CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 3, No 1, 2022
DOI:
10.25037/cgantjma.v3i1.75

Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Pewarnaan Titik pada Keluarga Graf Sentripetal

Istamala Idha Retnoningsih[1], Dafik[1,2,3], Saddam Hussen[1,3]
[1]Departement of Mathematics Education - University of Jember
[2]CGANT, University of Jember
[3]CEREBEL, Universitas of Jember

E-mail: istamala6@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id, saddamhussen.fkip@unej.ac.id

Abstract. The graph G is defined as a pair of sets (V, E) denoted by $G = (V, E)$, where V is a non-empty vertex set and E is an edge set may be empty connecting a pair of vertex. Two vertices u and v in the graph G are said to be adjacent if u and v are endpoints of edge $e = uv$. The degree of a vertex v on the graph G is the number of vertices adjacent to the vertex v. In this study, the topic of graphs is vertex coloring will be studied. Coloring of a graph is giving color to the elements in the graph such that each adjacent element must have a different color. Vertex coloring in graph G is assigning color to each vertex on graph G such that the adjecent vertices u and v have different colors. The minimum number of colorings produced to color a vertex in a graph G is called the vertex chromatic number in a graph G denoted by $\chi(G)$.

Keywords : *Vertex coloring, chromatic number, family of centripetal graph*

1. Pendahuluan

Sejarah graf dimulai pada Abad ke 19, sejak adanya permasalahan jembatan Konigsberg tahun 1736 [3]. Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, dengan V merupakan himpunan titik (*vertex*) tak kosong dan E adalah himpunan sisi (*edge*) boleh kosong yang menghubungkan sepasang titik, sebuah graf mungkin tidak memiliki sisi, namun harus memiliki titik atau simpul minimal satu [7][15]. Dua titik v_2 dan v_3 pada graf G dikatakan bertetangga *(adjacent)* jika u dan v merupakan titik ujung dari sisi $e = v_2v_3$ pada graf G sehingga sisi e dikatakan bersisihan *(incident)* dengan titik v_2 dan v_3 [16]. Banyaknya titik pada suatu graf disebut *order* dari G dan banyaknya sisi pada graf G disebut *size*, untuk menjelaskan bahwa V adalah himpunan titik dari graf G, maka penulisannya dinotasikan sebagai $V(G)$, begitupun untuk E merupakan himpunan sisi pada graf G penulisannya yaitu $E(G)$. Derajat sebuah titik v pada graf G adalah banyaknya titik yang bertetangga dengan titik v [17]. Notasi dari derajat titik v yaitu $d(v)$, notasi dari derajat minimum pada suatu graf G yaitu $\delta(G)$, dan notasi dari derajat maksimum pada suatu graf G yaitu $\Delta(G)$ [5]. Terdapat beberapa pembahasan pada teori graf diantaranya ialah pelabelan dan pewarnaan graf.

Pelabelan merupakan sebuah pemetaan pada elemen-elemen graf (titik atau sisi) ke dalam himpunan bilangan bulat positif [9]. Pewarnaan dari suatu graf merupakan pemberian warna pada elemen-elemen yang ada pada graf sedemikian hingga setiap elemen yang berdekatan harus memiliki warna berbeda [4]. Ada tiga jenis pewarnaan, yaitu pewarnaan titik, sisi, dan pewarnaan wilayah [6]. Jumlah warna minimum yang digunakan untuk mewarnai suatu graf G disebut bilangan kromatik (8). Pada pewarnaan titik dan wilayah, bilangan kromatik dinotasikan dengan $\chi(G)$, sedangkan pada pewarnaan sisi, bilangan kromatik dinotasikan dengan $\chi'(G)$ [2].

Pewarnaan titik pada graf G merupakan pemberian warna pada setiap titik pada graf G sedemikian rupa sehingga titik yang bertetangga u dan v tidak memiliki warna yang sama $c(u) \neq c(v)$ dimana $c(u)$ merupakan warna dari titik u dan $c(v)$ merupakan warna dari titik v (13). Jumlah pewarnaan minimum yang dihasilkan untuk mewarnai titik pada suatu graf G disebut dengan bilangan kromatik titik pada graf G dinotasikan dengan $\chi(G)$ [11].

Graf yang digunakan dalam penelitian ini ialah keluarga graf sentripetal yaitu keluarga graf yang memiliki satu titik pusat dan setiap titik yang lainnya harus saling bertetangga atau terhubung dengan titik pusat. Keluarga graf sentripetal yang akan diteliti pada topik pewarnaan titik ini yaitu graf gurita, graf gunung api, graf sandat, graf bunga matahari, dan graf tunjung.

Berikut penelitian yang telah dilakukan sebelumnya terkait pewarnaan titik pada beberapa graf, yaitu pada beberapa graf harary [12], graf roda, graf kipas, graf helm, graf prisma, dan graf anti prisma [10], graf dual dari graf roda [1], korona graf kipas dengan graf kipas, graf buku segitiga dengan graf buku segitiga berorder sama [14].

2. Hasil Penelitian

Pada penelitian ini didapatkan lima teorema baru terkait pewarnaan titik pada keluarga graf sentripetal yaitu graf gurita O_n, graf gunung api V_n, graf sandat St_n, graf bunga matahari Sf_n, dan graf tunjung Tj_n.

Teorema 2.1 Bilangan kromatik graf gurita O_n dengan $n \geq 2$, adalah $\chi(O_n) = 3$
Bukti. Graf gurita O_n merupakan graf terhubung yang memiliki himpunan titik $V(O_n) = \{x, y_i, z_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(O_n) = \{xy_i, xz_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Sehinggga kardinalitas titik dan sisi dari graf gurita yaitu $|V(O_n)| = 2n+1$ dan $|E(O_n)| = 3n-1$. Graf gurita merupakan graf yang memiliki satu titik pusat x yang saling bertetangga dengan setiap titik lainnya, sehingga titik pusat x harus memiliki warna yang berbeda dengan setiap titik yang lainnya. Titik y_i untuk i ganjil selalu bertetangga dengan titik y_i untuk i genap, sehingga titik y_i untuk i ganjil dan i genap harus saling memiliki warna yang berbeda. Sehingga diberikan fungsi pewarnaan pada titik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c(x) &= 1 \\ c(y_i) &= \begin{cases} 2, \text{ jika } i \text{ ganjil} \\ 3, \text{ jika } i \text{ genap} \end{cases} \\ c(z_i) &= 2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Terbukti jika bilangan kromatik pada graf gurita dengan $n \geq 2$ adalah $\chi(O_n) = 3$

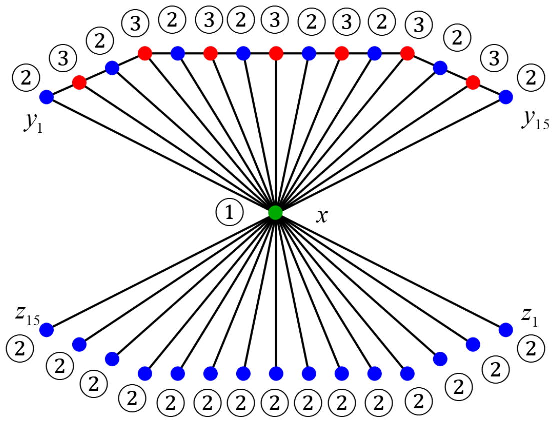


Figure 1. Pewarnaan Titik pada Graf Gurita O_{15}

Teorema 2.2 Bilangan kromatik graf gunung api V_n dengan $n \geq 2$, adalah $\chi(V_n) = 3$
Bukti. Graf gunung api V_n merupakan graf terhubung yang memiliki himpunan titik $V(V_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 3\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(V_n) = \{x_1x_2,\ x_2x_3, x_3x_1\} \cup \{xy_i; 1 \leq i \leq n\}$. Sehinggga kardinalitas titik dan sisi dari graf gunung api yaitu $|V(V_n)| = n + 3$ dan $|E(V_n)| = n + 3$. Graf gunung api merupakan graf yang memiliki satu titik pusat x_1 yang saling bertetangga dengan setiap titik lainnya, sehingga titik pusat x_1 harus memiliki warna yang berbeda dengan setiap titik yang lainnya. Titik x_1, x_2, dan x_3 merupakan titik dari *cycle* c_3 sehingga setiap titik dari x_1, x_2, dan x_3 saling bertetangga dan harus memiliki warna yang berbeda. Titik y_i merupakan titik yang terhubung atau bertetangga dengan titik pusat x_i dan tidak saling bertetangga dengan titik x_2 dan x_3 sehingga titik y_i dapat memiliki warna yang sama dengan titik x_2 atau x_3. Sehingga mengakibatkan fungsi pewarnaan pada titik sebagai berikut.

$$c(x_1) = 1 \qquad c(x_2) = 2 \qquad c(x_3) = 3$$

$$c(y_i) = 2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n$$

Terbukti jika bilangan kromatik pada graf gunung api dengan $n \geq 2$ adalah $\chi(V_n) = 3$.

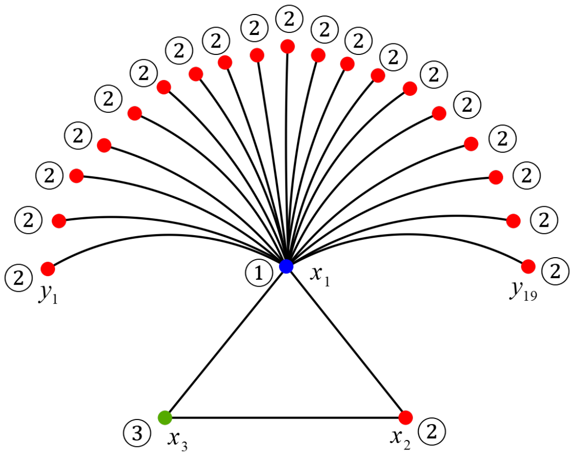


Figure 2. Pewarnaan Titik pada Graf Gunung Api V_{19}

Teorema 2.3 Bilangan kromatik graf sandat St_n dengan $n \geq 3$, adalah $\chi(St_n) = 3$

Bukti. Graf sandat St_n merupakan graf terhubung yang memiliki himpunan titik $V(St_n) = \{x\} \cup \{y_i, y_{i,1}, y_{i,2}; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(St_n) = \{xy_i, xy_{i,1}, \ xy_{i,2}, y_iy_{i,1}, y_iy_{i,2}; 1 \leq i \leq n\}$. Sehinggga kardinalitas titik dan sisi dari graf sandat yaitu $|V(St_n)| = 3n + 1$ dan $|E(St_n)| = 5n$. Graf sandat merupakan graf yang memiliki satu titik pusat x yang saling bertetangga dengan setiap titik lainnya, sehingga titik pusat x harus memiliki warna yang berbeda dengan setiap titik yang lainnya. Titik y_i bertetangga dengan titik $y_{i,1}$ dan $y_{i,2}$ sehingga harus memiliki warna yang berbeda dengan titik tersebut. Titik $y_{i,1}$ dan $y_{i,2}$ merupakan titik yang saling berhadapan namun tidak saling bertetangga, sehingga titik $y_{i,1}$ dan $y_{i,2}$ dapat memiliki warna yang sama. Sehingga mengakibatkan fungsi pewarnaan pada titik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c(x) &= 1 \\ c(y_i) &= 2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ c(y_{i,1}) = c(y_{i,2}) &= 3, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Terbukti jika bilangan kromatik pada graf sandat dengan $n \geq 3$ adalah $\chi(St_n) = 3$.

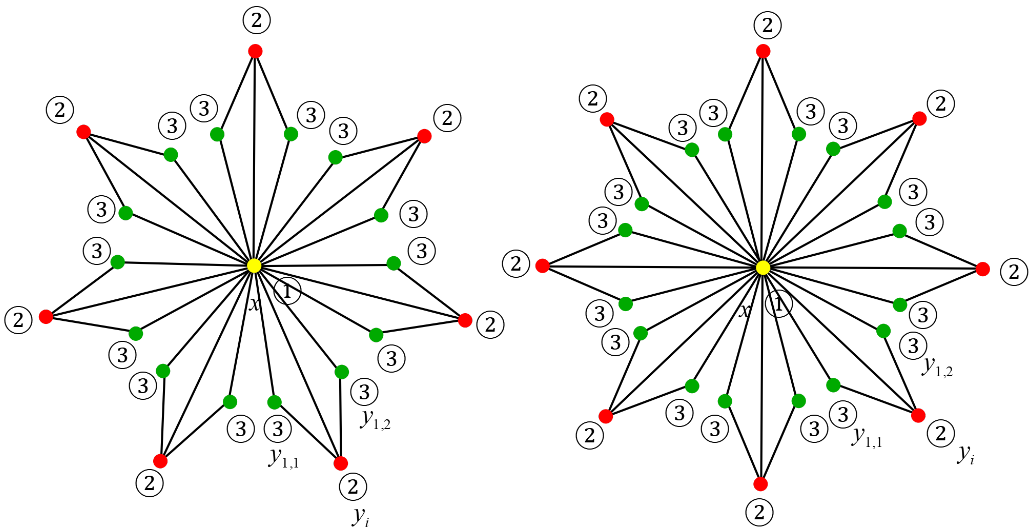


Figure 3. Pewarnaan Titik pada Graf Sandat St_7 dan St_8

Teorema 2.4 Bilangan kromatik graf bunga matahari Sf_n dengan $n \geq 3$, adalah

$$\chi(Sf_n) = \begin{cases} 3, \text{ untuk } n \text{ genap} \\ 4, \text{ untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Bukti. Graf bunga matahari Sf_n merupakan graf terhubung yang memiliki himpunan titik $V(Sf_n) = \{v\} \cup \{u_i, w_i, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Sf_n) = \{u_i v, vw_i\ , w_i x_i, vx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i w_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{w_1 w_n\}$. Sehinggga kardinalitas titik dan sisi dari graf bunga matahari yaitu $|V(Sf_n)| = 3n + 1$ dan $|E(Sf_n)| = 5n$. Berdasarkan himpunan titik dan himpunan sisi, derajat terkecil dari graf bunga matahari Sf_n yaitu $\delta(Sf_n) = 1$ dan derajat terbesarnya yaitu $\Delta(Sf_n) = 3n$. Pada graf bunga matahari terdapat dua kasus dalam pembuktian bilangan kromatik graf Sf_n.

Kasus 1: untuk n genap

Graf bunga matahari untuk n genap memiliki satu titik pusat v yang saling bertetangga dengan setiap titik lainnya, sehingga titik pusat v harus memiliki warna yang berbeda dengan setiap titik yang lainnya. Titik u_i merupakan titik *pendant* yang hanya bertetangga dengan titik pusat v, sehingga titik u_i dapat memiliki warna yang sama dengan titik w_i atau titik x_i. Titik w_i merupakan titik yang membentuk sebuah lingkaran sehingga titik W_i akan bertetangga dengan titik w_{i+1} dan titik w_1 akan bertetangga dengan titik w_n, sehingga menyebabkan warna untuk titik w_i dengan i ganjil harus berbeda dengan i genap. Titik x_i bertetangga dengan titik w_i untuk i ganjil dan titik x_i bertetangga dengan titik w_i untuk i genap, sehingga harus memiliki warna yang berbeda untuk setiap titik w_i dan x_i dengan i ganjil dan setiap titik w_i dan x_i untuk i genap. Sehingga mengakibatkan fungsi pewarnaan pada titik sebagai berikut.

$$c(v) = 1 \qquad\qquad c(u_i) = 2$$

$$c(w_i) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i \text{ ganjil} \\ 3, \text{ jika } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c(x_i) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i \text{ genap} \\ 3, \text{ jika } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Kasus 2: untuk n ganjil

Graf bunga matahari untuk n ganjil memiliki satu titik pusat v yang saling bertetangga dengan setiap titik lainnya, sehingga titik pusat v harus memiliki warna yang berbeda dengan setiap titik yang lainnya. Titik u_i merupakan titik *pendant* yang hanya bertetangga dengan titik pusat v, sehingga titik u_i dapat memiliki warna yang sama dengan titik w_i atau titik x_i. Titik w_i merupakan titik yang membentuk sebuah lingkaran dengan n ganjil untuk $1 \leq i \leq n$ sehingga titik w_i akan bertetangga dengan titik w_{i+1} dan titik w_1 akan bertetangga dengan titik w_n, sehingga menyebabkan titik w_i untuk i ganjil, titik w_i untuk i genap, dan titik w_n harus memiliki warna yang berbeda. Titik w_i bertetangga dengan titik x_i untuk i ganjil dan titik w_i bertetangga dengan titik x_i untuk i genap, sehingga harus memiliki warna yang berbeda untuk setiap titik w_i dan x_i untuk i ganjil dan setiap titik w_i dan x_i untuk i genap. Sehingga mengakibatkan fungsi pewarnaan pada titik sebagai berikut.

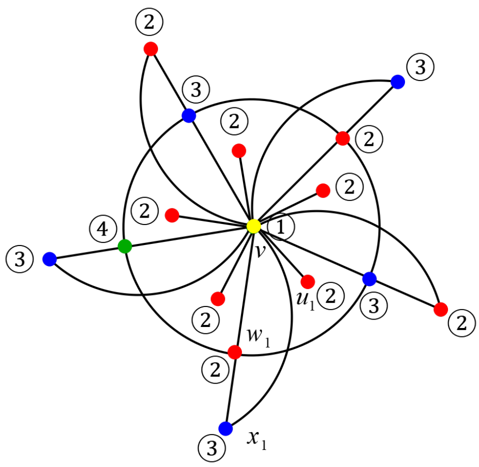
$$c(v) = 1 \qquad\qquad c(u_i) = 2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$c(w_i) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i \text{ ganjil} \\ 3, \text{ jika } i \text{ genap} \\ 4, \text{ jika } i = \text{n} \end{cases}$$

$$c(x_i) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i \text{ genap} \\ 3, \text{ jika } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Terbukti jika bilangan kromatik pada graf bunga matahari dengan $n \geq 3$ adalah

$$\chi(Sf_n) = \begin{cases} 3, \text{ untuk } n \text{ genap} \\ 4, \text{ untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$



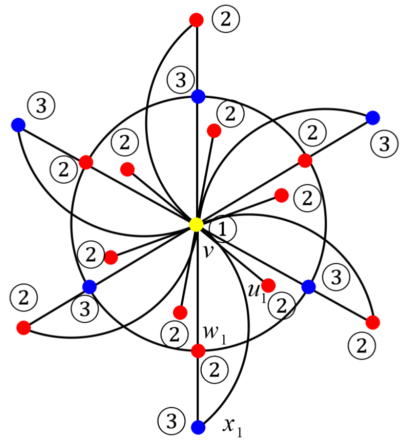


Figure 4. Pewarnaan Titik pada Graf Bunga Matahari Sf_5 dan Sf_6

Teorema 2.5 Bilangan kromatik graf tunjung Tj_n dengan $n \geq 3$, adalah

$$\chi(Tj_n) = \begin{cases} 3, \text{ untuk } n \text{ genap} \\ 4, \text{ untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Bukti. Graf tunjung Tj_n merupakan graf terhubung yang memiliki himpunan titik $V(Tj_n) = \{w\} \cup \{x_i, y_i, z_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Tj_n) = \{wx_i, x_iy_i, y_iz_i, wy_i, wz_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_ix_{i+1}, y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1x_n, y_1y_n\}$. Sehinggga kardinalitas titik dan sisi dari graf tunjung yaitu $|V(Tj_n)| = 3n+1$ dan $|E(Tj_n)| = 7n$. Berdasarkan himpunan titik dan himpunan sisi, derajat terkecil dari graf tunjung Tj_n yaitu $\delta(Tj_n) = 2$ dan derajat terbesarnya yaitu $\Delta(Tj_n) = 3n$. Pada graf tunjung terdapat dua kasus dalam pembuktian bilangan kromatik graf Tj_n.

Kasus 1: untuk n genap, $\chi(Tj_n) = 3$

Graf tunjung untuk n genap memiliki satu titik pusat w yang saling bertetangga dengan setiap titik lainnya, sehingga titik pusat w harus memiliki warna yang berbeda dengan setiap titik yang lainnya. Titik x_i merupakan titik yang membentuk sebuah lingkaran sehingga menyebabkan warna di titik x_i untuk i ganjil harus berbeda dengan i genap, serta titik x_i bertetangga dengan titik y_i untuk setiap nilai i yang sama, sehingga harus memiliki warna yang berbeda di setiap titik x_i dan y_i untuk setiap nilai i yang sama. Titik z_i bertetangga dengan titik y_i dan tidak bertetangga dengan titik x_i sehingga warna di titik z_i tidak boleh sama dengan pewarnaan di titik y_i untuk setiap nilai i yang sama, namun boleh sama dengan pewarnaan di titik x_i. Sehingga mengakibatkan fungsi pewarnaan pada titik sebagai berikut.

$$c(w) = 1$$

$$c(y_i) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i \text{ ganjil} \\ 3, \text{ jika } i \text{ genap} \end{cases} \qquad c(x_i) = c(z_i) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i \text{ genap} \\ 3, \text{ jika } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Kasus 2: untuk n ganjil, $\chi(Tj_n) = 4$

Graf tunjung untuk n ganjil memiliki satu titik pusat w yang saling bertetangga dengan setiap titik lainnya, sehingga titik pusat w harus memiliki warna yang berbeda dengan setiap titik yang lainnya. Titik x_i merupakan titik yang membentuk sebuah lingkaran dengan n ganjil sehingga akan menyebabkan warna di titik x_i menghasilkan tiga warna berbeda untuk $1 \leq i \leq n$. Titik y_i merupakan titik yang membentuk lingkaran dan bertetangga dengan titik x_i sehingga akan menyebabkan terdapat tiga warna berbeda untuk $1 \leq i \leq n$ dan setiap warna di titik y_i harus berbeda dengan titik x_i untuk setiap nilai i yang sama. Titik z_i bertetangga dengan titik y_i dan tidak bertetangga dengan titik x_i sehingga warna di titik z_i tidak boleh sama dengan warna di titik y_i untuk setiap nilai i yang sama, namun boleh sama dengan pewarnaan di titik x_i. Sehingga mengakibatkan fungsi pewarnaan pada titik sebagai berikut.

$$c(w) = 1 \qquad c(y_i) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i \text{ ganjil} \\ 3, \text{ jika } i \text{ genap} \\ 4, \text{ jika } i = \text{n} \end{cases}$$

$$c(x_i) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i \text{ genap} \\ 3, \text{ jika } i \text{ ganjil} \\ 4, \text{ jika } i = 1 \end{cases} \qquad c(z_i) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i \text{ genap} \\ 3, \text{ jika } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Terbukti jika bilangan kromatik pada graf tunjung dengan $n \geq 3$ adalah

$$\chi(Tj_n) = \begin{cases} 3, \text{ jika } n \text{ genap} \\ 4, \text{ jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

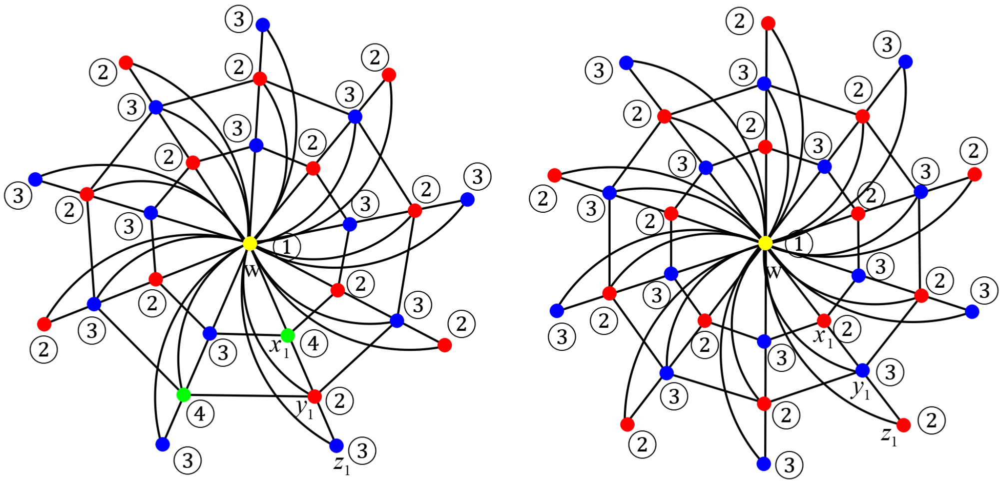


Figure 5. Pewarnaan Titik pada Graf Tunjung Tj_9 dan Tj_{10}

3. Kesimpulan

pada penelitian ini diperoleh lima bilangan kromatik baru tentang pewarnaan titik pada keluarga graf sentripetal, yaitu nilai bilangan kromaik pada graf gurita O_n dengan $n \geq 2$, adalah $\chi(O_n) = 3$, pada graf gunung api V_n dengan $n \geq 2$, adalah $\chi(V_n) = 3$, pada graf sandat St_n dengan $n \geq 3$, adalah $\chi(St_n) = 3$, pada graf bunga matahari Sf_n dengan $n \geq 3$, adalah $\chi(St_n) = 3$ untuk $ngenap$ 4 untuk $nganjil$, nilai kromatik pada graf tunjung Tj_n dengan $n \geq 3$, adalah $\chi(Tj_n) = 3$ untuk n genap 4 untuk n ganjil.

4. Ucapan Terimakasih

Kami mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada CGANT Research Group dan CEREBEL Universitas Jember, serta Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember 2022 atas segala dukungan dan ilmu yang telah diberikan.

References

[1] Abdy, M., Syam, R., Tina, T. 2021. Bilangan Kromatik Pewarnaan Titik pada Graf Dual dari Graf Roda. *JMathCos (Journal of Mathematics, Computations, and Statistics)*. 4(2): 95-101.
[2] Afriantini., Helmi, F. Fran. 2019. Pewarnaan Simpul, Sisi, Wilayah pada Graf dan Penerapannya. *Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*. 8(4) : 773–782.
[3] Aziz, T. A. 2021. Eksplorasi Justifikasi dan Rasionalisasi Mahasiswa dalam Konsep Teori Graf. *Jurnal Pendidikan Matematika Raflesia*. 06(02): 40–54.
[4] Buhaerah, B., Busrah, Z., Sanjaya, H. 2022. Teori Graf dan Aplikasinya.
[5] Chartrand, G., dan Zhang, P. 2009. *Chromatic Graph Theory*. USA: CRC Press.
[6] Chartrand, G., dan Zhang, P. 2012. *A first course in graph theory*. Dover Publications.
[7] Dafik, Structural Properties and Labeling of Graphs. University of Ballarat,2007.
[8] Dafik. 2015. Teori Graf, Aplikasi dan Tumbuhnya Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. *Pidato Pengukuhan Guru Besar*. jember: Pidato Ilmiah Pengukuhan Profesor di Lingkungan UNEJ.
[9] Hinding, N., D. Firmayasari, H. Basir, M. Baca, A. S. Feňovčíková. 2018. On Irregularity Strength of Diamond Network. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*. 15(3) : 291-297.
[10] Irwanto, J., Dafik. 2014. Pewarnaan titik Pada Graf Spesial dan Operasinya.
[11] Karthick, T., F. Maffray, dan L. Pastor. 2018. Polynomial Cases for the Vertex Coloring Problem. *Algorithmica*. 81(3): 1053–1074.
[12] Kazemi, A. P. 2007. Chromatic numbers in some graphs. In International Mathematical Forum (Vol. 2, No. 35, pp. 1723-1727).
[13] Manongga, D. dan Y. Nataliani. 2013. *Matematika Diskrit*. Edisi Pertama. Jakarta : Prenada Media Group.

[14] Maro, L., Banabera, C. (2020). Pewarnaan Titik pada Korona Graf Kipas dengan Graf Kipas dan Graf Buku Segitiga dengan Graf Buku Segitiga Berorder Sama. Jurnal Axiomath: Jurnal Matematika Dan Aplikasinya, 2(2): 16-20.
[15] Munir, R. 2010.*Matematika Disktrit*. Edisi keempat. Bandung:Informatika Bandung.
[16] Rosen, K. H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Application*. Seventh Edition. New York: VAGA.
[17] Slamin. 2009. *Desain Jaringan (Pendekatan Teori Graf)*. Jember: Jember University Press.