

MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN DBD TIPE SIR

Asmaidi¹⁾, Samsidar²⁾

¹⁾Program Studi Teknik Informatika Politeknik Aceh Selatan
Jl. Merdeka, Komplek Reklamasi Pantai, Tapaktuan, 23751, Aceh Selatan, Telp. 0656-323699

²⁾SMP Negeri 1 Susoh

Jln. BB. Jalan Pantai Perak, Kecamatan Susoh, Kabupaten Aceh Barat Daya

Email: ¹⁾asmedmat@gmail.com, ²⁾beno.luhafa@gmail.com

ABSTRACK

Based on emerging DHF cases occur various solutions for the prevention and control of the transmission of dengue, one of them is to create a mathematical model. The Mathematical model that was developed is a SIR (Susceptible (S), Infected (I) and recovered (R)), where the rate of displacement of latent mosquitoes become infected mosquito is assumed constant and healthy mosquito eggs produced by infected mosquitoes and susceptible mosquitoes, while the mosquito is infected eggs produced only by infected mosquitoes. In the SIR model, an analysis is performed to assess the stability of the equilibrium point and numerical simulations. Numeric simulation was introduced to show the stability at the equilibrium state considered basic reproduction number (\mathcal{R}_0). There are two equilibrium points. The first equilibrium point is a the disease-free equilibrium which is stable, $\mathcal{R}_0 < 1$. The second equilibrium point is called an endemic equilibrium, which is stable, $\mathcal{R}_0 > 1$. The numerical simulations show that increasing mosquitoes mortality rate makes \mathcal{R}_0 , infected human, latent mosquito, infected mosquito, infected egg are decrease, so as to help suppress the spread of the disease in the population.

Keywords: *mathematical models, basic reproductive number, disease free equilibrium, endemic equilibrium*

ABSTRAK

Berdasarkan kasus DBD yang terjadi muncul berbagai solusi untuk pencegahan dan penanggulangan penyebaran DBD, salah satunya adalah membuat suatu model matematika. Model matematika yang dikembangkan adalah model SIR (*Susceptible (S), Infected (I) dan recovered (R)*), di mana laju perpindahan nyamuk laten menjadi nyamuk terinfeksi diasumsikan konstan dan telur nyamuk sehat diproduksi oleh nyamuk sehat dan nyamuk terinfeksi, sedangkan telur nyamuk terinfeksi hanya diproduksi oleh nyamuk terinfeksi. Model SIR dianalisis untuk memperoleh titik tetap dan kestabilannya serta dilakukan simulasi numerik. Simulasi numerik dilakukan untuk menunjukkan kestabilan titik tetap berdasarkan bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0). Ada dua titik tetap, titik tetap tanpa penyakit (*disease-free equilibrium*) stabil ketika $\mathcal{R}_0 < 1$. Titik tetap penyakit (*endemic equilibrium*) stabil ketika $\mathcal{R}_0 > 1$. Simulasi numerik menunjukkan bahwa, dengan meningkatnya laju kematian nyamuk menyebabkan \mathcal{R}_0 , manusia terinfeksi, nyamuk laten, nyamuk terinfeksi, telur terinfeksi menurun, sehingga dapat menekan laju penyebaran penyakit dalam populasi.

Kata kunci: model matematika, bilangan reproduksi dasar, titik tetap tanpa penyakit, titik tetap penyakit

I. PENDAHULUAN

Berdasarkan kasus DBD yang terjadi muncul berbagai solusi untuk pencegahan dan penanggulangan penyebaran DBD, salah satunya adalah membuat suatu model matematika. Menjelang akhir abad ke-20 pemodelan matematika menjadi meluas, terutama dalam usaha membuat kebijakan kesehatan masyarakat menjadi strategis dan taktis [4], sebagai contoh model matematika yang mempertimbangkan faktor suhu.

Model matematika penularan DBD yang mempertimbangkan faktor suhu pernah dilakukan oleh [1],[6]. Mereka mengembangkan model *SIR* (*Susceptible, Infected, Recovered*).

Model matematika dalam penelitian Massad diasumsikan laju perpindahan nyamuk laten menjadi nyamuk terinfeksi tidak konstan dan melibatkan waktu tunda (τ) sebagai periode masa inkubasi pada nyamuk. Selain itu, Massad mengasumsikan telur nyamuk sehat diproduksi oleh nyamuk rentan dan nyamuk terinfeksi, sedangkan telur nyamuk terinfeksi hanya diproduksi oleh nyamuk terinfeksi. Faktor suhu yang digunakan Massad dalam memproduksi nyamuk rentan dan nyamuk terinfeksi tidak konstan.

Model matematika Amaku diasumsikan laju perpindahan nyamuk laten menjadi nyamuk terinfeksi konstan dan telur nyamuk sehat diproduksi oleh ketiga kompartmen nyamuk, sedangkan telur nyamuk terinfeksi diproduksi oleh nyamuk laten dan nyamuk terinfeksi. Faktor suhu yang digunakan Amaku adalah konstan.

Berdasarkan kedua penelitian tersebut maka model *SIR* dikembangkan lagi dengan mengasumsikan laju perpindahan nyamuk laten menjadi nyamuk terinfeksi konstan seperti asumsi yang digunakan Amaku dan laju produksi telur nyamuk sehat dan terinfeksi digunakan asumsi yang digunakan Massad. Selain itu, digunakan faktor suhu dalam produksi nyamuk rentan dan nyamuk terinfeksi dari telurnya. Faktor suhu yang digunakan sama seperti yang terdaat pada penelitian Massad. Dalam tulisan ini akan

ditentukan titik tetap dan bilangan reproduksi dasar. Tahap berikutnya dilakukan simulasi untuk melihat dinamika populasi terinfeksi pada model.

Penelitian ini bertujuan untuk memodifikasi model matematika, menentukan titik tetap dan kestabilan titik tetap berdasarkan bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0). Selanjutnya melakukan simulasi pengaruh laju kematian nyamuk terhadap penyebaran penyakit pada populasi.

II. DASAR TEORI

A. Sistem Persamaan Diferensial Mandiri Orde-1

Sistem persamaan diferensial orde-1 terdiri atas n persamaan dan n fungsi dari x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) dapat ditulis

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1)$$

Sistem persamaan diferensial (1) dapat ditulis dalam notasi vektor, yaitu

$$\dot{x} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

dengan

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

B. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Sistem persamaan diferensial dapat ditulis dalam bentuk:

$$\dot{x} = Ax, \quad (3)$$

di mana A merupakan matriks segi yang berukuran $n \times n$, maka vektor taknol di \mathbb{R}^n disebut vektor eigen dari A , jika untuk suatu skalar λ , yang disebut nilai eigen dari A , berlaku:

$$Ax = \lambda x. \tag{4}$$

Vektor x dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ . Persamaan (4) dapat ditulis:

$$(A - \lambda I)x = 0, \tag{5}$$

agar diperoleh solusi nontrivial, maka

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{6}$$

Persamaan (6) disebut persamaan karakteristik.

C. Pelinearan

Misalkan diketahui sistem persamaan diferensial taklinear, dengan menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar titik tetap \bar{x} diperoleh:

$$\bar{x} = Jx + \varphi(x), \tag{7}$$

di mana J merupakan matriks *Jacobi*,

$$J = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{8}$$

dan $\varphi(x)$ suku berorde tinggi dengan $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$, sedangkan J merupakan hasil pelinearan dari persamaan diferensial taklinear.

D. Titik Tetap dan Kestabilan Titik Tetap

1) Titik Tetap

Misalkan diketahui sistem persamaan diferensial mandiri orde-1 seperti (2.7), maka titik \bar{x} disebut titik tetap atau titik kesetimbangan, jika $f(\bar{x}) = 0$ [5].

2) Kestabilan Titik Tetap

Misalkan sistem persamaan diferensial diferensial taklinear memiliki titik tetap \bar{x} . Kestabilan titik tetap tersebut dapat dilihat dari nilai-nilai eigennya, yaitu λ_i dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ yang diperoleh dari $\det(A - \lambda I) = 0$.

Secara umum titik tetap mempunyai sifat sebagai berikut:

1. Stabil, jika
 - a. Setiap nilai eigen real adalah negatif: $\lambda_i < 0$ untuk setiap i , atau
 - b. Nilai eigen kompleks bagian $Re(\lambda_i) < 0$ untuk setiap i .
2. Takstabil, jika
 - a. Terdapat paling sedikit satu nilai eigen real positif: $\lambda_i > 0$.
 - b. Terdapat paling sedikit satu nilai eigen kompleks dengan $Re(\lambda_i) > 0$ [3].

E. Kriteria Routh-Hurwitz

Misalkan diberikan persamaan karakteristik:

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \dots + a_k = 0 \tag{9}$$

Didefinisikan k matriks sebagai berikut:

$$H_1 = [a_1], H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$H_j = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & a_{2j-4} & \dots & a_k \end{bmatrix}$$

.....

$$H_k = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_k \end{bmatrix}$$

dengan syarat setiap unsur (l,m) pada matrik H_j adalah:

$$h_{lm} = \begin{cases} a_{2l-m}, & \text{untuk } 0 < 2l - m < k \\ 1, & \text{untuk } 2l = m \\ 0, & \text{untuk } 2l < m \text{ atau } 2l > k + m \end{cases}$$

Titik tetap \bar{x} stabil jika dan hanya jika $\det H_j > 0$, untuk setiap $j = 1, 2, \dots, k$. Kriteria Routh-Hurwitz untuk $k = 2, 3$, dan 4 , yaitu

$$k = 2: a_1 > 0 \quad a_2 > 0$$

$$k = 3: a_1 > 0 \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 > a_3$$

$$k = 4: a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4.$$

F. Bilangan Reproduksi Dasar (\mathcal{R}_0)

Menurut [2] bilangan reproduksi dasar didefinisikan nilai harapan banyaknya populasi rentan yang menjadi terinfeksi selama masa infeksi. Selain itu, menurut [2] kondisi yang memungkinkan untuk \mathcal{R}_0 adalah:

1. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka rata-rata setiap individu terinfeksi akan menginfeksi kurang dari satu individu baru, sehingga penyakit tidak akan menyebar.
2. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka rata-rata setiap individu terinfeksi akan menginfeksi lebih dari satu individu baru, sehingga penyakit akan menyebar.

Bilangan reproduksi dasar dalam tulisan ini ditentukan dengan menggunakan *the next generation matrix* \mathbf{G} . *The next generation matrix* \mathbf{G} mempunyai dua bagian yaitu \mathbf{F} dan \mathbf{V}^{-1} yang didefinisikan:

$$\mathbf{G} = \mathbf{FV}^{-1} \quad (10)$$

dengan

$$\mathbf{F} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \quad \text{dan} \quad \mathbf{V} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \quad [5].$$

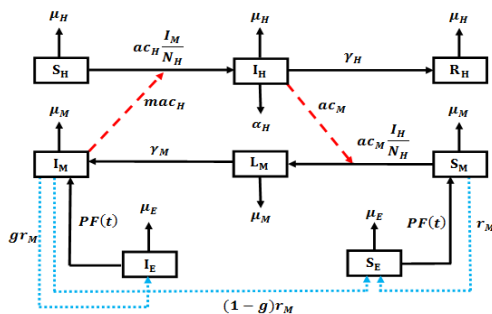
di mana \mathbf{F} adalah matriks laju infeksi baru, sedangkan \mathbf{V} merupakan matriks laju perpindahan individu yang dievaluasi pada titik tetap (\mathbf{x}_0) . Menurut [5], \mathcal{R}_0 merupakan nilai eigen dominan dari matriks $\mathbf{G} = \mathbf{FV}^{-1}$.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Model Modifikasi

Dalam model *SIR* populasi manusia terdiri dari manusia rentan (S_H), manusia terinfeksi (I_H), dan manusia sembuh (R_H),

dengan total manusia $N_H = S_H + I_H + R_H$. Populasi nyamuk terdiri dari nyamuk rentan (S_M), nyamuk laten (L_M), dan nyamuk terinfeksi (I_M), dengan total nyamuk $N_M = S_M + L_M + I_M$. Populasi telur nyamuk terdiri dari telur nyamuk sehat (S_E) dan terinfeksi (I_E), dengan total telur nyamuk $N_E = S_E + I_E$. Sistem persamaan diferensial untuk masing-masing kompartemen yaitu,



Gambar 1. Skema Penyebaran DBD Model Modifikasi

- Ket :
- \longrightarrow Perpindahan Individu
 - \dashrightarrow Pengaruh Antar Kompartemen
 - $\cdots \longrightarrow$ Produksi Telur

Persamaan diagram kompartemen di atas yaitu,

$$\begin{aligned} \frac{dS_H}{dt} &= r_H N_H \left(1 - \frac{N_H}{k_H}\right) - \left(ac_H \frac{I_M}{N_H} + \mu_H\right) S_H \\ \frac{dI_H}{dt} &= ac_H \frac{I_M}{N_H} S_H - (\alpha_H + \mu_H + \gamma_H) I_H \\ \frac{dR_H}{dt} &= \gamma_H I_H - \mu_H R_H \\ \frac{dS_M}{dt} &= PF(t) S_E - ac_M \frac{I_H}{N_H} S_M - \mu_M S_M \\ \frac{dL_M}{dt} &= ac_M \frac{I_H}{N_H} S_M - \gamma_M L_M - \mu_M L_M \\ \frac{dI_M}{dt} &= \gamma_M L_M - \mu_M I_M + PF(t) I_E \\ \frac{dS_E}{dt} &= (r_M S_M + (1-g)r_M I_M) \left(1 - \frac{(S_E + I_E)}{k_E}\right) \\ &\quad - \mu_E S_E - PF(t) S_E \\ \frac{dI_E}{dt} &= gr_M I_M \left(1 - \frac{(S_E + I_E)}{k_E}\right) \\ &\quad - (\mu_E + PF(t)) I_E \end{aligned} \quad (11)$$

Laju infeksi dari nyamuk terinfeksi ke manusia rentan adalah $\beta_H = mac_H$, dimana m rasio total populasi nyamuk terhadap total populasi manusia, selanjutnya β_H dikalikan dengan proporsi nyamuk terinfeksi sehingga laju perpindahan manusia rentan menjadi manusia terinfeksi adalah $ac_H I_M / N_H$. Laju infeksi dari manusia terinfeksi ke nyamuk rentan adalah $\beta_M = ac_M$, kemudian β_M dikalikan dengan total manusia terinfeksi sehingga laju perpindahan nyamuk rentan menjadi nyamuk laten adalah $ac_M I_H / N_H$. Faktor suhu yang digunakan dalam penetasan telur nyamuk sehat dan telur nyamuk terinfeksi yaitu,

$$F(t) = (c - d \sin(2\pi ft + \varphi)) \quad (12)$$

Untuk menghindari persamaan (12) bernilai negatif maka digunakan fungsi Heaviside, dimana fungsi Heaviside bernilai 0 dan 1, dengan memisalkan,

$$w = c - d \sin(2\pi ft + \varphi) \quad (13)$$

maka

$$\theta(w) = \begin{cases} 1; & \text{jika } w \geq 0 \\ 0; & \text{jika } w < 0 \end{cases} \quad (14)$$

Persamaan (12) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$F(t) = (c - d \sin(2\pi ft + \varphi))\theta(w) \quad (15)$$

Untuk mempermudah analisis pada persamaan (11), dilakukan penyederhanaan dengan membuat perbandingan masing-masing subpopulasi terhadap total populasi, yaitu

$$S_h = \frac{S_H}{N_H}; I_h = \frac{I_H}{N_H}; R_h = \frac{R_H}{N_H}; S_m = \frac{S_M}{N_M}; L_m = \frac{L_M}{N_M}; I_m = \frac{I_M}{N_M}; S_e = \frac{S_E}{N_E}; I_e = \frac{I_E}{N_E} \quad (16)$$

dengan,

$$S_h + I_h + R_h = 1, S_m + L_m + I_m = 1, \text{ dan } S_e + I_e = 1$$

Dengan menurunkan persamaan (16) diperoleh

$$\frac{dS_h}{dt} = \frac{1}{N_H} \left[\frac{dS_H}{dt} - \frac{dN_H}{dt} \right] \text{ dan } \frac{dI_h}{dt} = \frac{1}{N_H} \left[\frac{dI_H}{dt} - \frac{dN_H}{dt} \right].$$

Hal yang sama berlaku untuk variabel-variabel lain sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial baru delapan dimensi yang terdiri dari dua dimensi untuk variabel populasi manusia (S_h, I_h), dua dimensi untuk variabel populasi nyamuk (L_m, I_m), satu dimensi untuk variabel populasi telur nyamuk (I_e), dan tiga dimensi untuk variabel total populasi (N_H, N_M, N_E).

$$\begin{aligned} \frac{dS_h}{dt} &= r_H \left(1 - \frac{N_H}{k_H}\right) - \left(ac_H \frac{N_M}{N_H} I_m + r_H \left(1 - \frac{N_H}{k_H}\right) - \alpha_H I_h\right) S_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= ac_H \frac{N_M}{N_H} I_m S_h - \left(\alpha_H + \gamma_H + r_H \left(1 - \frac{N_H}{k_H}\right)\right) I_h + \alpha_H I_h^2 \\ \frac{dL_m}{dt} &= ac_M I_h (1 - L_m - I_m) - \left(\gamma_M + PF(t) \frac{N_E}{N_M}\right) L_m \\ \frac{dI_m}{dt} &= \gamma_M L_m + PF(t) \frac{N_E}{N_M} (I_e - I_m) \\ \frac{dI_e}{dt} &= \left(\frac{N_M}{N_E}\right) (g r_M I_m) - \left(\frac{N_M}{N_E}\right) (r_M S_m + r_M I_m) \left(-\frac{N_E}{k_E}\right) I_e \\ \frac{dN_H}{dt} &= r_H N_H \left(1 - \frac{N_H}{k_H}\right) - \alpha_H I_h N_H - \mu_H N_H \\ \frac{dN_M}{dt} &= PF(t) N_E - \mu_M N_M \\ \frac{dN_E}{dt} &= r_M \left(1 - \frac{N_E}{k_E}\right) (1 - L_m - I_m) - r_M \left(1 - \frac{N_E}{k_E}\right) I_m - (\mu_E + PF(t)) N_E \end{aligned} \quad (17)$$

Tabel 1 Parameter pada model modifikasi

Parameter	Keterangan	Dimensi
c_H	Peluang infeksi dari nyamuk ke manusia	Tanpa Dimensi
c_M	Peluang infeksi dari manusia ke nyamuk	Tanpa Dimensi
α_H	Kematian manusia disebabkan penyakit	Waktu ⁻¹
γ_H	Laju pemulihan manusia	Waktu ⁻¹
γ_M	Laju perpindahan nyamuk laten menjadi nyamuk terinfeksi	Waktu ⁻¹
μ_H	Kematian manusia secara alami	Waktu ⁻¹
μ_M	Kematian nyamuk secara alami	Waktu ⁻¹
μ_E	Kematian telur nyamuk secara alami	Waktu ⁻¹
r_H	Laju kelahiran manusia	Waktu ⁻¹
k_H	Daya dukung lingkungan pada populasi manusia	Tanpa Dimensi
α	Rata-rata tingkat gigitan nyamuk	Waktu ⁻¹
P	Laju penetasan telur sehat dan terinfeksi	Waktu ⁻¹
g	Proporsi telur yang terinfeksi	Tanpa Dimensi
r_M	Laju nyamuk bertelur	Waktu ⁻¹
k_E	Daya dukung lingkungan pada populasi telur nyamuk	Tanpa Dimensi
c	Faktor modulasi musiman	Tanpa Dimensi
d	Faktor modulasi musiman	Tanpa Dimensi
f	Frekuensi dalam siklus musiman	Waktu ⁻¹

Sumber : [6], [1]

B. Penentuan Titik Tetap

Persamaan yang digunakan untuk menentukan titik tetap adalah persamaan (6). Penentuan titik tetap berdasarkan [3]. Titik tetap yang diperoleh ada dua titik tetap yaitu, titik tetap tanpa penyakit dan titik tetap ada penyakit,

$$T_0(S_h, I_h, L_m, I_m, I_e, N_H, N_M, N_E)$$

$$S_h = 1; I_h = L_m = I_m = I_e = 0; N_H = k_H - \frac{k_H \mu_H}{r_H}$$

$$N_M = F(t) k_E P \left(\frac{1}{\mu_M} - \frac{1}{r_M} \right) - \frac{(k_E - \mu_E)}{r_M}$$

$$N_E = \left(\frac{\mu_M}{F(t)r_M P} \right) \left(\frac{F(t) k_E P r_M}{\mu_M} - F(t) k_E - k_E \mu_E \right)$$

$$T_1(S_h^*, I_h^*, L_m^*, I_m^*, I_e^*, N_H^*, N_M^*, N_E^*)$$

$$S_h^* = \frac{(k_H - N_H)N_H r_H}{a c_H I_m k_H N_M - N_H(N_H r_H - k_H r_H + k_H I_h \alpha_H)}$$

$$I_h^* = - \frac{N_H^2 r_H - k_H N_H B + \sqrt{L}}{2 k_H N_H \alpha_H}$$

$$L_m^* = - \frac{a c_M I_h N_M + F(t) N_E P + N_M \gamma_M}{a c_M I_h N_M + F(t) N_E P + N_M \gamma_M}$$

$$I_m^* = I_e + \frac{L_m N_M \gamma_M}{F(t) N_E P}; I_e^* = \frac{g I_m}{1 - L_m}$$

$$N_H^* = \frac{k_H(r_H - I_h \alpha_H - \mu_H)}{r_H}; N_M^* = \frac{F(t) N_E P}{\mu_M}$$

$$N_E^* = \frac{k_E(1 - L_m) N_M r_M}{F(t) k_E P + N_M(r_M - L_m r_M) + k_E \mu_E}$$

dengan

$$B = r_H + \alpha_H + \gamma_H$$

$$F(t) = (c - d \sin(2\pi f t + \varphi)) \theta(w)$$

$$L = N_H(-4a c_H I_m k_H^2 N_M \alpha_H + N_H(N_H r_H - k_H B)^2)$$

C. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar dinotasikan \mathcal{R}_0 . Menurut [2], jika $\mathcal{R}_0 < 1$ berarti tidak terjadi endemik dan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ berarti terjadi endemik pada populasi. Penentuan bilangan reproduksi dasar digunakan *the next generation matriks G*. *the next generation matriks G* didefinisikan:

$$G = FV^{-1} [5].$$

dengan F merupakan matriks dari koefisien laju infeksi, sedangkan V matriks dari

koefisien laju pergerakan penyakit, baik kematian maupun kesembuhan.

Adapun sistem persamaan diferensial yang digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar yaitu

$$\frac{dI_h}{dt} = a c_H \frac{N_M}{N_H} I_m S_h - \left(\alpha_H + \gamma_H + r_H \left(1 - \frac{N_H}{k_H} \right) \right) I_h$$

$$+ \alpha_H I_h^2$$

$$\frac{dL_m}{dt} = a c_M I_h (1 - L_m - I_m) - \left(\gamma_M + PF(t) \frac{N_E}{N_M} \right) L_m$$

$$\frac{dI_m}{dt} = \gamma_M L_m + PF(t) \frac{N_E}{N_M} (I_e - I_m)$$

$$\frac{dI_e}{dt} = \left(\frac{N_M}{N_E} \right) (g r_M I_m) \left(1 - \frac{N_E}{k_E} \right) - \left(\frac{N_M}{N_E} \right) (r_M S_m + r_M I_m) \left(1 - \frac{N_E}{k_E} \right) I_e$$

Sistem persamaan (18) dikonstruksi dalam bentuk matrik yang dievaluasi pada titik tetap tanpa penyakit, sehingga diperoleh matriks $K = FV^{-1}$. Selanjutnya ditentukan nilai eigen matriks K , yaitu $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$. $\mathcal{R}_0 = \text{Max}\{\lambda_i\}, i = 1, 2, \dots, n$ disebut bilangan reproduksi dasar.

Berdasarkan sistem persamaan (18) dan analisis yang dilakukan diperoleh bilangan reproduksi dasarnya yaitu,

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{a^2 c_H c_M k_E r_H \gamma_M (\mu_E \mu_M + F(t) P (\mu_M - r_M))}{(g-1) k_H r_M (r_H - \mu_H) (\alpha_H + \mu_H + \gamma_H) \mu_M^2 (\gamma_M + \mu_M)}} \quad (19)$$

D. Simulasi Dinamika Populasi Penyebaran DBD

Simulasi dinamika populasi dilakukan untuk kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$, dengan \mathcal{R}_0 merupakan bilangan reproduksi dasar (persamaan 19). Simulasi ini dilakukan untuk menunjukkan bahwa sistem akan stabil menuju titik tetap tanpa penyakit saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan stabil menuju titik tetap ada penyakit saat $\mathcal{R}_0 > 1$. Selain itu, simulasi juga diperlukan untuk melihat pengaruh laju kematian nyamuk (μ_M) terhadap laju penyebaran penyakit dalam populasi.

Nilai-nilai parameter yang digunakan untuk simulasi terdapat pada Tabel 2 di bawah ini, dengan nilai awal adalah $S_H = 10, I_H = 15, R_H = 75, S_M = 50, L_M = 30$

$I_M = 20$, $S_E = 50$, $I_e = 50$, dan total masing-masing populasi $N_H = N_M = N_E = 100$.

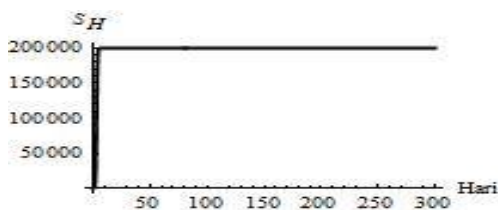
Tabel 2 Nilai parameter Model Modifikasi

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
c_H	1	k_H	2×10^5
c_M	1	P	0.15
α_H	0.001	g	0.1
γ_H	0.25	r_M	50
γ_M	0.143	k_E	10^6
μ_H	4×10^{-5}	f	2.8×10^{-3}
μ_E	0.1	c	0.07
r_H	2.5	d	0.06
φ	$\pi/2$		

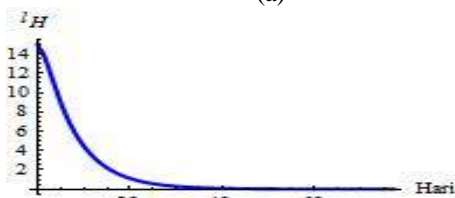
Sumber : [6], [1]

1) **Dinamika Populasi untuk Kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$**

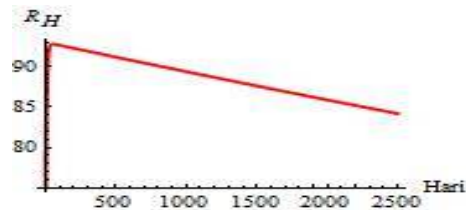
Gambar 2, 3, dan 4 di bawah ini menunjukkan kestabilan tiap populasi, baik populasi manusia, nyamuk maupun telur nyamuk untuk kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$. Berdasarkan nilai-nilai parameter yang terdapat pada Tabel 2 dengan mengambil nilai $\mu_M = 1$ dan $a = 0.146$, diperoleh gambar dinamika populasi sebagai berikut.



(a)



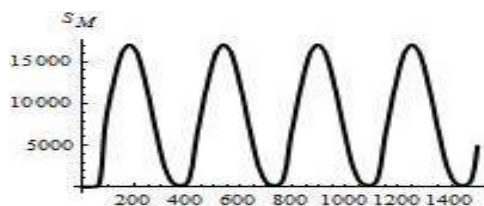
(b)



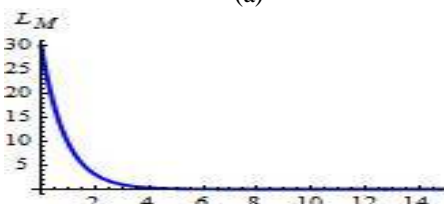
(c)

Gambar 2. Dinamika populasi manusia untuk kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$

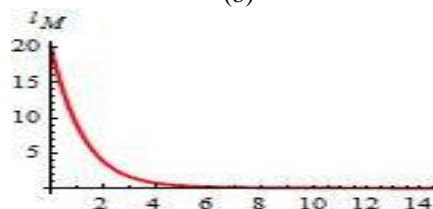
Dinamika populasi manusia rentan (S_H) meningkat dari nilai awal kemudian stabil di sekitar titik $S_h = 1$ atau sekitar 199997 orang. Populasi manusia terinfeksi (I_H) menurun dari nilai awal kemudian stabil di $I_h = 0$, populsi manusia sembuh (R_H) meningkat dari nilai awal kemudian menurun dan stabil di titik $R_h = 1 - S_h - I_h = 1 - 1 - 0 = 0$.



(a)



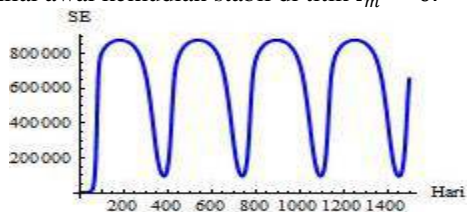
(b)



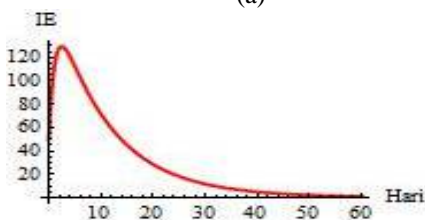
(c)

Gambar 3. Dinamika populasi nyamuk untuk kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$

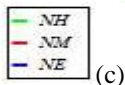
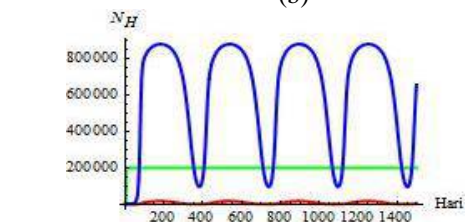
Dinamika populasi nyamuk rentan (S_M) beresilasi menuju nilai yang periodik, populasi nyamuk laten (L_M) menurun dari nilai awal kemudian stabil di titik $L_m = 0$, populasi nyamuk terinfeksi (I_M) menurun dari nilai awal kemudian stabil di titik $I_m = 0$.



(a)



(b)



(c)

Gambar 4. Dinamika populasi telur nyamuk dan total masing-masing populasi untuk kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$

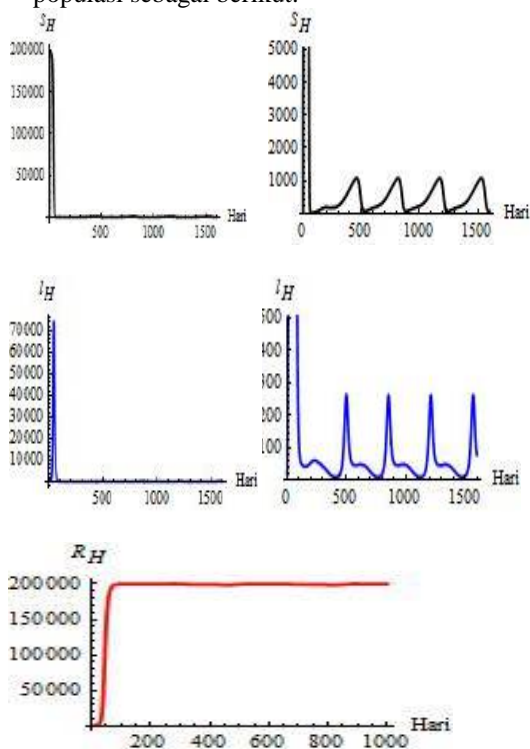
Dinamika populasi telur nyamuk rentan (S_E) beresilasi menuju nilai yang periodik, populasi telur nyamuk terinfeksi (I_E) menurun dari nilai awal kemudian stabil di titik $I_e = 0$.

Dinamika total populasi manusia (N_H) meningkat dari nilai awal kemudian stabil di sekitar titik $N_H = 199997$, total populasi nyamuk (N_M) beresilasi menuju nilai yang periodik, sedangkan total populasi telur nyamuk (N_E) beresilasi menuju nilai yang periodik. Berdasarkan simulasi yang

dilakukan dapat dikatakan bahwa titik tetap tanpa penyakit stabil untuk kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$.

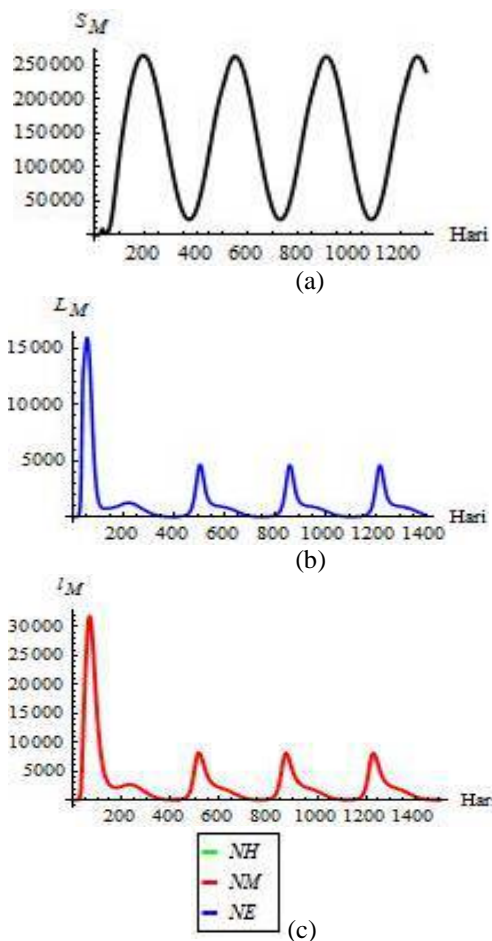
2) Dinamika Populasi untuk Kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$

Gambar 5, 6, dan 7 di bawah ini menunjukkan kestabilan tiap populasi, baik populasi manusia, nyamuk maupun telur nyamuk untuk kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$. Berdasarkan nilai-nilai parameter yang terdapat pada Tabel 2 dengan mengambil nilai $\mu_M = 0.071$ dan $a = 3.7$, diperoleh gambar dinamika populasi sebagai berikut.



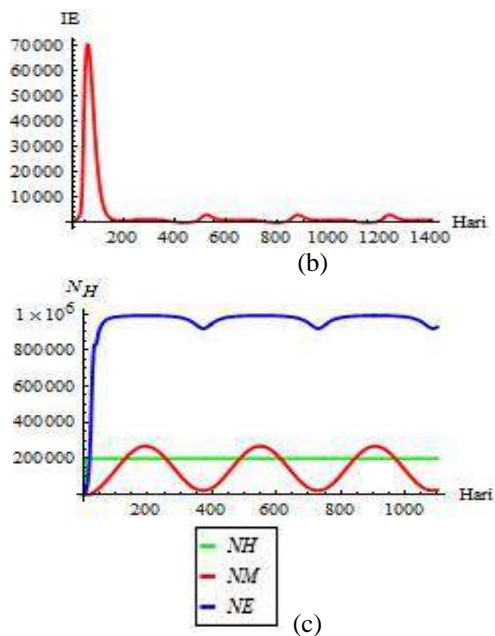
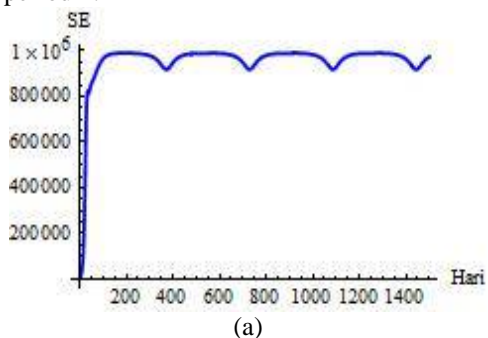
Gambar 5. Dinamika populasi manusia untuk kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$

Dinamika populasi manusia rentan (S_H) meningkat dari nilai awal kemudian menurun dan beresilasi menuju nilai yang periodik, populasi manusia terinfeksi (I_H) meningkat dari nilai awal kemudian menurun dan akhirnya beresilasi menuju nilai yang periodik, populasi manusia sembuh (R_H) meningkat dari nilai awal kemudian beresilasi menuju nilai yang periodik.



Gambar 6. Dinamika populasi nyamuk untuk kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$

Dinamika populasi nyamuk rentan (S_M) beresilasi menuju nilai yang periodik, populasi nyamuk laten (L_M) beresilasi menuju nilai yang periodik, populasi nyamuk terinfeksi (I_M) beresilasi menuju nilai yang periodik.



Gambar 7. Dinamika populasi telur nyamuk dan total masing-masing populasi untuk kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$

Dinamika populasi telur nyamuk rentan (S_E) beresilasi menuju nilai yang periodik, populasi telur nyamuk terinfeksi (I_E) beresilasi menuju nilai yang periodik.

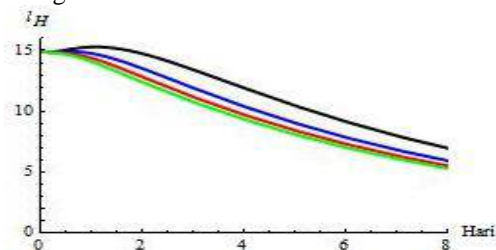
Dinamika total populasi manusia (N_H) meningkat dari nilai awal kemudian menurun dan meningkat kembali, sehingga pada akhirnya beresilasi menuju nilai yang periodik, total populasi nyamuk (N_M) dan total populasi telur nyamuk (N_E) beresilasi menuju nilai yang periodik.

E. Simulasi Laju Kematian Nyamuk (μ_M)

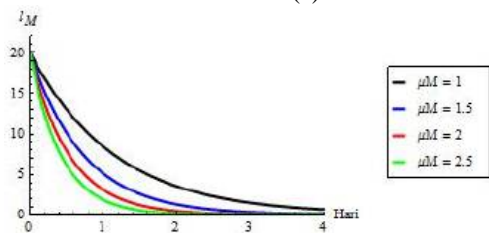
Simulasi ini diperlukan untuk melihat pengaruh laju kematian nyamuk (μ_M) terhadap penyebaran penyakit dalam populasi. Selain itu, akan ditunjukkan bahwa peningkatan atau penurunan nilai parameter laju kematian nyamuk dapat menurunkan nilai bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) yang didefinisikan pada persamaan (19). Terdapat 4 nilai μ_M yang diambil pada interval [1, 2.5] dengan langkah 0.5. Nilai-nilai parameter lain terdapat pada Tabel 2 dengan

mengambil parameter rata-rata gigitan nyamuk yaitu $a = 3.7$.

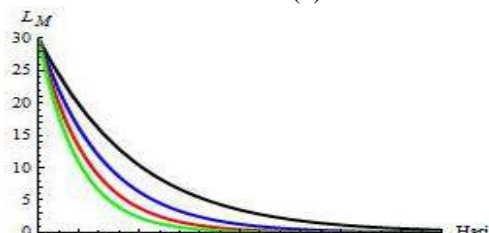
Gambar 8 di bawah ini menunjukkan perubahan nilai bilangan reproduksi dasar untuk kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$ dan perubahan jumlah tiap populasi, baik manusia, nyamuk maupun telur nyamuk jika laju kematian nyamuk ditingkatkan.



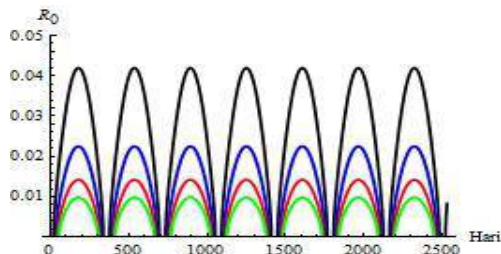
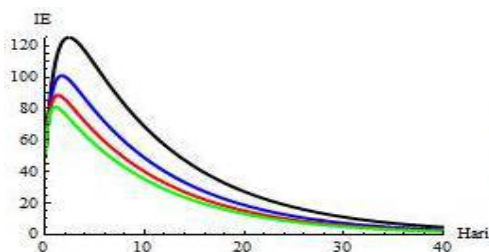
(a)



(b)



(c)



Gambar 8. Dinamika populasi manusia, nyamuk, telur nyamuk, dan bilangan reproduksi dasar untuk kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$ dengan parameter μ_M ditingkatkan

Peningkatan laju kematian nyamuk memberi pengaruh terhadap populasi manusia terinfeksi, nyamuk laten, nyamuk terinfeksi, telur nyamuk terinfeksi dan bilangan reproduksi dasar.

Pengaruh yang terjadi pada populasi manusia terinfeksi nyamuk laten, nyamuk terinfeksi dan telur nyamuk terinfeksi yaitu jumlah masing-masing populasi tersebut berkurang. Hal ini sesuai dengan bilangan reproduksi dasar, dimana dengan menurunnya dilangan reproduksi dasar menyebabkan jumlah populasi terinfeksi berkurang.

IV. KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang dilakukan terhadap model modifikasi dapat disimpulkan bahwa,

1. Titik tetap yang diperoleh ada dua yaitu titik tetap tanpa penyakit dan titik tetap ada penyakit.
2. Titik tetap tanpa penyakit stabil untuk kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$, sedangkan titik tetap ada penyakit stabil untuk kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$.
3. Dengan adanya peningkatan laju kematian nyamuk, menyebabkan bilangan reproduksi dasar menurun, akibatnya jumlah populasi terinfeksi berkurang,

sehingga dapat membantu menekan laju penyebaran penyakit dalam populasi.

B. Saran

Penelitian ini perlu dilanjutkan khususnya dengan melibatkan telur nyamuk sehat dan terinfeksi yang diproduksi oleh nyamuk laten.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Amaku M, Coutinho FA, da Silva DR, Lopez LF, Burattini MN, Massad E. A Comparative Analysis of the Relative Efficacy of Vektor-Control Strategies Against Dengue Fever. *Biomedical*. Sao Paulo. Cidade University.
- [2] Brauer F, Van den Driessche P, Wu J. 2008. *Mathematical Epidemiology*. Berlin: Springer
- [3] Edelstein-Keshet L. 2005. *Mathematical Models in Biology*. New York. Random House
- [4] Helmersson J. 2012. *Mathematical Modeling of Dengue Temperature Effect on Vektorial Capacity*. Journal: Europa. Umea University
- [5] Jones JH. 2007. *Note on \mathcal{R}_0* . Department of Anthropological Sciences Stanford University
- [6] Massad E, Coutinho FA, Lopez LF, da Silva DR. 2011. Modeling the Impact of Global Warming on Vektor-Borne Infections, Physics of Life Reviews. *Bulletin of Mathematical Biology*. Jun;8(2):169-99