dan $c_1 > d_1$, maka dengan mentransfer kuantitas persediaan berlebih $(x + y - S_k)$ dari sel biaya terkecil ke sel biaya terkecil kedua di kolom ke-a dapat meminimalkan kenaikan ke biaya total.

Bukti: *(Misalkan $c_1 > d_1$ dalam tabel 4.1).*

(i) Perhitungan kenaikan biaya ketika transfer dimulai dari sel dengan biaya c_1.

Kasus I: $\boldsymbol{x \geq x + y - S_k}$.

Kenaikan biayanya setelah mentransfer kuantitas persediaan berlebih adalah $c_1[x - (x + y - S_k)] + d_1(y) = c_1(S_k) - (c_1 - d_1)y > 0$.

Kasus II: $\boldsymbol{x < x + y - S_k}$.

Kenaikan biayanya setelah mentransfer kuantitas persediaan berlebih adalah $c_1(0) + d_1[y - (y - S_k)] = d_1(S_k) > 0$.

(ii) Perhitungan kenaikan biaya ketika transfer dimulai dari sel dengan biaya d_1.

Kasus I: $\boldsymbol{y \geq x + y - S_k}$.

Kenaikan biayanya setelah mentransfer kuantitas persediaan berlebih adalah $c_1(x) + d_1[y - (x + y - S_k)] = d_1(S_k) - (d_1 - c_1)x > 0$.

Kasus II: $\boldsymbol{y < x + y - S_k}$.

Kenaikan biayanya setelah mentransfer kuantitas persediaan berlebih adalah $d_1(0) + c_1[x - (x - S_k)] = c_1(S_k) > 0$.

Dengan demikian, kenaikan biaya ke biaya total (ketika transfer dimulai dari sel dengan biaya c_1) selalu kurang dari kenaikan biaya ke biaya total (ketika transfer dimulai dari sel dengan biaya d_1). Jadi, Teorema 4.2 terbukti. ■

Tabel 4.2 Tabel Matriks Transportasi $m \times n$ dengan Dua Baris Tak Terpenuhi, Masing-Masing dengan Alokasi di $(v + h)$ dan di $(w + g)$

		Tujuan											*Supply*
		i	…	…	…	…	…	…	…	$n-1$	n		
Sumber	k	c_1 x_1		c_2 x_2		c_v x_v		$c_{(v+h-1)}$ $x_{(v+h-1)}$	$c_{(v+h)}$ $x_{(v+h)}$			$>$	S_k
	…											$\leq$	$S_{\dots}$
	l	c_1^-	d_1 q_1		d_2 q_2		d_w q_w			$d_{(w+g-1)}$ $q_{(w+g-1)}$	$d_{(w+g)}$ $q_{(w+g)}$	$>$	S_l
	g		d_1^-		d_2^-							$\leq$	S_g
	h			c_2^-						$d_{(w+g-1)}^-$		$\leq$	S_h
	z	c_1^+				c_v^-		$c_{(v+h-1)}^-$			$d_{(w+g)}^-$	$\leq$	S_z
							d_w^-		$c_{(v+h)}^-$				
Demand		x_1	q_1	x_2	q_2	x_v	q_w	x_{v+h-1}	$x_{(v+h)}$	$q_{(w+g-1)}$	$q_{(w+g)}$		

Dalam Tabel 4.2, $c_1, c_2, \dots, c_{(v+h)}$ dan $c_1^-, c_2^-, \dots, c_{(v+h)}^-$ dan c_1^+; $d_1, d_2, \dots, d_{(w+g)}$ dan $d_1^-, d_2^-, \dots, d_{(w+g)}^-$ merupakan semua biaya pengiriman. Lalu, $c_i c_i^- d_j < d_j^-$ dengan $i = 1, 2, \dots, (v + h)$ dan $j = 1, 2, \dots, (w + g)$ dan $c_1^- < c_1^+$. Kemudian, $x_1, x_2, \dots x_{(v+h)}$ adalah masing-masing alokasi pada baris sumber ke-k. Demikian pula, $q_1, q_2, \dots, q_{(w+g)}$ adalah masing-masing alokasi pada baris sumber ke-l, di mana $(v + h) + (w + g) = n =$ total jumlah tujuan. Di sini, baris k dan baris l adalah baris-baris tak terpenuhi dengan kelebihan persediaan untuk masing-masing baris k dan baris l adalah $\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k$ dan $\sum_{j=1}^{(w+g)} q_j - S_l$.

Catatan:

(i) $(c_1^- - c_1) < (c_2^- - c_2) < \cdots < \left(c_{(v+h-1)}^- - c_{(v+h-1)}\right) < (c_{(v+h)}^- - c_{(v+h)})$

(ii) $(d_1^- - d_1) < (d_2^- - d_2) < \cdots < \left(d_{(w+g-1)}^- - d_{(w+g-1)}\right) < (d_{(w+g)}^- - d_{(w+g)})$

Teorema 4.3

Jika terdapat sebuah sel atau beberapa sel dalam baris tak terpenuhi (baris sumber ke-k) tidak mengandung biaya terkecil kedua dari baris tak terpenuhi lainnya (baris sumber ke-l) di dalam satu kolom yang sama, maka transfer kuantitas persediaan berlebih dari baris tak terpenuhi (yaitu dalam kolom dari sel dengan biaya terkecil c_1 ke sel dengan biaya terkecil berikutnya c_1^-, yang merupakan selisih terkecil antara biaya terkecil dan biaya terkecil kedua dalam kolom yang berisi alokasi di baris tak terpenuhi sumber ke-k) akan mengarah pada kenaikan biaya yang sama atau terkecil ke biaya total untuk IFS.

Bukti: (Lihat Tabel 4.2).

(i) $x_1 < \left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right)$ dan $q_1 < \left(\sum_{j=1}^{(w+g)} q_j - S_l\right)$

Kasus I $\left((d_1^- - d_1) < (c_1^+ - c_1^-) < (d_2^- - d_2)\right)$.

Peningkatan biaya menjadi biaya total setelah mentransfer persediaan berlebih, jika Baris k diikuti baris l adalah

$$Z = \left\{\sum_{i=1}^{(v-1)} c_i\,(x_i - x_i) + c_v\left[x_v - \left(\sum_{i=v}^{(v+h)} x_i - S_k\right)\right] + \sum_{i=(v+1)}^{(v+h)} c_i x_i\right\} + \left\{\sum_{i=1}^{(v-1)} c_i x_i + c_v^-\left(\sum_{i=v}^{(v+h)} x_i - S_k\right)\right\} + \left\{\sum_{j=1}^{(w-1)} d_j\left(q_j - q_j\right) + [c_1^-(x_1 - x_1)] + d_w\left[q_w - \left(\sum_{j=w}^{(w+g)} q_j - S_l\right)\right] + \sum_{j=(w+1)}^{(w+g)} d_j q_j\right\} + \left\{\sum_{j=1}^{(w-1)} d_j^- q_j + d_w^-\left(\sum_{j=w}^{(w+g)} q_j - S_l\right)\right\} + (c_1^+ x_1) \quad (4.8)$$

sedangkan jika Baris l diikuti baris k adalah

$$Z = \left\{\sum_{j=1}^{(w-1)} d_j\left(q_j - q_j\right) + [c_1^-(x_1 - x_1)] + d_w\left[q_w - \left(\sum_{j=w}^{(w+g)} q_j - S_l\right)\right] + \sum_{j=(w+1)}^{(w+g)} d_j q_j\right\} + \left\{\sum_{j=1}^{(w-1)} d_j^- q_j + d_w^-\left(\sum_{j=w}^{(w+g)} q_j - S_l\right)\right\} + \left\{\sum_{i=1}^{(v-1)} c_i\,(x_i - x_i) + c_v\left[x_v - \left(\sum_{i=v}^{(v+h)} x_i - S_k\right)\right] + \sum_{i=(v+1)}^{(v+h)} c_i x_i\right\} + \left\{\sum_{i=1}^{(v-1)} c_i x_i + c_v^-\left(\sum_{i=v}^{(v+h)} x_i - S_k\right)\right\} + (c_1^+ x_1) \quad (4.9)$$

Ketika Persamaan (4.9) dikurang dengan Persamaan (4.8) hasilnya adalah 0, sehingga Persamaan (4.8) sama dengan Persamaan (4.9).

Kasus II $\left((c_1^+ - c_1^-) < (d_1^- - d_1)\right)$.

Peningkatan biaya menjadi biaya total setelah mentransfer persediaan berlebih, jika Baris k diikuti baris l adalah sama dengan Persamaan (4.8), sedangkan jika Baris l diikuti baris k adalah sama dengan Persamaan (4.9). Dalam kasus ini kedua persamaan adalah sama.

(ii) $x_1 > \left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right)$ dan $q_1 > \left[\left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right) + \left(\sum_{j=1}^{(w+g)} q_j - S_l\right)\right]$

Kasus I $\left((d_1^- - d_1) < (c_1^+ - c_1^-) < (d_2^- - d_2)\right)$.

Peningkatan biaya menjadi biaya total setelah mentransfer persediaan berlebih jika <u>Baris k diikuti baris l</u> adalah

$$Z = \left\{c_1\left[x_1 - \left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right)\right] + \sum_{i=2}^{(v+h)} c_i x_i\right\} + \left\{d_1\left[q_1 - \left[\left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right) + \left(\sum_{j=1}^{(w+g)} q_j - S_l\right)\right]\right] + \sum_{j=2}^{(w+g)} d_j q_j\right\} + \left\{c_1^-\left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right) + d_1^-\left[\left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right) + \left(\sum_{j=1}^{(w+g)} q_j - S_l\right)\right]\right\} \quad (4.10)$$

sedangkan jika <u>Baris l diikuti baris k</u> adalah

$$Z = \left\{d_1\left[q_1 - \left(\sum_{j=1}^{(w+g)} q_j - S_l\right)\right] + \sum_{j=2}^{(w+g)} d_j q_j\right\} + \left\{c_1\left[x_1 - \left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right)\right] + \sum_{i=2}^{(v+h)} c_i x_i\right\} + \left\{c_1^+\left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right) + d_1^-\left(\sum_{j=1}^{(w+g)} q_j - S_l\right)\right\} \quad (4.11)$$

Ketika Persamaan (4.11) dikurang dengan Persamaan (4.10) nilainya $[(c_1^+ - c_1^-) - (d_1^- - d_1)]\left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right)$ positif, di mana $\left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i > S_k\right)$ dan $(d_1^- - d_1) < (c_1^+ - c_1^-)$. Sehingga, Persamaan (4.10) kurang dari Persamaan (4.11).

Kasus II $\left((c_1^+ - c_1^-) < (d_1^- - d_1)\right)$.

Peningkatan biaya menjadi biaya total setelah mentransfer persediaan berlebih jika <u>Baris k diikuti baris l</u> adalah

$$Z = \left\{c_1\left[x_1 - \left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right)\right] + \sum_{i=2}^{(v+h)} c_i x_i\right\} + \left\{c_1^-\left[\left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right) - \left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right)\right]\right\} + \left\{d_1\left[q_1 - \left(\sum_{j=1}^{(w+g)} q_j - S_l\right)\right] + \sum_{j=2}^{(w+g)} d_j q_j\right\} + \left\{c_1^+\left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right) + d_1^-\left(\sum_{j=1}^{(w+g)} q_j - S_l\right)\right\} \quad (4.12)$$

sedangkan jika <u>Baris l diikuti baris k</u> adalah

$$Z = \left\{d_1\left[q_1 - \left(\sum_{j=1}^{(w+g)} q_j - S_l\right)\right] + \sum_{j=2}^{(w+g)} d_j q_j\right\} + \left\{c_1\left[x_1 - \left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right)\right] + \sum_{i=2}^{(v+h)} c_i x_i\right\} + \left\{c_1^+\left(\sum_{i=1}^{(v+h)} x_i - S_k\right) + d_1^-\left(\sum_{j=1}^{(w+g)} q_j - S_l\right)\right\} \quad (4.13)$$

Ketika Persamaan (4.13) dikurang dengan Persamaan (4.12) nilainya adalah 0, sehingga Persamaan (4.12) sama dengan Persamaan (4.13).

Dengan demikian, berdasarkan (i) dan (ii) kenaikan biaya yang sama atau terkecil ke biaya total terpenuhi. Jadi, Teorema 4.3 terbukti. ■

Tabel 4.3 Tabel Matriks Transportasi $m \times n$ dengan Dua Baris Tak Terpenuhi, Masing-Masing dengan Dua Alokasi

Ke / Dari		Tujuan				*Supply*	
		a	b	h	n		
Sumber	k	c_1 x	e_2		d_1 y	$>$	S_k
	g					$\leq$	S_g
	l	c_2	e_1 q	f_1 p		$>$	S_l
	...	c_3		f_2		$\leq$	$S_{...}$
	m		e_3		d_2	$\leq$	S_m
		$=$	$=$	$=$	$=$		
Demand		x	q	p	y		

Dalam Tabel 4.3, $c_1, c_2, c_3, e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, d_1, d_2$ merupakan semua biaya pengiriman, di mana c_1, c_2, c_3 adalah biaya terkecil 1, 2, 3 dalam kolom tujuan ke-a dan e_1, e_2, e_3 adalah biaya terkecil 1, 2, 3 dalam kolom tujuan ke-b serta c_2 berada pada baris tak terpenuhi ke-k dan e_2 berada pada baris tak terpenuhi ke-l. Kemudian, x dan y adalah masing-masing alokasi pada baris sumber ke-k serta q dan p adalah masing-masing alokasi pada baris sumber ke-l. Di sini, baris k dan baris l adalah baris-baris tak terpenuhi dengan kelebihan persediaan untuk masing-masing baris k dan baris l adalah $x + y - S_k$ dan $q + p - S_l$.

Teorema 4.4

Misalkan selisih terkecil untuk baris tak terpenuhi bersesuaian dengan biaya terkecil c_1, dan selisih terkecil untuk baris tak terpenuhi lainnya bersesuaian dengan biaya terkecil e_1. Misalkan c_1, c_2 dan c_3 menjadi unit biaya terkecil 1, 2, dan 3 dalam kolom ke-a dan e_1, e_2 dan e_3 menjadi biaya unit terkecil 1, 2 dan 3 di kolom ke-b. Jika $(c_3 - c_1) > (e_3 - e_2)$ (atau $(e_3 - e_1) > (c_3 - c_2)$) maka dengan mengidentifikasi baris tak terpenuhi yang mengandung biaya terkecil c_1 (atau mengandung biaya terkecil e_1) dan mentransfer (mengidentifikasi baris tak terpenuhi) jumlah persediaan berlebih akan menyebabkan kenaikan biaya yang sama atau terkecil di biaya total.

Bukti: (Lihat Tabel 4.3).

Kasus I $((e_3 - e_1) > (c_3 - c_2)$ & $(c_3 - c_1) > (e_3 - e_2))$

Peningkatan biaya menjadi biaya total setelah mentransfer masing-masing persediaan berlebih dari kedua baris yang tak terpenuhi, jika <u>Baris k diikuti baris l</u> dengan asumsi $(c_3 - c_2) < (e_3 - e_1) < (f_2 - f_1)$ adalah

$$Z = c_1(x - x) + d_1[y - (y - S_k)] + c_2(x - x) + e_1(q - q) + f_1[p - (p - S_l)] + c_3x + e_3q + d_2(y - S_k) + f_2(p - S_l) \quad (4.14)$$

sedangkan jika <u>Baris l diikuti baris k</u> dengan asumsi $(e_3 - e_2) < (c_3 - c_1) < (d_2 - d_1)$ adalah

$$Z = e_1(q - q) + f_1[p - (p - S_l)] + c_1(x - x) + e_2(q - q) + d_1[y - (y - S_k)] + c_3x + e_3q + f_2(p - S_l) + d_2(y - S_k) \quad (4.15)$$

Ketika Persamaan (4.15) dikurang dengan Persamaan (4.14) nilainya adalah 0 sehingga Persamaan (4.14) sama dengan Persamaan (4.15). Jadi, mengidentifikasi salah satu dari dua baris yang tak terpenuhi akan menyebabkan peningkatan biaya yang sama terhadap biaya total.

Kasus II ($(e_3 - e_1) < (c_3 - c_2)$ & $(c_3 - c_1) > (e_3 - e_2)$)

Peningkatan biaya menjadi biaya total setelah mentransfer masing-masing persediaan berlebih dari kedua baris yang tak terpenuhi, jika <u>Baris k diikuti baris l</u> dengan asumsi $(e_3 - e_1) < (f_2 - f_1) < (c_3 - c_2)$ adalah

$$Z = c_1(x - x) + d_1[y - (y - S_k)] + e_1(q - q) + f_1(p - p) + c_2[x - (x - S_l)] + d_2(y - S_k) + c_3(x - S_l) + e_3q + f_2p \quad (4.16)$$

sedangkan jika <u>Baris l diikuti baris k</u> dengan asumsi $(e_3 - e_2) < (c_3 - c_1) < (d_2 - d_1)$ adalah sama dengan Persamaan (4.15) pada Kasus I.

Ketika Persamaan (4.15) di kurang Persamaan (4.16) nilainya $[(c_3 - c_2) - (f_2 - f_1)]S_l$ positif, di mana $(c_3 - c_2) > (f_2 - f_1)$ dan $S_l > 0$. Sehingga, Persamaan (4.16) kurang dari Persamaan (4.15). Jadi, mengidentifikasi baris tak terpenuhi ke-k dan mentransfer persediaan berlebih $(x + y - S_k)$ akan menyebabkan biaya minimum.

Kasus III ($(e_3 - e_1) > (c_3 - c_2)$ & $(c_3 - c_1) < (e_3 - e_2)$)

Peningkatan biaya menjadi biaya total setelah mentransfer masing-masing persediaan berlebih dari kedua baris yang tak terpenuhi, jika <u>Baris k diikuti baris l</u> dengan asumsi $(c_3 - c_2) < (e_3 - e_1) < (f_2 - f_1)$ adalah sama dengan Persamaan (4.14) pada Kasus I. Sedangkan jika <u>Baris l diikuti baris k</u> dengan asumsi $(c_3 - c_1) < (d_2 - d_1) < (e_3 - e_2)$ adalah

$$Z = e_1(q - q) + f_1[p - (p - S_l)] + c_1(x - x) + d_1(y - y) + e_2[q - (q - S_k)] + +e_3(q - S_k) + f_2(p - S_l) + c_3x + d_2y \quad (4.17)$$

Ketika Persamaan (4.14) di kurang Persamaan (4.17) nilainya $[(e_3 - e_2) - (d_2 - d_1)]S_k$ positif, di mana $[(e_3 - e_2) > (d_2 - d_1)]$ dan $S_k > 0$. Sehingga, Persamaan (4.17) kurang dari Persamaan (4.14). Jadi, mengidentifikasi baris tak terpenuhi ke-l dan mentransfer persediaan berlebih $(q + p - S_l)$ akan menyebabkan biaya minimum.

Kasus IV ($(e_3 - e_1) < (c_3 - c_2)$ & $(c_3 - c_1) < (e_3 - e_2)$)

Dalam kasus ini, dengan menggabungkan kedua ketidaksetaraan, maka didapatkan $(e_3 - e_1) < (c_3 - c_2) < (c_3 - c_1) < (e_3 - e_2)$ dimana $(c_3 - c_2) < (c_3 - c_1)$ karena, $c_3 > c_2 > c_1$. Jadi, $(e_3 - e_1) < (e_3 - e_2)$ yang merupakan kontradiksi $(e_3 - e_1) > (e_3 - e_2)$ karena, $e_3 > e_2 > e_1$. Oleh karena itu, Kasus IV tidak dapat dihitung.

Dengan demikian, berdasarkan keempat kasus di atas kenaikan biaya yang sama atau terkecil ke biaya total terpenuhi. Jadi, Teorema 4.4 terbukti.■

4.2.2 Langkah-langkah Penyelesaian Masalah Transportasi Seimbang dan Tidak Seimbang dengan *JHM*

1) Menyiapkan matriks transportasi awal $m \times n$ dengan biaya c_{ij}, persediaan S_i dan permintaan D_j untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ serta $j = 1, 2, \ldots, n$.
2) Memeriksa apakah tabel transportasi seimbang atau tidak seimbang. Jika jumlah *supply* sama dengan jumlah *demand* ($\sum S_i = \sum D_j$) maka masalah transportasi seimbang dan lanjutkan ke langkah 4. Jika jumlah *supply* lebih dari jumlah *demand* ($\sum S_i > \sum D_j$) maka masalah transportasi tidak seimbang dan lanjutkan ke langkah 4. Namun, jika jumlah *supply* kurang dari jumlah *demand* ($\sum S_i < \sum D_j$) maka masalah transportasi juga tidak seimbang dan lanjutkan ke langkah 3.
3) Dalam permasalahan transportasi tidak seimbang untuk kasus $\sum S_i < \sum D_j$, maka nilai *supply* dan *demand* harus diseimbangkan terlebih dahulu dengan menambahkan sebuah baris *dummy* pada matriks transportasi dengan maksimal unit (P_i) yang dialokasikan adalah sebanyak $\sum D_j - \sum S_i$. Dalam baris *dummy*, biaya setiap selnya adalah nol kemudian lakukan alokasi awal dari masing-masing permintaan (D_j) ke masing-masing sel *dummy*.
4) Pada setiap kolom dari tabel transportasi, dilakukan identifikasi sel biaya terkecil. Kemudian, alokasikan masing-masing permintaan (D_j) ke masing-masing sel yang teridentifikasi dengan sel biaya terkecil.
5) Untuk masing-masing alokasi yang ditetapkan di masing-masing baris, diperiksa apakah jumlah dari alokasi pada masing-masing baris tersebut kurang dari atau sama dengan jumlah masing-masing persediaan (S_i). Jika demikian, dilanjut ke langkah 11. Namun, jika terdapat baris yang jumlah dari alokasinya lebih dari kuantitas persediaannya maka baris tersebut diidentifikasi sebagai baris tak terpenuhi dan dilanjut ke langkah 6.
6) Mencari sel unit biaya terkecil kedua di setiap kolom. Kemudian, untuk masing-masing kolom berdasarkan alokasi pada baris tak terpenuhi, dilakukan identifikasi kolom dengan menentukan selisih antara biaya terkecil dengan biaya terkecil kedua pada masing-masing kolom. Kolom yang memiliki selisih terkecil diidentifikasi sebagai kolom pertama yang melakukan transfer kuantitas persediaan berlebih. Jika hanya ada satu baris tak terpenuhi maka baris tak terpenuhi tersebut diidentifikasi sebagai baris yang pertama diproses dan dilanjutkan ke langkah 9. (Berdasarkan Teorema 4.1 dan 4.2)
7) Memeriksa masing-masing baris tak terpenuhi apakah ada baris yang tidak mengandung biaya terkecil kedua dari baris tak terpenuhi lainnya. Jika ada baris tak terpenuhi seperti itu, maka baris tak terpenuhi tersebut diidentifikasi sebagai baris yang pertama diproses dan dilanjutkan ke langkah 9. (Berdasarkan Teorema 4.3)

8) Diambil dua baris tak terpenuhi. Untuk masing-masing dari baris itu, temukan selisih-selisih antara biaya terkecil kedua dengan biaya terkecil pertama dalam kolom yang berisi alokasi pada biaya terkecil. Misalkan selisih terkecil untuk baris tak terpenuhi bersesuaian dengan biaya terkecil c_1 dan e_1, di mana c_1, c_2, c_3 dan e_1, e_2, e_3 adalah biaya terkecil kesatu, kedua, dan ketiga dalam masing masing kolom. Jika $(c_3 - c_1) > (e_3 - e_2)$, maka baris tak terpenuhi yang mengandung biaya terkecil $'c_1'$ diidentifikasi sebagai baris yang pertama diproses. Jika sebaliknya, maka baris tak terpenuhi yang mengandung biaya terkecil $'e_1'$ diidentifikasi sebagai baris yang pertama diproses dan dilanjutkan ke Langkah 9. (Berdasarkan Teorema 4.4)
9) Mempertimbangkan baris tak terpenuhi yang diidentifikasi berdasarkan langkah 6 atau langkah 7 ataupun langkah 8, dilakukan transfer semaksimum mungkin kuantitas persediaan berlebih dari sel unit biaya terkecil ke sel unit biaya terkecil berikutnya dalam kolom yang teridentifikasi memiliki selisih terkecil. Jika masih terdapat kelebihan persedian dalam baris tersebut, maka dilakukan hal yang sama untuk kolom yang memiliki selisih terkecil berikutnya dan diulangi proses transfer ini hingga tidak ada lagi kelebihan persediaan dalam baris tersebut.
10) Menghapus baris yang benar-benar telah terpenuhi berdasarkan transfer kuantitas persediaan berlebih, dan ulangi dari langkah 5.
    Baris yang dikatakan terpenuhi adalah baris yang jumlah dari semua alokasinya kurang dari sama dengan besar persediaannya.
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq S_i \quad ; i = 1, 2, \dots, m \tag{4.18}$$
11) Jika setiap baris telah terpenuhi, maka total biaya saat ini dapat diambil sebagai solusi awal yang layak. Adapun perhitungan total biaya dengan cara menggunakan Persamaan (4.1).

Setelah mendapatkan nilai solusi fisibel awal, berikutnya dicari nilai dari solusi optimal dengan menguji optimalitas dari solusi fisibel awal. Adapun metode untuk menentukan nilai solusi optimal adalah dengan Metode Potensial.

Contoh Kasus Penyelesaian Masalah Transportasi dengan *JHM*

Diasumsikan sebuah perusahaan memiliki tiga gudang (S1, S2, dan S3) dan ingin memenuhi kebutuhan empat pelanggan (D1, D2, D3, dan D4) dengan biaya transportasi yang minimal. Tabel 4.4 merangkum biaya transportasi beserta kapasitas dan kebutuhan masing-masing gudang dan pelanggan.

Tabel 4.4 Tabel Matriks Masalah Transportasi

Dari \ Ke		Tujuan 1	Tujuan 2	Tujuan 3	Tujuan 4	*Supply*
Sumber	1	10 x_{11}	2 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	15
	2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	25
	3	4 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	10
Demand		5	15	15	15	

Perhitungan solusi awal untuk masalah transportasi di atas menggunakan *JHM* adalah sebagai berikut:

Tabel transportasi diperiksa apakah seimbang atau tidak seimbang dengan cara melakukan penjumlahan untuk semua *supply* dan semua *demand*. Kemudian melakukan identifikasi sel biaya terkecil pada masing-masing kolom Disajikan pada Tabel 4.5 berikut.

Tabel 4.5 Identifikasi Biaya Terkecil Masing-Masing Kolom

Dari \ Ke		Tujuan 1	Tujuan 2	Tujuan 3	Tujuan 4	*Supply*
Sumber	1	10 x_{11}	2 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	15
	2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	25
	3	4 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	10
Demand		5	15	15	15	50

Kemudian alokasikan setiap permintaan ke sel-sel yang teridentifikasi

Tabel 4.6 Alokasi Awal pada Masing-masing Sel

Dari \ Ke		Tujuan 1	Tujuan 2	Tujuan 3	Tujuan 4	*Supply*
Sumber	1	10	2 15	20	11 15	15
	2	12	7	9 15	20	25
	3	4 5	14	16	18	10
Demand		5	15	15	15	50

Memeriksa apakah jumlah dari alokasi pada masing-masing baris kurang dari atau sama dengan jumlah masing-masing persediaan. Jika terdapat baris yang jumlah dari alokasinya lebih dari kuantitas persediaannya maka baris tersebut diidentifikasi sebagai baris tak terpenuhi. Kemudian dilanjutkan dengan Mencari sel unit biaya terkecil kedua disetiap kolom dan identifikasi kolom dengan menentukan selisih antara biaya terkecil kesatu dengan biaya terkecil kedua disetiap kolom.

Tabel 4.7 Perhitungan Selisih Biaya Terkecil dengan Biaya Terkecil Kedua

Dari \ Ke		Tujuan 1	Tujuan 2	Tujuan 3	Tujuan 4	*Supply*	
Sumber	1	10	2 15	20	11 15	15	Baris tak terpenuhi
	2	12	7	9 15	20	25	
	3	4 5	14	16	18	10	
Demand		5	15	15	15	50	
Penalty			5		7		

Terdapat satu baris tak terpenuhi, maka baris tersebut diidentifikasi sebagai baris pertama diperoses untuk melakukan transfer kuantitas persediaan berlebih. Berdasarkan identifikasi kolom, kolom yang pertama melakukan transfer kuantitas persediaan berlebih adalah kolom 2 yaitu pada sel baris 1 kolom 2. Dalam kolom tersebut dilakukan transfer kuantitas persediaan berlebih semaksimum mungkin ke sel dengan biaya terkecil kedua.

Tabel 4.8 Transfer Persediaan Berlebih Baris 1 Kolom 2

Dari \ Ke		Tujuan 1	Tujuan 2	Tujuan 3	Tujuan 4	*Supply*	
Sumber	1	10	2 15 – 15	20	11 15	15	Baris tak terpenuhi
	2	12	7 15	9 15	20	25	
	3	4 5	14	16	18	10	
Demand		5	15	15	15	50	
Penalty			5		7		

Memeriksa ulang baris 1 dengan menjumlahkan setiap alokasi pada baris tersebut. Jika jumlah alokasinya kurang dari sama dengan persediaannya maka baris tersebut diidentifikasi sebagai baris terpenuhi dan dapat dihapus atau dieleminasi.

Tabel 4.9 Memeriksa Ulang Jumlah Persediaan

Dari \ Ke		Tujuan 1	Tujuan 2	Tujuan 3	Tujuan 4	*Supply*	
Sumber	1	10	2 0	20	11 15	15	Baris terpenuhi
	2	12	7 15	9 15	20	25	
	3	4 5	14	16	18	10	
Demand		5	15	15	15	50	

Setelah salah satu baris dihapus, maka dilakukan pengulangan dan seterusnya hingga semua baris terpenuhi. Kemudian, masing-masing baris diperiksa dengan menjumlahkan setiap alokasi pada masing-masing baris.

Tabel 4.10 Identifikasi Masing-Masing Baris

Dari \ Ke		Tujuan 1	Tujuan 2	Tujuan 3	Tujuan 4	*Supply*	
Sumber	1	10	2 0	20	11 15	15	Baris terpenuhi
	2	12	7 10	9 15	20	25	Baris terpenuhi
	3	4 5	14 5	16	18	10	Baris terpenuhi

Demand	5	15	15	15	50	

Semua baris teridentifikasi sebagai baris terpenuhi dan variabel basis telah memenuhi $m + n - 1$, maka total biaya saat ini dapat diambil sebagai solusi fisibel awal. Dari Tabel 4.10, diperoleh total biaya transportasi: $Z = 460$

Selanjutnya, akan dilakukan uji optimalitas dari tabel akhir pada penyelesaian masalah transportasi dengan *JHM* yaitu Tabel 4.10 menggunakan metode potensial untuk memperoleh solusi akhir yang optimal. Berdasarkan metode potensial didapatkan tabel penyelesaian masalah transportasi yang solusinya merupakan solusi optimal sebagai berikut.

Tabel 4.11 Tabel Masalah Transportasi Solusi Optimal

Ke Dari		Tujuan				*Supply*
		1	2	3	4	
Sumber	1	10	2 5	20	11 10	15
	2	12	7 10	9 15	20	25
	3	4 5	14	16	18 5	10
Demand		5	15	15	15	50

Berdasarkan Persamaan (2.1), nilai solusi akhir $Z = 435$ satuan. Jadi, nilai solusi optimal dari penyelesaian masalah transportasi pada contoh ini yaitu sebesar 435 satuan. Sedangkan nilai solusi awal yang diperoleh dengan *JHM*, yaitu sebesar 460 satuan. Oleh karena itu, dapat dikatakan bahwa solusi awal yang diperoleh menggunakan *JHM* sudah mendekati nilai dari solusi optimal.

5. KESIMPULAN

Juman & Hoque Method (*JHM*) merupakan metode untuk penentuan nilai solusi awal pada masalah transportasi seimbang maupun tidak seimbang. Pengalokasian awal dalam metode ini dimulai pada masing-masing sel yang teridentifikasi memiliki biaya terkecil dalam masing-masing kolom sebanyak kuantitas masing-masing permintaan. Kemudian, dilakukan identifikasi pada masing-masing baris dengan menghitung jumlah dari semua alokasinya, jika jumlah alokasi kurang dari atau sama dengan kuantitas masing-masing persediaan maka baris tersebut diidentifikasi sebagai baris terpenuhi dan begitu pula sebaliknya. Nilai solusi awal yang diperoleh menggunakan *JHM* pada penyelesaian masalah transportasi cenderung mendekati bahkan sama dengan nilai solusi optimal. Hal tersebut diketahui setelah dilakukan uji optimalitas menggunakan Metode Potensial.

REFERENSI

[1]. Affandi, P. 2019. *Buku Ajar Riset Operasi*. Edisi Pertama. CV IRDH, Malang.
[2]. Aramuthakannan, S. & Kandasamy, P. 2016. *Revised Distribution Method of Finding Optimal Solution for Transportation Problem. Iosr Journal of Mathematics*, 5 (1), 39-42.
[3]. Bu'ulolo, F. 2017. *Operasi Riset Program Linier*. Edisi ke-2. USU Press, Medan.
[4]. Hillier, F. S., and Lieberman, G. J. 1967. *Introduction to Operations Research.* San Fransisco: Holden-Day.
[5]. Juman, Z. A. M. S., & Nawarathne, N. G. S. A. 2018. *An Efficient Alternative Approach to Solve a Transportation Problem. Ceylon Journal of Science,* 48 (1), 19-29.
[6]. Juman, Z. A. M. S., & Hoque, M. A. 2015. *An Efficient Heuristic to Obtain a Better Initial Feasible Solution to The Transportation Problem. Applied Soft Computing,* 34, 813-826.
[7]. Korukoglu, S., & Balli, S. 2011. *A Improved Vogel's Approximation Method for the Transportation Problem*. *Mathematical and Computational Applications*, 16(2), 370-381.
[8]. Mamidi, P. L., & Murthy, M. S. R. 2014. *An Approach for Unreliability of Direct Methods-Optimal Solution of Transportation Problem*. *International Journal of Engineering Sciences & Research Technology*, 3(4), 1834-1837.
[9]. Murthy, P. R. (2007). *Operations Research (Second Edition)*. New Age International, New Delhi.
[10]. Sari, D. P., Bu'ulolo, F., & Ariswoyo, S. 2013. *Optimasi Masalah Transportasi dengan Menggunakan Metode Potensial pada Sistem Distribusi PT. XYZ. Saintia Matematika*, 1(5), 407-418.
[11]. Simbolon, L. D., Situmorang, M., And Napitupulu, N. 2014. *Aplikasi Metode Transportasi dalam Optimasi Biaya Distribusi Beras Miskin (Raskin) Pada Perum Bulog Sub Divre Medan*. *Saintia Matematika*, 2 (3), 299-311.
[12]. Sudrajat. 2008. *Pendahuluan Penelitian Operasional (Model Transportasi)*. Bandung: Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Padjajaran.