

# ESTIMASI PARAMETER DAN UJI GOODNESS OF FIT UNTUK DATA BINER BERPASANGAN

Ummi Maryam<sup>1)</sup>, Wayan Somayasa<sup>1)</sup>, Ruslan<sup>1)</sup>, La Gubu<sup>1)</sup> dan Jufra<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia

E-mail: [ummimaryam303@gmail.com](mailto:ummimaryam303@gmail.com)

## ABSTRAK

Tujuan penelitian ini adalah menunjukkan estimasi parameter dan uji goodness of fit untuk data biner berpasangan. Estimasi parameter dilakukan menggunakan metode estimasi maksimum likelihood. Data biner dari organ berpasangan diperoleh dengan melakukan pengukuran dari bagian tubuh yang berpasangan atau dari subjek yang sama pada dua titik waktu yang berbeda. Dengan asumsi  $Z_{ijk}$  adalah hasil pengukuran bagian tubuh ke  $-k$  dari bagian tubuh yang berpasangan dari subjek ke  $-i$  dan kelompok ke  $-j$ .  $Z_{ijk}$  dapat bernilai 0 atau 1 (biner).  $Z_{ijk} = 1$  jika bagian tubuh ke  $-k$  dari bagian tubuh yang berpasangan dari subjek ke  $-i$  dan kelompok ke  $-j$  menunjukkan respond dan  $Z_{ijk} = 0$  jika sebaliknya. Adapun model yang digunakan untuk menggambarkan hasil pengukuran organ berpasangan yaitu model Rosner (1982) dan model Dallal (1988). Rosner (1982) mengusulkan suatu konstanta yang memperhitungkan intra korelasi bagian tubuh yang dipasangkan. Rosner (1982) menyatakan bahwa  $P(Z_{ijk} = 1 | Z_{ij(3-k)} = 1) = R\lambda_j$  untuk beberapa konstanta positif  $R$ . Jika  $R = 1$  maka bagian tubuh yang dipasangkan independen, jika  $R\lambda_j = 1$  maka bagian tubuh yang dipasangkan saling dependen. Dallal (1988) mengkritik asumsi Rosner (1982) karena  $R\lambda_j$  tidak dapat mendekati 1 untuk semua kelompok kecuali nilai  $\lambda$  hampir sama. Dallal (1988) mengasumsikan  $P(Z_{ijk} = 1 | Z_{ij(3-k)} = 1) = \gamma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, G$ ). Selanjutnya dilakukan pengaplikasian model Rosner (1982) dan model Dallal (1988) terhadap data pasien scleroderma dimana MRSS (Modified Rodnan Skin Score) digunakan sebagai alat ukur ketebalan kulit yang telah divalidasi oleh American Collage of Rheumatologist. Dari kedua model kemudian dilakukan uji goodness of fit untuk mengetahui alokasi probabilitas kedua model. Selanjutnya dilakukan pemilihan model terbaik menggunakan metode Akaike's Criterion Information (AIC).

**Kata Kunci:** Goodness of Fit, Data Biner Berpasangan, Model Rosner, Model Dallal, AIC.

## ABSTRACT

The purpose of this research is to show the parameter estimation and goodness of fit test for paired binary data. Parameter estimation was carried out used the maximum likelihood estimation method. Binary data from paired organs were obtained by doing measurement from paired body parts or from the same subject at two different time points. Assuming  $Z_{ijk}$  is the result of measurement of the body part to  $-k$  from the paired body parts of subject to  $-i$  and group to  $-j$ .  $Z_{ijk}$  can be 0 or 1 (binary).  $Z_{ijk} = 1$  if the body part to  $-k$  from the paired body parts of subject to  $-i$  and group to  $-j$  show response and  $Z_{ijk} = 0$  if otherwise. The models used to describe the results of paired organ measurements are the Rosner model (1982) and the Dallal model (1988). Rosner (1982) proposed a constant that takes into account the intracorrelation of paired body parts. Rosner (1982) stated that  $P(Z_{ijk} = 1 | Z_{ij(3-k)} = 1) = R\lambda_j$  for some positive constants  $R$ . If  $R = 1$  then the paired body parts are independent, if  $R\lambda_j = 1$  then the paired body parts are mutually dependent. Dallal (1988) criticized Rosner's (1982) assumption because  $R\lambda_j$  it cannot be approximated 1 for all groups unless the  $\lambda$  score is nearly equal. Dallal (1988) assumes  $P(Z_{ijk} = 1 | Z_{ij(3-k)} = 1) = \gamma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, G$ ). Furthermore, the Rosner model (1982) and the Dallal model (1988) were applied to the data of scleroderma patients where MRSS (Modified Rodnan Skin Score) was used as a skin thickness measurement tool which was validated by the American College of Rheumatologist. From the two models, a goodness of fit test was then carried out to determine the probability allocation of the two models. Next, the best model was selected using the Akaike's Criterion Information (AIC) method.

**Keywords:** Goodness of Fit, Paired Binary Data, Rosner Model, Dallal Model, AIC.

### 1. Pendahuluan

Dalam percobaan yang bertujuan menyelidiki perilaku penyakit rematik sering kali seorang penyidik melakukan pengukuran dari bagian tubuh

yang berpasangan pada pasien atau hanya pada dua titik waktu yang berbeda dari subjek yang sama. Misalnya, ahli reumatologi memeriksa tangan kiri dan kanan, lengan kiri dan kanan, kaki kiri dan kanan

dan lain – lain dari pasien artritis reumatoid selama pemeriksaan fisik lengkap. Dalam setiap kasus, pengukuran menghasilkan respons biner. Ketika data dipasangkan, model statistik untuk menganalisis data tersebut harus memperhitungkan kemungkinan korelasi (Tang et al., 2010).

Dalam banyak penelitian tentang penyakit rematik, data biasanya diamati pada bagian tubuh yang berpasangan. Misalnya, ketika ahli reumatologi memantau perkembangan penyakit pada sklerosis sistemik, dilakukan penilaian terhadap penebalan kulit pada kedua kaki kiri dan kanan, jari, lengan bawah dan atas, paha, dan tangan. Masing – masing bagian tubuh ini diberi skor 0,1,2, dan 3. Dimana 0 untuk normal, 1 untuk ringan, 2 untuk sedang, dan 3 untuk berat. Postlethwaites dkk (2008), melakukan uji coba untuk pasien Skleroderma dimana pasien diacak ke salah satu dari dua kelompok dan menggunakan MRSS (Modified Rodnan Skin Score) sebagai alat ukur. Tang dkk (2010) menggunakan data rematik dari percobaan Postlethwaites dkk (2008) sebagai kasus ilustratif dan MRSS kaki kiri dan kanan sebagai contoh pasangan bagian tubuh dengan asumsi  $Z_{ijk}$  adalah hasil pengukuran yang ditunjukkan oleh bagian ke  $-k$  dari bagian tubuh berpasangan pada pasien ke  $-i$  dari kelompok ke  $-j$ .  $Z_{ijk} = 1$  jika kaki ke  $-k$  untuk pasien ke  $-i$  dari kelompok perlakuan ke  $-j$  menunjukkan tanggapan dan  $Z_{ijk} = 0$  untuk sebaliknya (Tang et al., 2010).

MRSS adalah skor agregat dari semua bagian berpasangan kaki kiri dan kanan, jari, lengan bawah dan atas, paha, dan tangan, ditambah pengukuran dari dada, wajah, dan perut, yang merupakan hasil yang divalidasi dari American College of Rheumatologists dan biasanya digunakan untuk menilai perkembangan penyakit (Pei et al., 2014).

Terdapat beberapa model statistik yang sering dipakai untuk menggambarkan hasil pengukuran organ berpasangan. Diantaranya model Rosner dan model Dallal (Tang dkk, 2010). Rosner bekerja dengan satu set data oftamologi dan mengusulkan suatu konstanta yang memperhitungkan intra korelasi antara mata yang dipasangkan. Rosner (1982) berasumsi bahwa probabilitas respons di satu sisi sebanding dengan respons di sisi lain. Namun, asumsi koefisien proporsi yang sama dalam model Rosner tidak selalu tepat. Secara khusus, Dallal (1988) menunjukkan bahwa model Rosner pasti akan berkinerja buruk seperti yang dinilai oleh kriteria goodness of fit jika karakteristik hampir pasti terjadi

secara bilateral dengan prevalensi spesifik kelompok yang sangat bervariasi. Dallal (1988) kemudian mengusulkan bahwa probabilitas respons di satu sisi menjadi konstan. Namun, model Dallal masih memiliki batasan tersendiri (Tang et al., 2010).

Dalam praktek, nilai parameter dalam distribusi tidak diketahui. Estimasi parameter dilakukan menggunakan sampel. Salah satu metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter adalah metode maximum likelihood. Penduga maksimum likelihood adalah sebuah nilai parameter yang memaksimalkan fungsi likelihood berdasarkan sampel. Fungsi likelihood merupakan probabilitas yang didefinisikan sebagai fungsi dari parameter (Nugraha, 2013).

Uji goodness of fit dari model statistik menggambarkan seberapa cocok model tersebut terhadap serangkaian pengamatan. Indeks goodness of fit meringkas perbedaan antara nilai yang diamati dan nilai yang diharapkan dalam model statistik. Statistik goodness of fit adalah indeks goodness of fit dengan distribusi sampling yang diketahui, biasanya diperoleh dengan menggunakan metode asimtotik yang digunakan dalam pengujian hipotesis statistik (Maydeu-olivares & Forero, 2010).

Karena kesulitan yang disebabkan oleh probabilitas kecil yang diharapkan untuk mendapatkan akurasi  $p$ -value untuk statistik goodness of fit yang menilai model, beberapa peneliti hanya menggunakan indeks goodness of fit. Salah satu indeks goodness of fit yang sering digunakan yaitu Akaike's Information Criterion (AIC). AIC tidak digunakan untuk menguji model dalam arti pengujian hipotesis, tetapi untuk pemilihan model. Dengan adanya kumpulan data, peneliti memilih AIC, dan menghitungnya untuk semua model yang dipertimbangkan. Kemudian, model dengan indeks terendah dipilih (Maydeu-olivares & Forero, 2010).

Pada bagian pertama akan membahas model Rosner, model Dallal, uji goodness of fit, dan Akaike's Information Criterion. Bab 3 akan membahas hasil estimasi parameter model Rosner, model Dallal, uji goodness of fit, dan aplikasi model Rosner dan model Dallal pada data pasien Skleroderma. Bab 4 akan membahas kesimpulan dan pemilihan model terbaik berdasarkan hasil yang diperoleh pada Bab 3.

## 2. Kajian Pustaka

### 2.1 Data Biner dari Organ Berpasangan

Data dari organ berpasangan muncul secara alami setiap kali seseorang melakukan pengukuran dari subjek yang sama dari dua titik waktu yang berbeda. Misalnya, ahli reumatologi memeriksa tangan kiri dan kanan, lengan kiri dan kanan, dan lain – lain dari pasien selama pemeriksaan lengkap. Misalkan  $Z_{ijk}$  adalah hasil pengukuran yang ditunjukkan oleh bagian ke  $-k$  dari bagian tubuh berpasangan pada pasien ke  $-i$  dari kelompok ke  $-j$ . Variabel  $Z_{ijk}$  dapat menghasilkan dua kemungkinan nilai yaitu  $Z_{ijk} = 1$  atau  $Z_{ijk} = 0$  dimana  $Z_{ijk} = 1$  jika hasil pengukuran terhadap bagian ke  $-k$  dari bagian tubuh berpasangan yang diamati pada pasien ke  $-i$  dari kelompok ke  $-j$  menunjukkan respon, dan  $Z_{ijk} = 0$  jika hasil pengukuran terhadap bagian ke  $-k$  dari bagian tubuh berpasangan yang diamati pada pasien ke  $-i$  dari kelompok ke  $-j$  tidak menunjukkan respon. Jadi,  $Z_{ijk}$  adalah variabel biner, dimana diasumsikan bahwa:

$$P\{Z_{ijk} = 1\} = \lambda_j; \quad 0 \leq \lambda_j \leq 1$$

$$P\{Z_{ijk} = 0\} = 1 - \lambda_j$$

$i = 1, 2, \dots, m_j; j = 1, 2; k = 1, 2$ , dimana  $m_j$  adalah banyaknya pasien dari kelompok ke  $-j$  (Tang et al., 2010).

Misalkan  $X$  adalah jenis treatment dan  $Y$  adalah tipe respon MRSS yang dapat berupa 0,1 dan 2. Maka hasil eksperimen dapat disusun dalam suatu tabel kontingensi.

**Tabel 2. 1** Struktur Data Bagian yang Berpasangan dengan Dua Jenis Treatment

Y	X		Total
	1	2	
0	$m_{01}(p_{01})$	$m_{02}(p_{02})$	$m_{0+}$
1	$m_{11}(p_{11})$	$m_{12}(p_{12})$	$m_{1+}$
2	$m_{21}(p_{21})$	$m_{22}(p_{22})$	$m_{2+}$
Total	$m_{+1}$	$m_{+2}$	$m_{++}$

Maka  $X$  mengikuti distribusi multinomial, dimana:

$$f(m_{01}, m_{11}, m_{21}) = \frac{m_{+1}!}{m_{01}! m_{11}! m_{21}!} p_{01}^{m_{01}} p_{11}^{m_{11}} p_{21}^{m_{21}}$$

$$f(m_{02}, m_{12}, m_{22}) = \frac{m_{+2}!}{m_{02}! m_{12}! m_{22}!} p_{02}^{m_{02}} p_{12}^{m_{12}} p_{22}^{m_{22}}$$

Rosner (1982) mengasumsikan bahwa  $P(Z_{ijk} = 1 | Z_{ij(3-k)} = 1) = R\lambda_j$  untuk suatu konstanta positif  $R$ . Jika  $R = 1$  maka diperoleh model independen (saling bebas), jika  $R\lambda_j = 1$  maka diperoleh model yang tidak saling bebas.

Berdasarkan probabilitas untuk pasien dengan dengan tipe MRSS  $i$  dari kelompok treatment ke  $-j$  pada model Rosner yang diasumsikan bahwa bagian tubuh yang dipasangkan bersifat saling bebas (independen) maka  $p_{ij}$  pada Tabel 2.1 adalah

$$p_{01} = \lambda_1^2, p_{11} = 2\lambda_1(1 - \lambda_1), p_{21} = (1 - \lambda_1)^2$$

$$p_{02} = \lambda_2^2, p_{12} = 2\lambda_2(1 - \lambda_2), p_{22} = (1 - \lambda_2)^2$$

maka fungsi log likelihood untuk  $p_{ij}$  adalah

$$L(p_{01}, p_{11}, p_{21}, p_{02}, p_{12}, p_{22})$$

$$= f(m_{01}, m_{11}, m_{21}) \cdot f(m_{02}, m_{12}, m_{22})$$

$$= \frac{m_{+1}!}{m_{01}! m_{11}! m_{21}!} p_{01}^{m_{01}} p_{11}^{m_{11}} p_{21}^{m_{21}} \cdot \frac{m_{+2}!}{m_{02}! m_{12}! m_{22}!}$$

$$p_{02}^{m_{02}} p_{12}^{m_{12}} p_{22}^{m_{22}}$$

### 2.2 Model Rosner

Studi oftamologi sering membandingkan beberapa kelompok subjek untuk ada atau tidak adanya beberapa temuan okular, dimana setiap subjek dapat menyumbangkan dua mata untuk analisis, nilai dari kedua mata sangat berkorelasi. Rosner (1982) dan Dallal (1988) mengusulkan prosedur untuk menguji apakah proporsi mata yang terkena, sama diantara kelompok yang berbeda, dengan memperhitungkan korelasi intrasubjek.

Jumlah subjek dalam kelompok ke- $j$  :  $m_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, G$ )

Jumlah total subjek dalam penelitian, masing – masing menyumbangkan satu atau dua mata untuk di analisis :  $N = \sum_{j=1}^G m_j$

$Z_{ijk} = 1$ , jika hasil pengukuran terhadap bagian ke  $-k$  dari bagian tubuh berpasangan yang diamati pada pasien ke  $-i$  dari kelompok ke  $-j$  menunjukkan respon ( $j = 1, 2, \dots, G$ ), dan  $Z_{ijk} = 0$  jika hasil pengukuran terhadap bagian ke  $-k$  dari bagian tubuh berpasangan yang diamati pada pasien ke  $-i$  dari kelompok ke  $-j$  tidak menunjukkan respon.

Rosner (1982) mengusulkan suatu konstanta yang memperhitungkan intra korelasi bagian tubuh yang dipasangkan. Rosner (1982) menyatakan bahwa

$P(Z_{ijk} = 1 | Z_{ij(3-k)} = 1) = R\lambda_j$  untuk beberapa konstanta positif  $R$ . Jika  $R = 1$ , maka bagian tubuh yang dipasangkan sepenuhnya independen,  $R\lambda_j = 1$ , maka saling bergantung (dependen),  $m_{ij}$  = jumlah orang – orang dalam kelompok ke  $-j$  dengan mata yang terdapat temuan okular ( $i = 0, 1, 2; j =$

$1, 2, \dots, G$ ),  $m_j = \sum_{i=0}^G m_{ij}$ . Rosner (1982) memperkirakan jumlah efektif mata perorang sebagai berikut:

$$\hat{e} = \frac{2\hat{\lambda}(1 - \hat{\lambda})}{\hat{\lambda}(1 - \hat{\lambda}) + (\hat{R} - 1)\hat{\lambda}^2}$$

Dimana:

$$\hat{\lambda} = \frac{\frac{1}{2} \sum (m_{i1} + 2m_{i2})}{N}, \hat{R} = \frac{4N \sum m_{i2}}{(\sum m_{i1} + 2 \sum m_{i2})^2}$$

adalah MLE  $\lambda$  dan  $R$  masing – masing dibawah  $H_0$ . Uji hipotesis  $H_0$  menggunakan Distribusi Chi-Square dengan derajat bebas  $G-1$

$$T = \left[ \frac{\hat{e}}{\hat{\lambda}(1 - \hat{\lambda})} \right] \sum m_i (\hat{\lambda}_j - \hat{\lambda})^2$$

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\frac{1}{2}(m_{i1} + 2m_{i2})}{m_j} \text{ (Donner, 1989).}$$

Ruang parameter untuk model Rosner  $\Omega_R = \{(\lambda_1, \lambda_2, R): 0 < R \leq \frac{1}{a} \text{ jika } a \leq \frac{1}{2}; (2 - \frac{1}{a}) / a \leq R \leq \frac{1}{a} \text{ jika } a > \frac{1}{2}, \text{ dimana } a = \max(\lambda_1, \lambda_2)\}$ . Jika  $a = 1$ , maka  $R = 1$  direduksi menjadi model independen. Misalkan akan digunakan dua jenis treatment, dimana  $X$  adalah jenis treatment dan  $Y$  adalah tipe respon MRSS yang dapat berupa 0,1 dan 2.

Berdasarkan probabilitas untuk pasien dengan dengan tipe MRSS  $i$  dari kelompok treatment ke  $-j$  pada model Rosner yang diasumsikan bahwa bagian tubuh yang dipasangkan bersifat tidak saling bebas (dependen) maka  $p_{ij}$  pada Tabel 2.1 adalah

$$p_{01} = R\lambda_1^2, p_{11} = 2\lambda_1(1 - R\lambda_1), p_{21} = 1 + R\lambda_1^2 - 2\lambda_1, p_{02} = R\lambda_2^2, p_{12} = 2\lambda_2(1 - R\lambda_2), p_{22} = 1 + R\lambda_2^2 - 2\lambda_2$$

### 2.3 Model Dallal

Asumsi dasar dibalik model Rosner (1982) adalah probabilitas respon disatu sisi sebanding dengan respon disisi lain. Dallal (1988) mengkritik asumsi ini menunjukkan bahwa model Rosner pasti akan berkinerja buruk seperti yang dinilai oleh kriteria goodness of fit jika karakteristik hampir pasti terjadi secara bilateral dengan spesifik kelompok yang bervariasi luas, karena  $R\lambda_j$  tidak dapat mendekati 1 untuk semua  $j$  kecuali  $\lambda$  dari mereka hampir sama. Misalkan sebaliknya bahwa probabilitas disatu sisi tidak sebanding dengan respon disisi lain, didefinisikan:  $P(Z_{ijk} = 1 | Z_{ij(3-k)} = 1) = \gamma_j (j = 1, 2, \dots, G)$ . Dallal (1988) kemudian mengusulkan berdasarkan urutan model berikut.

Model 1 :  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_G; \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_G = \gamma$

Model 2 :  $\lambda_r \neq \lambda_s$  untuk setidaknya satu pasang (r,s);  $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_G = \gamma$

Model 3 :  $\lambda_r \neq \lambda_s$  untuk setidaknya satu pasang (r,s);  $\gamma_c \neq \gamma_d$  untuk setidaknya satu pasang (c,d)

Nilai – nilai yang diharapkan dari frekuensi  $m_{ij}$  memiliki MLE diberikan oleh:

$$\text{Model 1 : } E_{ij} = \frac{m_{i+}m_{+j}}{m_{++}}$$

$$\text{Model 2 : } E_{0j} = m_{0j}$$

$$E_{1j} = \frac{(m_{1j} + m_{2j})(m_{+1})}{m_{+1} + m_{+2}}$$

$$E_{2j} = \frac{(m_{1j} + m_{2j})(m_{+2})}{m_{+1} + m_{+2}}$$

$$\text{Model 3 : } E_{ij} = m_{ij}$$

Pengujian  $H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_G$  setara dengan menguji apakah proporsi individu yang tidak terpengaruh sama dalam semua kelompok, mengingat rasio konstan dari kejadian unilateral terhadap kejadian bilateral, diberi rasio  $\gamma$  oleh karena itu, tes yang diinginkan dapat diperoleh dengan membandingkan model 1 vs model 2 dengan statistik rasio likelihood. Dallal menunjukkan bahwa statistik ini diberikan oleh:

$$D = 2 \sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^G m_{ij} \log_e \left( \frac{E_{ij}^{(1)}}{E_{ij}^{(2)}} \right)$$

Dimana  $D$  menggunakan distribusi Chi-Square dengan  $G-1$  derajat bebas. Model 3 tidak secara langsung relevan dengan  $H_0$ , tetapi berguna untuk menguji hipotesis yang menarik lainnya (Donner, 1989).

Diasumsikan  $P(Z_{ijk} = 1 | Z_{ij(3-k)} = 1) = \gamma$ . Ruang parameter untuk model Dallal  $\Omega_D = \{(\lambda_1, \lambda_2, \gamma): 0 \leq \gamma \leq 1 \text{ jika } a \leq \frac{1}{2}; \frac{2-1}{a} \leq \gamma \leq 1 \text{ jika } a > \frac{1}{2}, \text{ dimana } a = \max(\lambda_1, \lambda_2)\}$ . Misalkan akan digunakan dua jenis treatment, dimana  $X$  adalah jenis treatment dan  $Y$  adalah tipe respon MRSS yang dapat berupa 0,1 dan 2.

Berdasarkan probabilitas untuk pasien dengan dengan tipe MRSS  $i$  dari kelompok treatment ke  $-j$  pada model Dallal maka  $p_{ij}$  pada Tabel 2.1 adalah  $p_{01} = \gamma\lambda_1, p_{11} = 2(1 - \gamma)\lambda_1, p_{21} = 1 - (2 - \gamma)\lambda_1$   $p_{02} = \gamma\lambda_2, p_{12} = 2(1 - \gamma)\lambda_2, p_{22} = 1 - (2 - \gamma)\lambda_2$

### 2.4 Uji Chi Square

Uji Chi-Square digunakan untuk mengetahui apakah ada korelasi antar variabel nonnumerik yang sering digunakan dalam studi statistik (Kothari,2007). Dilambangkan dengan  $\chi^2$ . Signifikansi nilai Chi Square ditentukan dengan menggunakan derajat kebebasan dan derajat signifikansi yang sesuai dengan tabel Chi Square (Moore,1994). Dua tujuan khusus uji Chi Square adalah untuk menguji hipotesis bahwa tidak ada

korelasi antara dua atau lebih kelompok, populasi atau kriteria, dan untuk menguji sejauh mana distribusi data yang diamati cocok dengan distribusi yang diharapkan (Turhan, 2020).

Uji Chi-Square digunakan untuk menguji independensi di dua variabel kategori atau untuk menilai seberapa baik sampel sesuai dengan distribusi populasi yang diketahui (goodness of fit). Uji Chi-Square dalam keluarga Karl Pearson uji goodness of fit, independensi, dan homogenitas pada dasarnya menggunakan rumus yang sama. Masing – masing dari ketiga uji ini, berbeda hipotesis, interpretasi, dan opsi tertentu setelah penolakan hipotesis nol. Rumus untuk menghitung statistik uji adalah sebagai berikut.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Dimana  $n$  adalah jumlah sel dalam tabel. Perbedaan utama pada masing – masing dari tiga uji Chi Square berkaitan dengan situasi yang tepat untuk masing – masing uji digunakan. Uji Goodness of fit Chi Square digunakan ketika sampel dibandingkan pada variabel yang diinginkan terhadap populasi dengan parameter yang diketahui. Interpretasi atas penolakan  $H_0$  adalah bahwa sampel berbeda secara signifikan dari populasi pada variabel yang diamati. Uji independensi Chi Square menentukan apakah dua variabel kategori dalam satu sampel independen atau terkait satu sama lain. Uji homogenitas Chi Square digunakan untuk menentukan apakah dua atau lebih sampel independen berbeda dalam distribusinya satu sama lain (Franke et al., 2012).

Mutai (2000), mengemukakan bahwa uji goodness of fit membandingkan data yang diperoleh secara empiris dengan hasil yang diharapkan secara teoritis (frekuensi yang diharapkan). Dalam analisis data, diperlukan untuk menentukan derajat bebas ( $df$ ), jumlah frekuensi yang diharapkan, statistik uji dan  $p$ -value yang terkait dengan statistik uji (Turhan, 2020).

$$df = k - 1$$

$k$  = jumlah kategori data sampel

Statistik uji goodness of fit Chi-Square dihitung menggunakan rumus :

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^j \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$E_i = np_i$$

Dengan  $O_i$  =Jumlah frekuensi yang diamati untuk tingkat ke- $i$  dari variabel kategori

$E_i$  =Jumlah frekuensi yang diharapkan untuk tingkat ke- $i$  dari variabel kategori.

Adapun hipotesis uji goodness of fit Chi-Square

$H_0$ : Tidak ada perbedaan antara frekuensi pengamatan dengan frekuensi yang diharapkan.

$H_1$ : Ada perbedaan antara frekuensi pengamatan dengan frekuensi yang diharapkan.

Uji Chi-Square sering dinamakan goodness of fit test tetapi sebenarnya yang di uji adalah badness of fit test, karena besarnya nilai Chi-Square mengindikasikan ketidaksesuaian antar frekuensi observasi dan frekuensi harapan (Nugraha, 2013).

## 2.5 Akaike's Information Criterion (AIC)

Pemilihan model mengacu pada menggunakan data untuk memilih satu model dari daftar model yang tersedia. Pada dasarnya ini melibatkan penggunaan kriteria pemilihan model untuk menemukan model yang paling sesuai dengan data. Pemilihan model menggunakan kriteria informasi telah dikembangkan untuk meringkas bukti data yang mendukung model. Secara khusus, teknik kriteria informasi menekankan meminimalkan jumlah informasi yang dibutuhkan untuk mengekspresikan data dan model. Ini menghasilkan pemilihan model yang merupakan representasi data yang efisien.

Salah satu kriteria informasi yang paling umum digunakan adalah AIC. Ide dari AIC (Akaike, 1973) adalah untuk memilih model yang meminimalkan negative likelihood dengan jumlah parameter. AIC bertujuan untuk menemukan model aproksimasi terbaik untuk proses pembangkitan data sebenarnya yang tidak diketahui.

$$AIC = -2 \ln(L) + 2p$$

Dimana  $L$  mengacu pada likelihood dibawah model yang dipasang dan  $p$  adalah jumlah parameter dalam model (De & Acquah, 2010).

Model yang terbaik adalah model dengan nilai AIC terkecil. Kriteria AIC digunakan untuk membandingkan dan menentukan model pemasangan terbaik (Tang et al., 2010).

## 2.6 Modified Rodnan Skin Score (MRSS)

Modified Rodnan skin score (MRSS) atau Skor kulit Rodnan yang dimodifikasi adalah ukuran ketebalan kulit dan digunakan sebagai ukuran hasil primer atau sekunder dalam uji klinis sklerosis sistemik (SSc, skleroderma).

Secara umum ketebalan kulit cenderung meningkat pada dcSSc awal dan menurun pada dcSSc akhir, meskipun waktu keterlibatan puncak biasanya 12-18 bulan setelah timbulnya penebalan kulit. DCSSc “awal” sering didefinisikan sebagai periode peningkatan cepat indurasi (“penebalan”) kulit.

Pengukuran ketebalan kulit digunakan sebagai pengganti aktivitas penyakit, keparahan dan kematian pada pasien dengan dcSSc. Pada awal dcSSc, peningkatan penebalan kulit umumnya dikaitkan dengan keterlibatan organ internal yang baru atau memburuk dan peningkatan mortalitas. Memburuknya MRSS dikaitkan dengan

kematian yang lebih tinggi, dan hasil ginjal dan jantung negatif. Keterlibatan atau perburukan organ internal terutama terkait dengan lintasan penebalan kulit sebelumnya, dan tingkat perkembangan ketebalan kulit yang lebih tinggi merupakan prediksi keterlibatan organ internal dan kematian.

Pasien yang tidak pernah mencapai skor kulit yang tinggi memiliki frekuensi komplikasi berbasis organ utama yang lebih rendah, dan mereka yang memiliki skor kulit tinggi yang gagal membaik dalam 3 tahun penyakit memiliki angka kematian yang lebih tinggi secara signifikan. Sebaliknya, pelemahan skor kulit puncak atau peningkatan dikaitkan dengan hasil yang menguntungkan, termasuk kelangsungan hidup yang lebih baik (Khanna et al., 2017).

### 3. Hasil dan Pembahasan

#### 3.1 Estimasi Maksimum Likelihood pada Model Rosner

Ruang parameter untuk model Rosner  $\Omega_R = \{(\lambda_1, \lambda_2, R): 0 < R \leq \frac{1}{\alpha} \text{ jika } \alpha \leq \frac{1}{2}; (2 - \frac{1}{\alpha}), \alpha \leq R \leq \frac{1}{\alpha} \text{ jika } \alpha > \frac{1}{2}, \text{ dimana } \alpha = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}\}$ . Jika  $\alpha = 1$ , maka  $R = 1$  direduksi menjadi model independensi. Misalkan akan digunakan dua jenis treatment, dimana  $X$  adalah jenis treatment dan  $Y$  adalah tipe respon MRSS yang dapat berupa 0,1 dan 2.

Berdasarkan probabilitas untuk pasien dengan dengan tipe MRSS  $i$  dari kelompok treatment ke  $-j$  pada model Rosner yang diasumsikan bahwa bagian tubuh yang dipasangkan bersifat tidak saling bebas (dependen) maka  $p_{ij}$  pada Tabel 2.1 adalah  $p_{01} = R\lambda_1^2, p_{11} = 2\lambda_1(1 - R\lambda_1), p_{21} = 1 + R\lambda_1^2 - 2\lambda_1$   
 $p_{02} = R\lambda_2^2, p_{12} = 2\lambda_2(1 - R\lambda_2), p_{22} = 1 + R\lambda_2^2 - 2\lambda_2$

maka fungsi log likelihood untuk  $p_{ij}$  adalah

$$\ln L(\lambda_1, \lambda_2, R) = m_{01} \ln(R\lambda_1^2) + m_{11} \ln(2\lambda_1(1 - R\lambda_1)) + m_{21} \ln(1 + R\lambda_1^2 - 2\lambda_1) + m_{02} \ln(R\lambda_2^2) + m_{12} \ln(2\lambda_2(1 - R\lambda_2)) + m_{22} \ln(1 + R\lambda_2^2 - 2\lambda_2)$$

Turunan parsial pertama terhadap  $\lambda_1$  adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda_1, \lambda_2, R)}{\partial \lambda_1} = \frac{2m_{01} + m_{11}}{\lambda_1} - \frac{m_{11}R}{(1 - R\lambda_1)} + \frac{2m_{21}(R\lambda_1 - 1)}{1 + R\lambda_1^2 - 2\lambda_1} \dots \dots \dots (3)$$

Turunan parsial pertama terhadap  $\lambda_2$  adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda_1, \lambda_2, R)}{\partial \lambda_2} = \frac{2m_{02} + m_{12}}{\lambda_2} - \frac{m_{12}R}{(1 - R\lambda_2)} + \frac{2m_{22}(R\lambda_2 - 1)}{1 + R\lambda_2^2 - 2\lambda_2} \dots \dots \dots (4)$$

Turunan parsial pertama terhadap  $R$  adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda_1, \lambda_2, R)}{\partial R} = \frac{m_{01} + m_{02}}{R} - \frac{m_{11}\lambda_1}{(1 - R\lambda_1)} - \frac{m_{12}\lambda_2}{(1 - R\lambda_2)} + \frac{m_{21}\lambda_1^2}{1 + R\lambda_1^2 - 2\lambda_1} + \frac{m_{22}\lambda_2^2}{1 + R\lambda_2^2 - 2\lambda_2} \dots (5)$$

Berdasarkan persamaan (3), (4) dan (5) menunjukkan bahwa turunan pertama fungsi log likelihood terhadap masing – masing parameter menghasilkan bentuk tidak linear, oleh karena itu tidak dapat dianalisis secara analitik, untuk mendapatkan hasil yang eksplisit sehingga harus diiterasikan dengan menggunakan metode numerik yaitu metode Newton-Raphson untuk mendapatkan estimasi parameter. Persamaan iterasi Newton-Raphson adalah sebagai berikut.

$$\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i - \left[ \left( H(\hat{\theta}_i) \right)^{-1} \cdot g(\hat{\theta}_i) \right]$$

Selanjutnya menentukan nilai awal yaitu  $\lambda_1 = 0,9, \lambda_2 = 0,9$ , dan  $R = 0,8$ . Kemudian menentukan toleransi error sebesar 0,05 dan iterasi maksimum yaitu 100 iterasi. Hasil *run* program Newton Raphson akan ditampilkan pada gambar berikut.

```
> penduga(0.9, 0.9, 0.8)
      [,1]
[1,] 0.8788312
[2,] 0.8733324
[3,] 1.1027437
[1] 4
      [,1]
[1,] 0.040322475
[2,] -0.006230790
[3,] -0.007637236
```

**Gambar 3.1** Hasil *Run* Program Newton Raphson Model Rosner

Berdasarkan gambar 4.1 program telah memenuhi kondisi pada iterasi ke 4 dimana diperoleh nilai dugaan  $\hat{\lambda}_1 = 0,87883, \hat{\lambda}_2 = 0,87333$  dan  $\hat{R} = 1,10274$ .

#### 3.2 Estimasi Maksimum Likelihood pada Model Dallal

Diasumsikan  $P(Z_{ijk} = 1 | Z_{ij(3-k)} = 1) = \gamma$ .

Ruang parameter untuk model Dallal  $\Omega_D = \{(\lambda_1, \lambda_2, \gamma): 0 \leq \gamma \leq 1 \text{ jika } \alpha \leq \frac{1}{2}; \frac{2-\gamma}{\alpha} \leq \gamma \leq 1 \text{ jika } \alpha > \frac{1}{2}, \text{ dimana } \alpha = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}\}$ . Misalkan akan digunakan dua jenis treatment, dimana  $X$  adalah jenis treatment dan  $Y$  adalah tipe respon MRSS yang dapat berupa 0,1 dan 2.

Berdasarkan probabilitas untuk pasien dengan dengan tipe MRSS  $i$  dari kelompok treatment ke  $-j$  pada model Dallal maka  $p_{ij}$  pada Tabel 2.1 adalah

$p_{01} = \gamma\lambda_1, p_{11} = 2(1 - \gamma)\lambda_1, p_{21} = 1 - (2 - \gamma)\lambda_1$   
 $p_{02} = \gamma\lambda_2, p_{12} = 2(1 - \gamma)\lambda_2, p_{22} = 1 - (2 - \gamma)\lambda_2$   
 maka fungsi log likelihood untuk  $p_{ij}$  adalah

$$\ln L(\lambda_1, \lambda_2, \gamma) = m_{01} \ln(\gamma\lambda_1) + m_{11} \ln(2(1 - \gamma)\lambda_1) + m_{21} \ln(1 - (2 - \gamma)\lambda_1) + m_{02} \ln(\gamma\lambda_2) + m_{12} \ln(2(1 - \gamma)\lambda_2) + m_{22} \ln(1 - (2 - \gamma)\lambda_2)$$

Turunan parsial pertama terhadap  $\lambda_1$  adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda_1, \lambda_2, \gamma)}{\partial \lambda_1} = \frac{m_{01} + m_{11}}{\lambda_1} - \frac{m_{21}(2 - \gamma)}{1 - (2 - \gamma)\lambda_1} \dots \dots (6)$$

Turunan parsial pertama terhadap  $\lambda_2$  adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda_1, \lambda_2, \gamma)}{\partial \lambda_2} = \frac{m_{02} + m_{12}}{\lambda_2} - \frac{m_{22}(2 - \gamma)}{1 - (2 - \gamma)\lambda_2} \dots \dots (7)$$

Turunan parsial pertama terhadap  $\gamma$  adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda_1, \lambda_2, \gamma)}{\partial \gamma} = \frac{m_{01} + m_{02}}{\gamma} - \frac{m_{11} + m_{12}}{(1 - \gamma)} + \frac{m_{21}\lambda_1}{1 - (2 - \gamma)\lambda_1} + \frac{m_{22}\lambda_2}{1 - (2 - \gamma)\lambda_2} \dots \dots (8)$$

Jika disederhanakan  $\lambda_1 \times (6) + \lambda_2 \times (7) + (2 - \gamma) \times (8)$  akan diperoleh:

$$\hat{\gamma} = \frac{2(m_{01} + m_{02})}{2(m_{01} + m_{02}) + (m_{11} + m_{12})} = \frac{2m_{0+}}{2m_{0+} + m_{1+}}$$

Substitusi  $\hat{\gamma}$  ke persamaan (6) sehingga diperoleh:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{(m_{01} + m_{11})(2m_{0+} + m_{1+})}{2m_{+1}(m_{0+} + m_{1+})}$$

Substitusi  $\hat{\gamma}$  ke persamaan (7) sehingga diperoleh:

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{(m_{02} + m_{12})(2m_{0+} + m_{1+})}{2m_{+2}(m_{0+} + m_{1+})}$$

### 3.3 Pemilihan Model Terbaik Berdasarkan Akaike's Information Criterion (AIC)

Salah satu kriteria informasi yang paling umum digunakan adalah AIC. Ide dari AIC (Akaike, 1973) adalah untuk memilih model yang meminimalkan negative likelihood penalized dengan jumlah parameter. AIC bertujuan untuk menemukan model aproksimasi terbaik untuk proses pembangkitan data sebenarnya yang tidak diketahui.

$$AIC = -2 \ln(L) + 2p$$

Dimana  $L$  mengacu pada likelihood dibawah model yang dipasang dan  $p$  adalah jumlah parameter dalam model (De & Acquah, 2010).

- Model Rosner

$$AIC = -2 \ln(L) + 2p = 2p - 2 \ln(L) = 2p - 2(m_{01} \ln(R\lambda_1^2) + m_{11} \ln(2\lambda_1(1 - R\lambda_1)) + m_{21} \ln(1 + R\lambda_1^2 - 2\lambda_1) + m_{02} \ln(R\lambda_2^2) + m_{12} \ln(2\lambda_2(1 - R\lambda_2)) + m_{22} \ln(1 + R\lambda_2^2 - 2\lambda_2))$$

$$+ m_{12} \ln(2\lambda_2(1 - R\lambda_2)) + m_{22} \ln(1 + R\lambda_2^2 - 2\lambda_2))$$

- Model Dallal

$$AIC = -2 \ln(L) + 2p = 2p - 2 \ln(L) = 2p - 2(m_{01} \ln(\gamma\lambda_1) + m_{11} \ln(2(1 - \gamma)\lambda_1) + m_{21} \ln(1 - (2 - \gamma)\lambda_1) + m_{02} \ln(\gamma\lambda_2) + m_{12} \ln(2(1 - \gamma)\lambda_2) + m_{22} \ln(1 - (2 - \gamma)\lambda_2))$$

### 3.4 Aplikasi Estimasi Parameter dan Uji Goodness of Fit

Data yang digunakan adalah data sekunder yaitu data kualitatif Pasien Skleroderma fase awal dan fase akhir yang MRSS tangan berkurang 2 atau 3 unit atau 0 pada bulan ke 15. Data tersebut diperoleh dari jurnal Statistics in Medicine "Testing Homogeneity of Proportion Ratios for Stratified Correlated Bilateral Data in Two-Arm Randomized Clinical Trials" (Pei et al., 2014).

**Tabel 3. 1** Data Pasien Scleroderma Fase Awal

Tipe MRSS	Jenis Treatment		Total
	Collagen	Placebo	
0	20	23	43
1	2	3	5
2	5	4	9
Total	27	30	57

**Tabel 3. 2** Data Pasien Scleroderma Fase Akhir

Tipe MRSS	Jenis Treatment		Total
	Collagen	Placebo	
0	9	22	31
1	3	2	5
2	3	2	5
Total	15	26	41

#### 3.4.1 Uji Homogenitas

Uji homogenitas dilakukan ketika sampel independen yang terdiri dari dua atau lebih kelompok sampel (sebagai baris dalam tabel kontingensi) dikategorisasikan kedalam satu dimensi yang terdiri dari dua atau lebih sub kategori (sebagai kolom dalam tabel kontingensi). Dengan demikian uji homogenitas digunakan untuk mengetahui homogenitas sampel berdasarkan proporsi kategorisasi menurut dimensinya. Bila data homogen maka proporsi observasi pada dimensi yang ditetapkan akan sama pada seluruh kelompok sampel (Heryana, 2020).

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

$$E_{ij} = \frac{(O_i)(O_j)}{n}$$

- Fase Awal

$H_0: p_{01} = p_{02}$  ;probabilitas untuk jenis treatment collagen sama dengan placebo

$H_1: p_{01} \neq p_{02}$  ; probabilitas untuk jenis treatment collagen tidak sama dengan placebo

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = 0,36353$$

$$df = (b - 1)(k - 1) = (3 - 1)(2 - 1) = 2$$

$$\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$$

Karena nilai  $\chi^2$  hitung = 0,36353 <  $\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$  maka tidak tolak  $H_0$  sehingga  $p_{01} = p_{02}$  atau probabilitas untuk jenis treatment collagen sama dengan placebo.

- Fase Akhir

$H_0: p_{01} = p_{02}$  ;probabilitas untuk jenis treatment collagen sama dengan placebo

$H_1: p_{01} \neq p_{02}$  ; probabilitas untuk jenis treatment collagen tidak sama dengan placebo

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = 3,12536$$

$$df = (b - 1)(k - 1) = (3 - 1)(2 - 1) = 2$$

$$\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$$

Karena nilai  $\chi^2$  hitung = 3,12536 <  $\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$  maka tidak tolak  $H_0$  sehingga  $p_{01} = p_{02}$  atau probabilitas untuk jenis treatment collagen sama dengan placebo.

### 3.4.2 Uji Goodness of Fit

Salah satu metode yang paling umum berdasarkan goodness of fit adalah uji chi - square. Uji chi - square adalah teknik yang berguna untuk menguji apakah data observasi yang diperoleh cocok dengan distribusi yang dipilih (Cochran,1952). Perbedaan yang besar antara frekuensi yang diamati dengan frekuensi yang diharapkan menunjukkan pemasangan yang tidak cocok (Kesemen et al., 2018).

#### 3.4.2.1 Model Rosner

Adapun probabilitas untuk model Rosner sebagai berikut:

$$p_{01} = R\lambda_1^2, \quad p_{11} = 2\lambda_1(1 - R\lambda_1), \quad p_{21} = 1 + R\lambda_1^2 - 2\lambda_1$$

$$p_{02} = R\lambda_2^2, \quad p_{12} = 2\lambda_2(1 - R\lambda_2), \quad p_{22} = 1 + R\lambda_2^2 - 2\lambda_2$$

Dimana  $\lambda_1 = 0,87883$ ,  $\lambda_2 = 0,87333$ , dan  $R = 1,10274$

- Fase Awal

**Tabel 3. 3** Probabilitas Model Rosner Fase Awal Jenis Treatment Collagen

Type MRSS	Jenis Treatment Collagen
0	0,85169
1	0,05427
2	0,09404
Total	1

$H_0$ : Tidak ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment collagen dengan frekuensi jenis treatment collagen yang diharapkan.

$H_1$ : Ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment collagen dengan frekuensi jenis treatment collagen yang diharapkan.

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^2 \frac{(O_{i1} - E_{i1})^2}{E_{i1}} = 2,97053$$

$$df = k - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$$

Karena nilai  $\chi^2$  hitung = 2,97053 <  $\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$  maka tidak tolak  $H_0$  sehingga tidak ada perbedaan yang signifikan antara frekuensi pengamatan jenis treatment collagen dengan frekuensi jenis treatment collagen yang diharapkan.

**Tabel 3. 4** Probabilitas Model Rosner Fase Awal Jenis Treatment Placebo

Type MRSS	Jenis Treatment Placebo
0	0,84107
1	0,06452
2	0,09441
Total	1

$H_0$ : Tidak ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment placebo dengan frekuensi jenis treatment placebo yang diharapkan.

$H_1$ : Ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment placebo dengan frekuensi jenis treatment placebo yang diharapkan.

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^2 \frac{(O_{i1} - E_{i1})^2}{E_{i1}} = 1,26419$$

$$df = k - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$$

Karena nilai  $\chi^2$  hitung = 1,26419 <  $\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$  maka tidak tolak  $H_0$  sehingga tidak ada perbedaan yang signifikan antara frekuensi pengamatan jenis treatment placebo dengan frekuensi jenis treatment placebo yang diharapkan.

- Fase Akhir

**Tabel 3. 5** Probabilitas Model Rosner Fase Akhir Jenis Treatment Collagen

Tipe MRSS	Jenis Treatment Collagen
0	0,85169
1	0,05427
2	0,09404
Total	1

$H_0$ : Tidak ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment collagen dengan frekuensi jenis treatment collagen yang diharapkan.

$H_1$ : Ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment collagen dengan frekuensi jenis treatment collagen yang diharapkan.

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^2 \frac{(O_{i1} - E_{i1})^2}{E_{i1}} = 8,77643$$

$$df = k - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$$

Karena nilai  $\chi^2$  hitung = 8,77643 >  $\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$  maka tolak  $H_0$  sehingga ada perbedaan yang signifikan antara frekuensi pengamatan jenis treatment collagen dengan frekuensi jenis treatment collagen yang diharapkan.

**Tabel 3. 6** Probabilitas Model Rosner Fase Akhir Jenis Treatment Placebo

Tipe MRSS	Jenis Treatment Placebo
0	0,84107
1	0,06452
2	0,09441
Total	1

$H_0$ : Tidak ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment placebo dengan frekuensi jenis treatment placebo yang diharapkan.

$H_1$ : Ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment placebo dengan frekuensi jenis treatment placebo yang diharapkan.

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^2 \frac{(O_{i1} - E_{i1})^2}{E_{i1}} = 0,14700$$

$$df = k - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$$

Karena nilai  $\chi^2$  hitung = 0,14700 <  $\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$  maka tidak tolak  $H_0$  sehingga tidak ada perbedaan yang signifikan antara frekuensi pengamatan jenis treatment placebo dengan frekuensi jenis treatment placebo yang diharapkan.

### 3.4.2.2 Model Dallal

Adapun probabilitas untuk model Dallal sebagai berikut:

$$p_{0i} = \gamma\lambda_i, p_{1i} = 2(1 - \gamma)\lambda_i, p_{2i} = 1 - (2 - \gamma)\lambda_i$$

$$p_{01} = \gamma\lambda_1, p_{11} = 2(1 - \gamma)\lambda_1, p_{21} = 1 - (2 - \gamma)\lambda_1$$

$$p_{02} = \gamma\lambda_2, p_{12} = 2(1 - \gamma)\lambda_2, p_{22} = 1 - (2 - \gamma)\lambda_2$$

$$\gamma = \frac{2(m_{01} + m_{02}) + (m_{11} + m_{12})}{2(m_{01} + m_{02}) + (m_{11} + m_{12})}$$

$$\lambda_1 = \frac{(m_{01} + m_{11})(2m_{0+} + m_{1+})}{2m_{+1}(m_{0+} + m_{1+})}$$

$$\lambda_2 = \frac{(m_{02} + m_{12})(2m_{0+} + m_{1+})}{2m_{+2}(m_{0+} + m_{1+})}$$

- Fase Awal

**Tabel 3. 7** Probabilitas Model Dallal Fase Awal Jenis Treatment Collagen

Tipe MRSS	Jenis Treatment Collagen
0	0,72993
1	0,08448
2	0,18519
Total	1

$H_0$ : Tidak ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment collagen dengan frekuensi jenis treatment collagen yang diharapkan.

$H_1$ : Ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment collagen dengan frekuensi jenis treatment collagen yang diharapkan.

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^2 \frac{(O_{i1} - E_{i1})^2}{E_{i1}} = 0,04147$$

$$df = k - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$$

Karena nilai  $\chi^2$  hitung = 0,04147 <  $\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$  maka tidak tolak  $H_0$  sehingga tidak ada perbedaan yang signifikan antara frekuensi pengamatan jenis treatment collagen dengan frekuensi jenis treatment collagen yang diharapkan.

**Tabel 3. 8** Probabilitas Model Dallal Fase Awal Jenis Treatment Placebo

Tipe MRSS	Jenis Treatment Placebo
0	0,77639
1	0,09029
2	0,13332
Total	1

$H_0$ : Tidak ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment placebo dengan frekuensi jenis treatment placebo yang diharapkan.

$H_1$ : Ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment placebo dengan frekuensi jenis treatment placebo yang diharapkan.

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^2 \frac{(O_{i1} - E_{i1})^2}{E_{i1}} = 0,03498$$

$$df = k - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$$

Karena nilai  $\chi^2$  hitung = 0,03498 <  $\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$  maka tidak tolak  $H_0$  sehingga tidak ada perbedaan yang signifikan antara frekuensi pengamatan jenis treatment placebo dengan frekuensi jenis treatment placebo yang diharapkan.

- Fase Akhir

**Tabel 3. 9** Probabilitas Model Dallal Fase Akhir Jenis Treatment Collagen

Tipe MRSS	Jenis Treatment Collagen
0	0,68888
1	0,11110
2	0,20002
Total	1

$H_0$ : Tidak ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment collagen dengan frekuensi jenis treatment collagen yang diharapkan.

$H_1$ : Ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment collagen dengan frekuensi jenis treatment collagen yang diharapkan.

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^2 \frac{(O_{i1} - E_{i1})^2}{E_{i1}} = 1,23905$$

$$df = k - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$$

Karena nilai  $\chi^2$  hitung = 1,23905 <  $\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$  maka tidak tolak  $H_0$  sehingga tidak ada perbedaan yang signifikan antara frekuensi

pengamatan jenis treatment collagen dengan frekuensi jenis treatment collagen yang diharapkan.

**Tabel 4. 4** Probabilitas Model Dallal Fase Akhir Jenis Treatment Placebo

Tipe MRSS	Jenis Treatment Placebo
0	0,79486
1	0,12821
2	0,07693
Total	1

$H_0$ : Tidak ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment placebo dengan frekuensi jenis treatment placebo yang diharapkan.

$H_1$ : Ada perbedaan antara frekuensi pengamatan jenis treatment placebo dengan frekuensi jenis treatment placebo yang diharapkan.

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^2 \frac{(O_{i1} - E_{i1})^2}{E_{i1}} = 0,61948$$

$$df = k - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$$

Karena nilai  $\chi^2$  hitung = 0,61948 <  $\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$  maka tidak tolak  $H_0$  sehingga tidak ada perbedaan yang signifikan antara frekuensi pengamatan jenis treatment placebo dengan frekuensi jenis treatment placebo yang diharapkan.

### 3.4.3 Menghitung Nilai Akaike's Information Criterion (AIC)

#### 3.4.3.1 Model Rosner

$$AIC = -2 \ln(L) + 2p$$

$$= 2p - 2 \ln(L)$$

$$= 2p - 2 \ln(L)$$

$$= 2p - 2(m_{01} \ln(R\lambda_1^2))$$

$$+ m_{11} \ln(2\lambda_1(1 - R\lambda_1)) + m_{21} \ln(1 + R\lambda_1^2 - 2\lambda_1)$$

$$+ m_{02} \ln(R\lambda_2^2)$$

$$+ m_{12} \ln(2\lambda_2(1 - R\lambda_2)) + m_{22} \ln(1 + R\lambda_2^2 - 2\lambda_2))$$

- Fase Awal  
 $AIC = 91,00400$

- Fase Akhir  
 $AIC = 68,57570$

#### 3.4.3.2 Model Dallal

$$AIC = -2 \ln(L) + 2p$$

$$= 2p - 2 \ln(L)$$

$$= 2p - 2(m_{01} \ln(\gamma\lambda_1))$$

$$+ m_{11} \ln(2(1 - \gamma)\lambda_1) + m_{21} \ln(1 - (2 - \gamma)\lambda_1)$$

$$+m_{02} \ln(\gamma\lambda_2) \\ +m_{12} \ln(2(1-\gamma)\lambda_2) \\ +m_{22} \ln(1-(2-\gamma)\lambda_2))$$

- Fase Awal  
 $AIC = 87,51300$

- Fase Akhir  
 $AIC = 64,1225$

#### 4. Penutup

##### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan Pembahasan pada bagian 3, hal-hal yang dapat disimpulkan adalah sebagai berikut:

1. Estimasi parameter untuk model Rosner dan model Dallal pada data biner dari organ berpasangan dapat dilakukan dengan menggunakan metode maksimum likelihood, tetapi untuk model Rosner menghasilkan turunan yang non linear sehingga diperlukan penyelesaian menggunakan metode Newton-Raphson. Estimasi parameter untuk model Rosner diterapkan terhadap data pasien Skleroderma fase awal dan fase akhir yang diperoleh dari jurnal *Statistics in Medicine "Testing Homogeneity of Proportion Ratios for Stratified Correlated Bilateral Data in Two-Arm Randomized Clinical Trials"* (Pei et al., 2014), fase awal dan fase akhir menghasilkan nilai estimasi  $\hat{\lambda}_1 = 0,87883$ ,  $\hat{\lambda}_2 = 0,87333$  dan  $\hat{R} = 1,10274$ . Sedangkan model Dallal, fase awal dan fase akhir menghasilkan nilai estimasi sebagai berikut.

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{(m_{01} + m_{11})(2m_{0+} + m_{1+})}{2m_{+1}(m_{0+} + m_{1+})}$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{(m_{02} + m_{12})(2m_{0+} + m_{1+})}{2m_{+2}(m_{0+} + m_{1+})}$$

$$\text{dan } \hat{\gamma} = \frac{2m_{0+}}{2m_{0+} + m_{1+}}$$

Fase awal :  $\hat{\lambda}_1 = 0,77237$ ,  $\hat{\lambda}_2 = 0,82153$ , dan  $\hat{\gamma} = 0,94505$

Fase akhir :  $\hat{\lambda}_1 = 0,74444$ ,  $\hat{\lambda}_2 = 0,85897$ , dan  $\hat{\gamma} = 0,92537$

2. Pemilihan model terbaik berdasarkan Akaike's Information Criterion (AIC) untuk model Rosner dan model Dallal terhadap pasien Skleroderma fase awal dan fase akhir menghasilkan nilai AIC sebagai berikut. Untuk model Rosner fase awal:  $AIC = 91,00400$  dan fase akhir:  $AIC = 68,57570$ . Sedangkan untuk model Dallal menghasilkan nilai AIC fase awal:  $AIC = 81,51300$  dan fase akhir:  $AIC = 64,12250$ . Pemilihan model dilakukan dengan menghitung nilai AIC kedua model kemudian memilih model

dengan nilai AIC terkecil. Berdasarkan hasil perhitungan, nilai AIC model Dallal fase awal dan fase akhir lebih kecil dari model Rosner fase awal dan fase akhir. Sehingga dapat disimpulkan model Dallal adalah model terbaik untuk data biner organ berpasangan.

3. Uji goodness of fit untuk model Rosner dan model Dallal untuk fase awal dan akhir pada tingkat signifikansi  $\alpha = 5\%$ . Model Rosner diperoleh hasil  $\chi^2$  hitung fase awal adalah 1,26419 dan akhir adalah 0,14700 jenis treatment placebo dan fase awal adalah 2,97053 dan akhir adalah 8,77643 jenis treatment collagen, sedangkan  $\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$  sehingga tidak tolak  $H_0$ , maka untuk jenis treatment placebo fase awal dan fase akhir sudah cukup baik karena tidak ada perbedaan antara frekuensi pengamatan dengan frekuensi yang diharapkan, sedangkan untuk jenis treatment collagen pada fase akhir tolak  $H_0$ , sehingga tidak cukup baik karena terdapat perbedaan antara frekuensi pengamatan dengan frekuensi yang diharapkan. Model Dallal diperoleh hasil  $\chi^2$  hitung fase awal adalah 0,03498 dan akhir adalah 0,61948 jenis treatment placebo dan fase awal adalah 0,04147 dan akhir adalah 1,23905 jenis treatment collagen, sedangkan  $\chi^2_{(0,05;2)} = 5,99100$  sehingga tidak tolak  $H_0$ , maka fase awal dan akhir jenis treatment collagen dan placebo sudah cukup baik karena tidak ada perbedaan antara frekuensi pengamatan dengan frekuensi yang diharapkan sehingga dari kedua model jenis treatment yang terbaik adalah placebo. Pemilihan model dilakukan dengan menghitung nilai AIC kedua model. Berdasarkan hasil perhitungan nilai AIC dan uji goodness of fit model yang terbaik yaitu model Dallal.

#### 4.2 Saran

Pada penelitian ini penulis menunjukkan estimasi parameter model Rosner dan model Dallal untuk data biner berpasangan, dan diperoleh hasil akhir dengan model Dallal sebagai model terbaik, maka untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan agar peneliti dapat menunjukkan estimasi parameter untuk gabungan model Rosner dan model Dallal pada data biner berpasangan, dengan menggunakan toleransi error sekecil mungkin.

**Ucapan Terimakasih.** Penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah berkontribusi dalam penelitian ini.

## Daftar Pustaka

- De, H., & Acquah, G. (2010). Comparison of Akaike information criterion ( AIC ) and Bayesian information criterion ( BIC ) in selection of an asymmetric price relationship. *Journal of Development and Agricultural Economics*, 2(1), 1–6.
- Donner, A. (1989). Statistical Methods in Ophthalmology: An Adjusted Chi-Square Approach. *International Biometric Society*, 45(2), 605–611.
- Franke, T. M., Ho, T., & Christie, C. A. (2012). The Chi-Square Test: Often Used and More Often Misinterpreted. *American Journal of Evaluation*, 33(3), 448–458. <https://doi.org/10.1177/1098214011426594>
- Heryana, A. (2020). *Uji Chi Square*. 1–19. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.23266.15047>
- Kesemen, O., Kaan, T. B., & Tuncay, U. (2018). Chi-Square Goodness of Fit Test for Bivariate Distributions in Polygonal Area. *International Journal of Scientific and Technological Research*, 4(10), 528–540.
- Khanna, D., Furst, D. E., Clements, P. J., Allamore, Y., Baron, M., Czirjak, L., Distler, O., Foeldvari, I., Kuwana, M., Matucci-cerinic, M., Mayes, M., Jr, T. M., Merkel, P. A., Pope, J. E., & James, R. (2017). Standardization of The Modified Rodnan Skin Score for Use in Clinical Trials of Systemic Sclerosis. *HHS Public Access*, 2(1), 11–18. <https://doi.org/10.5301/jsrd.5000231>. Standardization
- Kurniasari, D., Setiawan, N., Warsono, & Antonio, Y. (2017). Pendugaan Parameter Model Produksi Constant Elasticity of Substitutions ( CES ) dengan Metode Kuadrat Terkecil Nonlinear. *Seminar Nasional Teknoka*, 2, 61–66.
- Li, Z., Ma, C., & Ai, M. (2020). *Statistical Tests Under Dallal ' s Model : Asymptotic and Exact Methods*. 15(11), 1–18. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0242722>
- Maydeu-olivares, A., & Forero, C. G. (2010). Goodness of Fit Testing. *International Encyclopedia of Education*, 7, 190–196. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-044894-7.01333-6>
- Nugraha, J. (2013). *Pengantar Analisis Data Kategorik Metode dan Aplikasi Menggunakan Program R* (Issue 0274). CV. Budi Utama.
- Pei, Y., Tian, G., & Tang, M. (2014). Testing Homogeneity of Proportion Ratios for Stratified Correlated Bilateral Data in Two-Arm Randomized Clinical Trials. *Statistics in Medicine*, 33, 4370–4386. <https://doi.org/10.1002/sim.6244>
- Somayasa, W. (2008). *DIKTAT KULIAH STATISTIKA MATEMATIKA I. FMIPA UNHALU*.
- Tang, M., Pei, Y., Wong, W., & Li, J. (2010). Goodness of Fit Test for Correlated Paired Binary Data. *Statistical Methods in Medical Research*, 21(4), 331–345. <https://doi.org/10.1177/0962280210381176>
- Turhan, N. S. (2020). Karl Pearson ' s chi-square tests. *Educational Research and Reviews*, 15(9), 575–580. <https://doi.org/10.5897/ERR2019.3817>

Diterima pada tanggal 21 Januari 2022.

Terbit online pada tanggal 21 April 2022.