

Resolving Domination Number pada Keluarga Graf Buku

Quthrotul Aini Fuidah^{1,2}, Dafik^{1,2}, Ermita Rizki Albirri^{1,2}

¹CGANT - Universitas Jember

²Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

ainifuidah@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id, ermitara@unej.ac.id

Abstract

All graph in this paper are members of family of book graph. Let G is a connected graph, and let $W = \{w_1, w_2, \dots, w_i\}$ a set of vertices which is dominating the other vertices which are not element of W , and the elements of W has a different representations, so W is called resolving dominating set. The minimum cardinality of resolving dominating set is called resolving domination number, denoted by $\gamma_r(G)$. In this paper we obtain the exact values of resolving dominating for family of book graph.

Keywords : *Resolving dominating set, resolving domination number, family of book graph*
Mathematics Subject Classification: 05C15

Pendahuluan

Topik yang digunakan dalam artikel ini adalah *resolving domination number*. *Resolving domination number* adalah Kardinalitas minimum dari *resolving dominating set* [1]. *Resolving dominating set* merupakan himpunan titik pembeda yang mendominasi, artinya titik titik pada *resolving dominating set* harus mendominasi titik-titik disekitarnya, minimum, dan setiap titik memiliki representasi yang berbeda [2]. Misalkan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_i\}$ adalah himpunan titik yang mendominasi titik-titik lainnya yang bukan anggota W , dan semua titik memiliki representasi yang berbeda, maka W disebut *resolving dominating set*.

Terdapat beberapa peneliti sebelumnya yang telah meneliti topik *resolving domination number* pada beberapa graf, seperti *helm graph*, *line helm graph*, *middle helm graph*, dan *total helm graph* yang diteliti oleh Hayyu dkk., pada tahun 2019 [3]. Selain itu, mardiya dkk., pada tahun 2020 meneliti *resolving domination number* pada graf *Firecracker*, *Caterpillar*, dan *Banana Tree* [4]. Setelah membaca dan mempelajari penelitian-penelitian sebelumnya, peneliti tertarik untuk meneliti *resolving domination number* pada keluarga graf buku dikarenakan belum ada peneliti terdahulu yang meneliti *resolving domination number* pada keluarga graf buku. Graf buku termasuk ke dalam graf sederhana karena tidak memiliki sisi ganda ataupun gelang dan tidak berarah karena tidak mempunyai orientasi arah. Graf buku adalah graf hasil amalgamasi sisi dari graf *cycle* (C_n) sebanyak m dengan n dan $m \geq 3$ [5]. Amalgamasi sisi merupakan atau pengulangan suatu graf dengan satu sisi sebagai sisi terminal [6].

Lemma yang digunakan untuk membuktian teorema *resolving domination number* pada penelitian ini sebagai berikut.

Lemma 1. *Jika k bukan resolving dominating set pada graf terhubung G , maka $k - 1$ juga bukan resolving dominating set [7].*

Lemma 2. *Untuk setiap titik u anggota himpunan pembeda W pasti memiliki representasi yang berbeda terhadap W [8].*

Hasil Penelitian

Teorema 1. Untuk graf buku segitiga B_n^3 , dengan $n \geq 3$, maka $\gamma_r(B_n^3) = n$.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $\gamma_r(B_n^3) = n$, perlu dibuktikan batas bawah $\gamma_r(B_n^3) \geq n$ dan batas atas $\gamma_r(B_n^3) \leq n$. Pertama dibuktikan bahwa batas bawah $\gamma_r(B_n^3) \geq n$. Asumsikan $\gamma_r(B_n^3) < n$, ambil $\gamma_r(B_n^3) = n - 1$. Terdapat beberapa kemungkinan penempatan titik-titik sebagai anggota himpunan D di graf buku segitiga B_n^3 sebagai berikut.

Ambil $D = \{y_1, y_2\} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{n-3}\}$. Berdasarkan hasil konstruksi tersebut, semua titik terdominasi oleh titik-titik yang merupakan anggota himpunan D karena $y_1 \sim x_1, x_2, \dots, x_n$, namun terdapat titik yang memiliki representasi yang sama yaitu $r(x_n) = r(x_{n-1}) = r(x_{n-2})$. Sehingga D bukan merupakan *resolving dominating set*. Karena $\gamma_r(B_n^3) = n - 1$ tidak memenuhi definisi *resolving domination number*, maka $\gamma_r(B_n^3) = n - 1$ salah dan pengandaian $\gamma_r(B_n^3) < n$ terbukti salah.

Ambil $D = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$. Berdasarkan hasil konstruksi di atas, terdapat titik yang tidak terdominasi oleh himpunan D , yaitu titik x_n karena x_n tidak bertetangga dengan $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Selain itu terdapat titik yang memiliki representasi yang sama, yaitu $r(y_1) = r(y_2)$. Sehingga D bukan merupakan *resolving dominating set*. Karena $\gamma_r(B_n^3) = n - 1$ tidak memenuhi definisi *resolving domination number*, maka $\gamma_r(B_n^3) = n - 1$ salah dan pengandaian $\gamma_r(B_n^3) < n$ terbukti salah.

Ambil $D = \{y_1\} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{n-2}\}$. Berdasarkan hasil konstruksi di atas, semua titik terdominasi oleh titik yang merupakan anggota himpunan D karena $y_1 \sim x_1, x_2, \dots, x_n$, namun terdapat titik yang mempunyai representasi yang sama yaitu $r(x_{n-1}|D) = r(x_n|D)$. Sehingga D bukan merupakan *resolving dominating set*. Karena $\gamma_r(B_n^3) = n - 1$ tidak memenuhi definisi *resolving domination number*, maka $\gamma_r(B_n^3) = n - 1$ salah dan menurut Lemma 1 jika $n - 1$ bukan *dominating set*, maka $n - 2$ juga bukan *dominating set*, sehingga pengandaian $\gamma_r(B_n^3) < n$ terbukti salah.

Selanjutnya dibuktikan batas atas $\gamma_r(B_n^3) \leq n$. Ambil himpunan $D = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} \cup \{y_1\}$ sehingga didapatkan representasi titik sebagai berikut.

$$r(x_n|D) = (1, \underbrace{2, \dots, 2}_{n-1})$$

$$r(y_2|D) = (\underbrace{1, \dots, 1}_n)$$

Berdasarkan Lemma 2, $r(y_1) \neq r(x_i, 1 \leq i \leq n - 1)$, sehingga tidak ada representasi yang sama pada semua titik di B_n^3 . Semua titik pada B_n^3 terdominasi, karena $y_1 \sim y_2$, dan $y_1 \sim x_i, 1 \leq i \leq n$. Jadi D adalah *resolving dominating set*, sehingga didapatkan $\gamma_r(B_n^3) = n$. $\square$

Teorema 2. Untuk graf buku segiempat B_n^4 , dengan $n \geq 3$, $\gamma_r(B_n^4) = n + 1$.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $\gamma_r(B_n^4) = n + 1$, perlu dibuktikan batas bawah $\gamma_r(B_n^4) \geq n + 1$ dan batas atas $\gamma_r(B_n^4) \leq n + 1$. Pertama dibuktikan bahwa batas bawah $\gamma_r(B_n^4) \geq n + 1$. Asumsikan $\gamma_r(B_n^4) < n + 1$, ambil $\gamma_r(B_n^4) = n$. Terdapat beberapa kemungkinan penempatan titik-titik sebagai anggota himpunan D di graf buku segiempat (B_n^4) sebagai berikut.

Ambil $D = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}\}$. Berdasarkan hasil konstruksi tersebut, terdapat titik yang tidak terdominasi oleh himpunan D , yaitu titik y_1 karena tidak bertetangga

dengan titik $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}\}$. Sehingga D bukan merupakan *resolving dominating set*. Karena $\gamma_r(B_n^4) = n$ tidak memenuhi definisi *resolving domination number*, maka $\gamma_r(B_n^4) = n$ salah dan pengandaian $\gamma_r(B_n^4) < n + 1$ terbukti salah.

Ambil $D = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n-2}\} \cup \{y_1, y_2\}$. Berdasarkan hasil konstruksi tersebut, terdapat titik yang memiliki representasi yang sama, yaitu titik $r(x_{2n}) = r(x_{2n-1})$. Sehingga D bukan merupakan *resolving dominating set*. Karena $\gamma_r(B_n^4) = n$ tidak memenuhi definisi *resolving domination number*, maka $\gamma_r(B_n^4) = n$ salah dan pengandaian $\gamma_r(B_n^4) < n + 1$ terbukti salah.

Ambil $D = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n-1}\} \cup \{y_1\}$. Berdasarkan hasil konstruksi tersebut, terdapat titik yang tidak terdominasi oleh anggota himpunan D yaitu titik x_{2n} , karena titik x_{2n} tidak bertetangga dengan titik y_1 . Sehingga D bukan *resolving dominating set*. Karena $\gamma_r(B_n^4) = n$ tidak memenuhi definisi *resolving domination number*, maka $\gamma_r(B_n^4) = n$ salah dan menurut Lemma 1 jika n bukan *resolving dominating set*, maka $n - 1$ juga bukan *resolving dominating set*, jadi pengandaian $\gamma_r(B_n^4) < n + 1$ terbukti salah. sehingga didapatkan $\gamma_r(B_n^4) = n + 1$.

Selanjutnya dibuktikan batas atas $\gamma_r(B_n^4) \leq n + 1$. Ambil himpunan $D = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}\} \cup \{y_1\}$ sehingga didapatkan representasi titik sebagai berikut.

$$r(x_i|D) = (\underbrace{3, \dots, 3}_{i-1}, \underbrace{1, 3, \dots, 3}_{n-i}, 1)_{n+1}$$

syarat: $\{1 \leq i \leq n\}$

$$r(y_2|D) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n+1})$$

Berdasarkan Lemma 2, $r(y_1) \neq r(x_i, n + 1 \leq i \leq 2n)$, sehingga semua titik pada B_n^4 memiliki representasi yang berbeda. Semua titik di graf buku segiempat B_n^4 terdominasi karena $y_1 \sim y_2, y_1 \sim x_i, 1 \leq i \leq n$. Jadi D adalah *resolving dominating set*, sehingga didapatkan $\gamma_r(B_n^4) = n + 1$. $\square$

Teorema 3. Untuk graf buku segilima B_n^5 , dengan $n \geq 3$, $\gamma_r(B_n^5) = n + 1$.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $\gamma_r(B_n^5) = n + 1$, perlu dibuktikan batas bawah $\gamma_r(B_n^5) \geq n + 1$ dan batas atas $\gamma_r(B_n^5) \leq n + 1$. Pertama dibuktikan bahwa batas bawah $\gamma_r(B_n^5) \geq n + 1$. Asumsikan $\gamma_r(B_n^5) < n + 1$, ambil $\gamma_r(B_n^5) = n$. Terdapat beberapa kemungkinan penempatan titik-titik sebagai anggota himpunan D di graf buku segilima (B_n^5) sebagai berikut.

Ambil $D = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}\}$. Berdasarkan hasil konstruksi tersebut, terdapat titik yang tidak terdominasi oleh himpunan D , yaitu titik y_1 , dan y_2 . Sehingga D bukan merupakan *resolving dominating set*. Karena $\gamma_r(B_n^5) = n$ tidak memenuhi definisi *resolving domination number*, maka $\gamma_r(B_n^5) = n$ salah dan pengandaian $\gamma_r(B_n^5) < n + 1$ terbukti salah.

Ambil $D = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n-2}\} \cup \{y_1, y_2\}$. Berdasarkan hasil konstruksi tersebut, terdapat titik yang tidak terdominasi oleh himpunan D , yaitu titik x_{2n-1} dan x_{2n} . Sehingga D bukan merupakan *resolving dominating set*. Karena $\gamma_r(B_n^5) = n$ tidak memenuhi definisi *resolving domination number*, maka $\gamma_r(B_n^5) = n$ salah dan pengandaian $\gamma_r(B_n^5) < n + 1$ terbukti salah.

Ambil $D = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n-1}\} \cup \{y_1\}$. Berdasarkan hasil konstruksi tersebut, terdapat titik yang tidak terdominasi oleh anggota himpunan D , yaitu titik x_{2n} . Sehingga D bukan merupakan *resolving dominating set*. Karena $\gamma_r(B_n^5) = n$ tidak memenuhi definisi *resolving domination number*, maka $\gamma_r(B_n^5) = n$ salah dan menurut Lemma 1 jika n bukan *resolving dominating set*, maka $n-1$ juga bukan *resolving dominating set*, jadi pengandaian $\gamma_r(B_n^5) < n+1$ terbukti salah, sehingga didapatkan $\gamma_r(B_n^5) \geq n+1$.

Selanjutnya dibuktikan batas atas dari *resolving domination number* dari graf buku segilima $\gamma_r(B_n^5) \leq n+1$. Ambil himpunan $D = \{x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots, x_{3n}\} \cup \{y_1\}$ sehingga didapatkan representasi titik sebagai berikut.

$$r(x_i|D) = \underbrace{(3, \dots, 3, 2, 3, \dots, 3, 1)}_{n+1}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{i-1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n-i}$

syarat: $\{1 \leq i \leq n\}$

$$r(x_i|D) = \underbrace{(3, \dots, 3, 1, 3, \dots, 3, 2)}_{n+1}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{i-4} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2n-i}$

syarat: $\{(n+1) \leq i \leq 2n\}$

$$r(y_2|D) = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{n+1}$$

Berdasarkan Lemma 2 $r(y_1) \neq r(x_i, 2n+1 \leq i \leq 3n)$, sehingga semua titik pada B_n^5 memiliki representasi yang berbeda. Semua titik di graf buku segilima B_n^5 terdominasi. Jadi D adalah *resolving dominating set*, sehingga didapatkan $\gamma_r(B_n^5) = n+1$. $\square$

Teorema 4. Graf buku segienam B_n^6 , dengan $n \geq 3$, $\gamma_r(B_n^6) = n+1$.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $\gamma_r(B_n^6) = n+1$, perlu dibuktikan batas bawah $\gamma_r(B_n^6) \geq n+1$ dan batas atas $\gamma_r(B_n^6) \leq n+1$. Pertama dibuktikan bahwa batas bawah $\gamma_r(B_n^6) \geq n+1$. Asumsikan $\gamma_r(B_n^6) < n+1$, ambil $\gamma_r(B_n^6) = n$. Terdapat beberapa kemungkinan penempatan titik-titik sebagai anggota himpunan D di graf buku segienam (B_n^6) sebagai berikut.

Ambil $D = \{x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots, x_{3n}\} \cup \{y_1, y_2\}$. Berdasarkan hasil konstruksi di atas, terdapat titik yang tidak terdominasi oleh himpunan D , yaitu titik $x_{n+2}, x_{n+3}, \dots, x_{2n}$ dan $x_{2n+2}, x_{2n+3}, \dots, x_{3n}$. Sehingga D bukan merupakan *resolving dominating set*. Karena $\gamma_r(B_n^6) = n$ tidak memenuhi definisi *resolving domination number*, maka $\gamma_r(B_n^6) = n$ salah dan pengandaian $\gamma_r(B_n^6) < n+1$ terbukti salah.

Ambil $D = \{x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots, x_{3n}\}$. Berdasarkan hasil konstruksi tersebut, terdapat titik yang tidak terdominasi oleh himpunan D , yaitu titik y_1, y_2 , dan $x_i, 1 \leq i \leq n$. Sehingga D bukan merupakan *resolving dominating set*. Karena $\gamma_r(B_n^6) = n$ tidak memenuhi definisi *resolving domination number*, maka $\gamma_r(B_n^6) = n$ salah dan pengandaian $\gamma_r(B_n^6) < n+1$ terbukti salah.

Ambil $D = \{x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots, x_{3n-1}\} \cup \{y_1\}$. Berdasarkan hasil konstruksi tersebut, terdapat titik yang tidak terdominasi oleh anggota himpunan D , yaitu titik x_{2n-1}, x_{3n-1} , dan x_{4n-1} .

Sehingga D bukan merupakan *resolving dominating set*. Karena $\gamma_r(B_n^6) = n$ tidak memenuhi definisi *resolving domination number*, maka $\gamma_r(B_n^6) = n$ salah dan menurut

Lemma 1 jika n bukan *resolving dominating set*, maka $n - 1$ juga bukan *resolving dominating set*, dan pengandaian $\gamma_r(B_n^6) < n + 1$ terbukti salah. Jadi $\gamma_r(B_n^6) \geq n + 1$.

Selanjutnya dibuktikan batas atas dari *resolving domination number* dari graf buku segienam $\gamma_r(B_n^6) \leq n + 1$. Ambil himpunan $D = \{x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots, x_{3n}\} \cup \{y_1\}$ sehingga didapatkan representasi titik sebagai berikut.

$$r(x_i|D) = (\underbrace{4, \dots, 4}_{i-1}, \underbrace{2, 4, \dots, 4}_{n-i}, 1)$$

$n+1$

syarat: $\{1 \leq i \leq n\}$

$$r(x_i|D) = (\underbrace{5, \dots, 5}_{i-4}, \underbrace{1, 5, \dots, 5}_{2n-i}, 2)$$

$n+1$

syarat: $\{(n+1) \leq i \leq 2n\}$

$$r(x_i|D) = (\underbrace{3, \dots, 3}_{i-10}, \underbrace{1, 3, \dots, 3}_{4n-i}, 2)$$

$n+1$

syarat: $\{(3n+1) \leq i \leq 4n\}$

$$r(y_2|D) = (\underbrace{2, \dots, 2}_n, 1)$$

$n+1$

Berdasarkan Lemma 2, $r(y_1) \neq r(x_i, 2n+1 \leq i \leq 3n)$, sehingga semua titik pada B_n^6 memiliki representasi yang berbeda. Semua titik di graf buku segienam B_n^4 terdominasi. Jadi D adalah *resolving dominating set*, sehingga didapatkan $\gamma_r(B_n^6) = n + 1$. $\square$

Teorema 5. Untuk graf buku segitujuh B_n^7 , dengan $n \geq 3$, $\gamma_r(B_n^7) = n + 2$.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $\gamma_r(B_n^7) = n+2$, perlu dibuktikan batas bawah $\gamma_r(B_n^7) \geq n + 2$ dan batas atas $\gamma_r(B_n^7) \leq n + 2$. Pertama dibuktikan batas bawah $\gamma_r(B_n^7) \geq n + 2$. Asumsikan $\gamma_r(B_n^7) < n + 2$, ambil $\gamma_r(B_n^7) = n + 1$. Terdapat beberapa kemungkinan penempatan titik-titik sebagai anggota himpunan D di graf buku segienam (B_n^6) sebagai berikut.

Ambil $D = \{x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots, x_{3n}\} \cup \{y_1\}$. Berdasarkan hasil konstruksi tersebut, terdapat titik yang tidak terdominasi oleh himpunan D , yaitu titik $(x_i, 4n+1 \leq i \leq 5n)$. Sehingga D bukan merupakan *resolving dominating set*. Karena $\gamma_r(B_n^7) = n + 1$ tidak memenuhi definisi *resolving domination number*, maka $\gamma_r(B_n^7) = n + 1$ salah dan pengandaian $\gamma_r(B_n^7) < n + 2$ terbukti salah.

Ambil $D = \{x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots, x_{3n-1}\} \cup \{y_1, y_2\}$. Berdasarkan hasil konstruksi tersebut, terdapat titik yang tidak terdominasi oleh himpunan D , yaitu titik x_{2n-1}, x_{3n-1} , dan x_{4n-1} . Sehingga D bukan merupakan *resolving dominating set*. Karena $\gamma_r(B_n^7) = n + 1$ tidak memenuhi definisi *resolving domination number*, maka $\gamma_r(B_n^7) = n + 1$ salah dan pengandaian $\gamma_r(B_n^7) < n + 2$ terbukti salah.

Ambil $D = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}\} \cup \{x_{3n+1}, x_{3n+2}, \dots, x_{4n+2}\}$. Berdasarkan hasil konstruksi tersebut, terdapat titik yang tidak terdominasi oleh anggota himpunan D , yaitu titik $y_1, y_2, x_{4n-1}, x_{4n}, x_{5n-1}$, dan x_{5n} . Sehingga D bukan merupakan *resolving dominating set*. Karena $\gamma_r(B_n^7) = n + 1$ tidak memenuhi definisi *resolving domination number*, maka $\gamma_r(B_n^7) = n + 1$ salah dan menurut Lemma 1 jika $n + 1$ bukan *resolving dominating set*, maka n juga bukan *resolving dominating set*. Jadi pengandaian $\gamma_r(B_n^7) < n + 2$ terbukti salah, sehingga didapatkan $\gamma_r(B_n^7) \geq n + 2$.

Selanjutnya dibuktikan batas atas $\gamma_r(B_n^7) \leq n + 2$. Ambil himpunan $D = \{x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots, x_{3n}\} \cup \{y_1, y_2\}$ sehingga didapatkan representasi titik sebagai berikut.

$$r(x_i|D) = \underbrace{(4, \dots, 4, 2, 4, \dots, 4, 1, 2)}_{\substack{i-1 \quad \text{---} n-i \text{---} \\ n+2}}$$

syarat: $\{1 \leq i \leq n\}$

$$r(x_i|D) = \underbrace{(5, \dots, 5, 1, 5, \dots, 5, 2, 3)}_{\substack{i-4 \quad \quad \quad 2n-i \\ n+2}}$$

syarat: $\{(n+1) \leq i \leq 2n\}$

$$r(x_i|D) = \underbrace{(5, \dots, 5, 1, 5, \dots, 5, 3, 2)}_{\substack{i-10 \quad \quad \quad 4n-i \\ n+2}}$$

syarat: $\{(3n+1) \leq i \leq 4n\}$

$$r(x_i|D) = \underbrace{(4, \dots, 4, 2, 4, \dots, 4, 2, 1)}_{\substack{i-12 \quad \quad \quad 4n-i \\ n+2}}$$

syarat: $\{(4n+1) \leq i \leq 5n\}$

Berdasarkan Lemma 2, $r(y_1) \neq r(y_2) \neq r(x_i, 2n+1 \leq i \leq 3n)$, sehingga semua titik pada B_n^4 memiliki representasi yang berbeda. Semua titik di graf buku segiempat B_n^4 terdominasi. Jadi D adalah *resolving dominating set*, sehingga didapatkan $\gamma_r(B_n^7) = n + 2$.

□

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian, dapat disimpulkan bahwa *Resolving domination number* untuk graf buku segitiga B_n^3 , dengan $n \geq 3$ adalah n . *Resolving domination number* untuk graf buku segiempat B_n^4 , dengan $n \geq 3$ adalah $n + 1$. *Resolving domination number* untuk graf buku segilima B_n^5 , dengan $n \geq 3$ adalah $n + 1$. *Resolving domination number* untuk graf buku segienam B_n^6 , dengan $n \geq 3$ adalah $n + 1$. *Resolving domination number* untuk graf buku segitujuh B_n^7 , dengan $n \geq 3$ adalah $n + 2$.

Berdasarkan hasil penelitian belum ditemukan *resolving domination number* pada keluarga graf buku secara umum, sehingga peneliti memiliki open problem sebagai berikut:

Masalah terbuka 1 Berapakah *resolving domination number* pada keluarga graf buku B_n^m ?

Referensi

- [1] Hernando, C. dan Nov, C. O. 2016. Resolving dominating partitions in graphs. 1–22.
- [2] Udupa, S. dan Bhat, R. S. 2019. Strong (Weak) VV-Dominating Set of a Graph. *Malaysian Journal of Science* **38**(12):24–33.
- [3] Hayyu A. N., Dafik, I. M. Tirta, R. Adawiyah, R. M. Prihandini. 2020. Resolving domination number of helm graph and it's operation. *J. Phys.: Conf. Ser.* **1465** 012022.
- [4] Mardiya, R. T., A. I. Kristiana dan Dafik. Resolving Domination Numbers of Family of Tree Graph. *IJAAR* **4**(1):27-30.
- [5] Mahmudah, M. dan Dafik. 2014 Rainbow Connection hasil operasi graf. *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014 Universitas Jember* 174-183.
- [6] Awanis, Z.Y., Salman, A., Saputro, A.W., Baca, M., and Fenovcikova, A. S. 2020. The strong 3-rainbow index of edge-amalgamation of some graphs. *Turkish Journal of Mathematics* **44**:446-462.
- [7] Rahmadiyah, V., Utoyo, M. I., dan Susilowati, L. 2020. Hubungan Dimensi Metrik Ketetangaan Lokal Graf Hasil Operasi Kali Korona. *Contemporary Mathematics and Applications* **2**(1):13-22.
- [8] Permana, A. B. dan Darmaji. 2012. Dimensi metrik graf pohon bentuk tertentu. *Jurnal Teknik Pomits* **1**(1): 1–4.