Turunan Fraksional Fungsi Polinom Menggunakan Deret Kuasa

Kankan Parmikanti[1] , Endang Rusyaman[2]

[1]*Departemen Matematika, Universitas Padjadjaran Bandung*
Email: parmikanti@unpad.ac.id
[2]*Departemen Matematika, Universitas Padjadjaran Bandung*
Email: rusyamani@unpad.ac.id

ABSTRAK

Turunan fraksional adalah turunan yang ordenya merupakan perumuman bilangan asli menjadi bilangan rasional. Metode yang umum digunakan untuk menentukan turunan fraksional diantaranya adalah aturan *Grundwald-Letnikov*, *Riemann-Liouville* dan aturan *Caputo*. Deret Kuasa atau deret pangkat dan Turunan fraksional sejatinya adalah dua kajian yang berbeda dalam matenatika. Deret Kuasa khususnya deret Taylor adalah alat untuk menguraikan sebuah fungsi menjadi deret pangkat. Dalam makalah ini penulis akan menyajikan suatu topik yang bertujuan untuk memperlihatkan tentang bagaimana menentukan turunan fraksional dari sebuah fungsi polinom menggunakan metode deret pangkat, khususnya deret Taylor. Langkah pertama, fungsi yang akan dicari turunan fraksionalnya adalah konstanta dan x^m, kemudian dengan menggunakan sifat penjumlahan dan perkalian turunan fraksional, fungsinya diperluas menjadi fungsi polinom. Dalam metode ini, fungsi terlebih dahulu dinyatakan dalam deret pangkat, kemudian dengan bantuan fungsi Gamma dan analisis kombinatorik, deret pangkat tersebut diolah sedemikian sehingga menghasilkan suatu rumus umum untuk mencari turunan fraksional sebuah fungsi.

Kata kunci
fraksional, deret Taylor, deret kuasa, dan fungsi Gamma

1. PENDAHULUAN

Kalkulus fraksional merupakan pengembangan dari kalkulus dimana orde dari turunan maupun integral yang tadinya merupakan bilangan asli diperluas menjadi bilangan rasional. Capelas dan Machado dalam salah satu makalahnya di Tahun. 2014 mengisahkan tentang masalah pengembangan orde turunan yang biasanya bilangan asli, sebenarnya sudah lebih dari 300 tahun yang lalu, yaitu di awal abad ke-18 hal ini dipertanyakan oleh Matematikawan Jerman, Gottfried Wilhelm Leibniz kepada Marquis de L'Hôpital seorang Matematikawan Perancis, tentang bagaimana halnya bila turunan diperluas menjadi pecahan. Pertanyaan ini telah mengilhami banyak matematikawan lainnya di abad ke-19 seperti Joseph Liouville (1809), Abel (1818) dan Weyl (1813) untuk mengembangkan turunan berorde bilangan asli menjadi bilangan fraksional. Selanjutnya, perkembangan kalkulus fraksional ini dteruskan oleh Fourier (1822), Riemann (1859), serta Grünwald dan Letnikov (1867), yang telah sangat banyak berkontribusi dalam pengetahuan ini selama bertahun-tahun [1].

Saat ini, banyak ilmuwan dan para praktisi yang tertarik baik untuk memperdalam teori, maupun menerapkan Kalkulus fraksional ini di berbagai bidang. Yang mengembangkan teori diantaranya adalah Manuel D.Ortigueiraa dan T. Machado dalam makalahnya "What is a fractional derivative?"[2], kemudian di tahun 2007, Vasily E. Tarasov yang menjadikan orde fraksional sebagai pangkat turunan sebuah fungsi [3]. Dalam bidang terapan kalkulus fraksional, ada Meral, Royston and Magin di tahun 2010 yang menerapkan ilmu ini dalam viscoelstitas [4], dan Gunawan dan kawan-kawan di Tahun 2011 yang mengidentikkan bilangan orde fraksional sebagai elastisitas untuk menghitung energi permukaan [5].

Selanjutnya, secara alami perkembangan turunan fraksional banyak mengarah pada Persamaan Diferensial Fraksional. Dalam hal ini banyak metode yang muncul untuk mencari penyelesaian, di antaranya Ganjian. M di Tahun 2010 yang menggunakan Homotopy Analysis Method [6], dan Rusyaman dkk [7] yang menggunakan Transformasi Laplace Tahun 2014. Dalam sisi aplikasi, D. Matignon, 1998, sudah terlebih dahulu menerapkan Persamaan Diferensial Fraksional dalam memodelkan masalah kestabilan [8], dan Di Paola, Pinnola F, Zingales M menerapkannya dalam Pemodelan Mekanika [9]. Demikian pula Podlubny, 2009, yang membahas fungsi diferensial parsial berorde fraksional [10].

Kembali pada masalah bagaimana metode untuk menentukan turunan fraksional, yang paling banyak digunakan adalah model Rieman-Liouville, Caputo, dan formula yang dirumuskan oleh Grunwald-Letnikov. Dalam makalah ini penulis ingin membahas metode lain sebagai metode alternatif, yaitu memakai Deret Kuasa. Langkah pertama yang akan diturunkan secara fraksional adalah fungsi konstan, kemudian fungsi x^m. Selanjutnya dengan menggunakan sifat penjumlahan turunan, akan diperoleh turunan fraksional fungsi polinom.

2. TURUNAN FRAKSIONAL

Dalam bagian ini akan disajikan rumus dasar turunan, serta beberapa metode atau rumus yang biasa digunakan untuk menentukan turunan fraksional dari suatu fungsi.

Definisi 1. Turunan pertama dari suatu fungsi $y = f(x)$ adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad ...(1)$$

asalkan nilainya ada.
Dengan menggunakan notasi Leibniz, ditulis

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Apabila turunan di setiap titik dalam domain f nilainya ada, maka dikatakan bahwa f adalah fungsi diferensiabel. Turunan kedua dari $f(x)$ adalah

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{d\,x^2}.$$

Dengan demikian turunan ke dua adalah turunan dari turunan pertama. Demikian seterusnya untuk orde turunan ke-n dengan $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Seperti yang telah disampaikan pada bab Pendahuluan di atas, orde turunan yang asalnya berupa bilangan asli, telah diperumum menjadi bilangan rasional α, yang disebut dengan turunan fraksional. Berikut ini akan disajikan beberapa metode yang sering digunakan untuk menentukan turunan fraksional orde α dari fungsi $f(x)$, yaitu Riemann-Liouville, Caputo, dan Grunwald-Letnikov.

Pada pertengahan abad ke-19, matematikawan *Riemann* (1826-1866) dan *Liouville* (1809-1882) membuat rumusan untuk menentukan integral fraksional orde α sebagai perumuman dari turunan yang dikemukakan oleh *Leibniz* (1646-1716).

Definisi 2. Misalkan α bilangan real, integral fraksional orde α dari fungsi $f(x)$ adalah

$$\begin{aligned} J^\alpha f(x) &= D^{-\alpha} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \end{aligned}$$

dengan $\alpha > 0$, sedangkan untuk $\alpha = 0$,

$$J^0 f(x) = f(x).$$

Selanjutnya turunan fraksional orde-α menurut *Riemann-Liouville* didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3. Tturunan fraksional orde-α dari fungsi $f(x)$ terhadap x adalah

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\, dt$$

dengan $n - 1 \leq \alpha < n$ dan $n \in \mathbb{Z}^+$ ...(2)

Contoh 1:
Misal diberikan fungsi $f(x) = x^2$, maka turunan ke-(–1) adalah sebagai berikut.

$$n - 1 = \lfloor \alpha \rfloor = \lfloor -1 \rfloor = -1 \text{ maka } n = 0$$

$$_aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x f(t)(x-t)^{-(\alpha-n+1)}\, dt$$

$$\begin{aligned} {}_0D_x^{-1} x^2 &= \frac{1}{\Gamma(0-(-1))} \left(\frac{d}{dx}\right)^0 \int_0^x t^2 (x-t)^{-(-1-0+1)}\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x t^2 (x-t)^0\, dt \\ &= \frac{1}{1} \int_0^x t^2\, dt \\ &= \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^x \end{aligned}$$

$${}_0D_x^{-1} x^2 = \frac{1}{3} x^3$$

Ini menunjukan bahwa turunan ke-(–1) sama dengan integral dari fungsi tersebut.

Selain Riemann dan Liouville, ilmuwan matematika lain yang turut mengembangkan turunan fraksional adalah Anton Karl Grunwald (1838-1920) dari Praha Rumania dan Aleskey Vasilievich Letnikov (1837-1888) dari Moscow. Konsep Grunwald-Letnikov diperkenalkan tahun 1868 dalam definisi berikut.

Definisi 4. Turunan fraksional dari $f(x)$ berorde α pada interval $[a, b]$ adalah

$$D_x^\alpha f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(i+1)\,\Gamma(\alpha-i+1)} f(x-ih)$$

dengan $n = \left\lfloor \frac{b-a}{h} \right\rfloor$. ...(3)

Berbeda dengan Riemann-Liouville dan Grunwald-Letnikov, di Tahun 1967 Caputo dalam makalahnya mengembangkan persamaan (2) untuk mendefinisikan turunan fraksional sebagai berikut

Definisi 5. Turunan fraksional orde α dari $f(x)$ terhadap x adalah

$$D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau$$

dengan $n-1 \le \alpha < n$ dan $n \in \mathbf{Z}^+$ . ...(4)

Turunan fraksional Caputo memiliki sifat-sifat sebagai berikut

1. $D^{\alpha} C = 0$ (C adalah konstanta)
2. $D^{\alpha} x^s = \begin{cases} 0, & s \le \alpha - 1 \\ \dfrac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s-\alpha+1)} x^{s-\alpha}, & s > \alpha - 1 \end{cases}$

Berdasarkan (2), (3), maupun (4), diperoleh bahwa jika $f(x) = x^p$, maka turunan fraksional dari $f(x)$ terhadap x dengan orde α adalah

$$D_x^{\alpha}\ x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}\ x^{p-\alpha} \ . \qquad ...(5)$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bagian ini disampaikan bahasan pokok mengenai bagaimana deret kuasa Taylor dapat digunakan untuk menentukan turunan fraksional.

3.1 Deret Taylor

Pertama-tama disajikan definisi dan hal-hal lain yang berkaitan dengan deret Taylor.

Definisi 6. Deret taylor didefinisikan sebagai

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ (x-a)^n \ . \qquad ...(6)$$

Dalam bentuk rumus umum deret kuasa, deret Taylor di atas dapat juga ditlis dalam sebagai

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ (x-a)^n \qquad ...(7)$$

dengan

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

dan $f^{(n)}(a)$ adalah nilai turunan orde-n dari $f(x)$ di titik $x = a$.

Apabila $f(x)$ diferensiabel pada suatu interval buka $|x-a| < \delta$, dan

$$\lim_{n\to\infty} c_n\ (x-a)^n = 0$$

maka deret

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ (x-a)^n$$

akan konvergen ke fungsi $f(x)$ pada interval $|x-a| < \delta_0 < \delta$.

3.2 Turunan Fraksional dengan Deret Taylor

Apabila fungsi $f(x) = x^{\alpha}$ dinyatakan dalam deret Taylor sekitar $x = a > 0$, maka dengan (6) dan (7) diperoleh

$$x^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ (x-a)^n \qquad ...(8)$$

dimana

$$c_n = \frac{(x^{\alpha})^{(n)}(a)}{n!} = \frac{\beta(\alpha,n)}{n!\ a^{n-\alpha}}$$

dengan

$$\beta(\alpha, n) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1).$$

Apabila $m-1 < \alpha < m$, maka

$$\beta(\alpha,n) = (-1)^{n-m} \frac{\prod_{i=0}^{m-1}(\alpha+1-m+i)}{\prod_0^{n-m-1}(m-\alpha+i)} = (-1)^{n-m} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\alpha+1-m)}$$

Dengan demikian untuk $0 < \alpha < 1$, berlaku

$$\beta(\alpha,n) = (-1)^{n-1}\alpha \prod_0^{n-1}(1-\alpha+i) = (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \qquad ...(9)$$

Selanjutnya dengan menggunakan fakta bahwa

$$(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\ x^k a^{n-k} \ ,$$

persamaan (8) bisa ditulis dalam bentuk

$$x^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C(n,k,\alpha,a)\ x^k \qquad ...(10)$$

dimana

$$C(n,k,\alpha,a) = \frac{(-1)^{n-k}\, a^{\alpha-k}\,\Gamma(n-\alpha)}{(n-k)!\,k!\ \ \Gamma(1-\alpha)} \ .$$

Persamaan (10) ini memperlihatkan bahwa pangkat fraksional dapat direpresentasikan sebagai deret dari pangkat bilangan bulat. Dengan demikian akan berlaku pula jika x diganti dengan sebuah operator A.

Berdasarkan persamaan (8) dan (10), dengan nilai $a > 0$, maka kita dapat merepresentasikan pangkat fraksional sebuah operator dalam sebuah deret pangkat fraksional, yaitu

$$A^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta(\alpha,n)}{n!\ a^{n-\alpha}}\ (A-a)^n$$

Dengan demikian bila kita ambil sebuah operator $A = \frac{d}{dx}$, maka diperoleh

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta(\alpha,n)}{n!\ a^{n-\alpha}} \left(\frac{d}{dx} - a\right)^n \qquad ...(11)$$

yang ekivalen dengan bentuk

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k,\alpha,a)\ \frac{d^k}{dx^k}. \qquad ...(12)$$

Dengan rumus ini kita dapat menentukan dan menyatakan turunan fraksional sebagai deret pangkat bilangan bulat.

3.3 Turunan Fraksional konstanta dan x^m .

Di bagian terahir ini, akan disajikan dua contoh tentang bagaimana mencari turunan fraksional menggunakan deret Taylor, yaitu menggunakan persamaan (11) dan (12).

1. Turunan fraksional fungsi konstan $f(x) = c$

Dari persamaan (11) diperoleh

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}(c) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta(\alpha,n)}{n!\ a^{n-\alpha}}\left(\frac{d}{dx}-a\right)^{n}(c).$$

Karena

$$\left(\frac{d}{dx}-a\right)^{n}(c) = (-a)^{n}\,c\ ,$$

maka diperoleh

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}(c) = a^{\alpha}c\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\,\frac{\beta(\alpha,n)}{n!}\ .$$

Dengan demikian untuk $0 < \alpha < 1$ menghasilkan

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}(c) = -a^{\alpha}c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(1-\alpha)}\ .$$

2. Turunan fraksional fugsi $f(x) = x^p$.

Dari persamaan (12) diperoleh

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}x^{m} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C(n,k,\alpha,a)\ \frac{d^{k}}{dx^{k}}\,x^{m}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C(n,k,\alpha,a)\ (x^{m})^{(k)}$$

Karena

$$(x^{m})^{(k)} = m(m-1)\cdots(m-k+1)\,x^{m-k}$$
$$= \frac{m!}{(m-k)!}\ x^{m-k}\ ,$$

maka untuk $k \le m$ dan $(x^{m})^{(k)} = 0$ untuk $k < m$ diperoleh

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}x^{m} = \sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C(n,k,\alpha,a)\ \frac{m!}{(m-k)!}\ x^{m-k}\ .$$

4. KESIMPULAN

Berdasarkan apa yang telah diuraikan di atas, dapat disimpulkan bahwa metode penentuan turunan fraksional dengan Taylor ini mendapat hasil yang sama dengan metode lain. Walaupun rumusan pencarian turunan fraksional yang diperoleh melalui Deret Taylor tidak lebih sederhana dibandingkan dengan metode lainnya yang lebih umum, tapi selain untuk pengayaan keilmuan, metode ini paling tidak dapat menjadi alternatif dalam memecahkan masalah turunan fraksional.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Capelas O E and Machado J A T. (2014). A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral. *Mathematical Problems in Engineering Journal*. Volume 2014, Article ID 238459, 6 , pages, http : // dx. doi.org/ 10.1155/ 2014/ 238459

[2] Manuel D.Ortigueiraa, Tenreiro Machadob J.A., (2015), What is a fractional derivative?, Journal of Computational Physics 293 (2015) 4 – 13

[3] Vasily E. Tarasov, (2007), Fractional Derivative as Fractional Power of Derivative, International Journal of Mathematics 281-299

[4] Meral F C, Royston T J, and Magin R. (2010). Fractional calculus in viscoelasticity : An experimental study, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 15 page: 939–945

[5] Gunawan H, Rusyaman E, dan Ambarwati L,(2014) Surfaces with prescribed nodes and minimum energy integral of fractional order, ITB, Sci .Vol. 43 A, No. 3, 2011, 209-222

[6] Ganjian M. (2010). Solution of nonLinear Fractional Differential Equations Using Homotopy Analysis Method. *Applied Mathematical Modelling* 34, 1634-1641.

[7] Rusyaman E, Parmikanti K, and Carnia E. (2014) *Persamaan Diferensial Fraksional dan solusinya Menggunakan Transformasi Laplace*, Proceeding Konferensi Nasional Matematika XVII, Surabaya

[8] Matignon. D , (1998), Generalized Fractional Differential and Difference Equations: Stability Properties and Modelling Issues. In *Mathematical Theory of Networks and Systems symposium* (pp. 503-506).

[9] Di Paola M, Pinnola F P , Zingales M. (2013). Fractional differential equations and related exact mechanical models. *Computers and Mathematics with Applications* 66 page : 608 – 620, Impact Factor: 1.7 · DOI:10.1016/j.camwa. 2013.03.012.

[10] Podlubny I, Chechkin A, Skovranek T, Chen Y and Vinagre B.M.J, (2009). Matrix Approach to discrete fractional calculus II: Partial fractional differential equations, Journal of Computational Physics, Vol. 228, 3137– 3153.