CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 2, No 2, 2021
DOI:
10.25037/cgantjma.v2i2.59

Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal pada Keluarga Graf *Unicyclic*

Khilyah Munawaroh[2], Arika Indah Kristiana[1,2], Ermita Rizki Albirri[1,2], Dafik[1,2], Robiatul Adawiyah[1,2].
[1]CGANT - University of Jember
[2]Departement of Mathematics Education - University of Jember
11mipa2.12.khilyahmunawaroh@gmail.com, arika.fkip@unej.ac.id, ermitara@unej.ac.id, d.dafik@unej.ac.id, robiatul@unej.ac.id

Abstract

In this research is a development of local irregularity vertex coloring of graph. The based on definition, as follows: $l : V(G) \longrightarrow \{1, 2, ..., k\}$ is called vertex irregular k-labelling and $w : V(G) \longrightarrow N$ where $w(u) = \Sigma_{v\in N(u)} l(v)$, w is called local irregularity vertex coloring. A condition for w to be a local irregularity vertex coloring, If *opt*(l) = *min*$\{$*maks*(li); li, *vertex labelling function*, and for every $u, v \in E(G), w(u) \neq w(v)$. The chromatic number local irregularity vertex coloring is denoted by $\chi_{lis}(G)$. In this paper, the researchers will discuss of local irregularity vertex coloring of related unicyclic graphs and we have found the exact value of their chromatic number local irregularity, namely cricket graph, net graph, tadpole graph, *peach* graph, and bull graph.

Keywords : Vertex coloring, Local irregularity, Unicyclic graphs.
Mathematics Subject Classification: 05C15

Pendahuluan

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan tak kosong (V, E) dimana V merupakan himpunan tak kosong dari elemen yang disebut titik *(vertex)* dan E merupakan himpunan sisi (boleh himpunan kosong) dari pasangan tak terurut dari dua titik (v_1, v_2), dimana $v_1, v_2 \in V$ yang disebut dengan sisi *(edge)*. Himpunan titik *(vertex)* dinotasikan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$. Sedangkan himpunan sisi *(edge)* yang dinotasikan dengan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ [8].
Salah satu topik teori graf adalah pewarnaan graf. Pewarnaan titik merupakan pemberian warna yang berbeda pada setiap titik yang bertetangga sehingga titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal merupakan gabungan dari konsep pewarnaan titik dan pelabelan ketakteraturan jarak, yang dilakukan dengan meminimumkan label titik dan meminimumkan jumlah warna titik pada graf G. Konsep pewarnaan titik ketakteraturan lokal ini pertama kali didefinisikan oleh A. I. Kristiana, yaitu [2]: Misalkan $l : V(G) \longrightarrow \{1, 2, ..., k\}$ merupakan fungsi label dan fungsi bobot $w : V(G) \longrightarrow N$ didefinisikan sebagai $w(u) = \Sigma_{v\in N(u)} l(v)$. Fungsi w disebut pewarnaan titik ketakteraturan lokal, jika *opt*(l) = *min*$\{$*maks*(li); li, *fungsi label*, dan untuk setiap $u, v \in E(G), w(u) \neq w(v)$. Bilangan kromatik ketakteraturan lokal yang dinotasikan dengan $\chi_{lis}(G)$ didefinisikan sebagai $\chi_{lis}(G) = min\{|w(V(G))|; w$ pewarnaan titik ketakteraturan lokal$\}$.

Lemma 1. *Untuk graf G sederhana dan terbuhung,* $\chi_{lis}(G) \geq \chi(G)$.

Observasi 1. Graf terhubung G, apabila suatu titik yang berdekatan memiliki derajat yang berbeda, maka $opt(l) = 1$.
Observasi 2. Graf terhubung G, apabila suatu titik yang berdekatan memiliki derajat yang sama, maka $opt(l) \geq 2$.

Penelitian terakhir yang diteliti oleh Umilasari [3] memperoleh hasil bilangan kromatik dari beberapa graf yaitu graf shackle (C_n, v, m), graf shackle (S_n, v, m), graf shackle (K_n, v, m), dan graf shackle (W_n, v, m).

Hasil Penelitian

Pada penelitian ini, kami akan mendiskusikan terkait bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada keluarga graf *unicyclic*.

Teorema 2.1 Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf *cricket* $(Cr_{n,m})$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ adalah $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) = 4$.

Bukti. Let $(Cr_{n,m})$ for $n \geq 3$ and $m \geq 3$ merupakan cricket graph. Kemudian kardinalitas dari graf *cricket* $(Cr_{n,m})$ adalah himpunan titik $V(Cr_{n,m}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq m\}$, dan himpunan sisi $E(Cr_{n,m}) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{x_1 y_2\} \cup \{x_n y_2\}$. Misalkan setiap titik dilabeli dengan 1, maka didapatkan $w(x_i) = l(x_{i-1}) + l(x_{i+1}) = 1+1 = 2$ dan $w(x_{i+1}) = l(x_i) + l(x_{i+2}) = 1+1 = 2$, dimana $w(x_i) = w(x_{i+1})$. Hal tersebut kontadiksi dengan definisi [2], dimana $x_i x_{i+1} \in E(Cr_{n,m})$, $w(x_i) \neq w(x_{i+1})$. Sehingga label maksimum dari graf *cricket* adalah *opt*$(l) \geq 2$. Berdasarkan Lemma 1. batas bawah untuk bilangan kromatik ketakteraturan lokal $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) \geq \chi(Cr_{n,m}) = 2$. Sehingga, batas bawah bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf *cricket* $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) \geq 2$.

Kasus 1. Untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$ dan $m \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 3$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *cricket* $(Cr_{n,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(Cr_{n,m}) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 2\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ i \equiv 2\ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$l(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j \not\equiv 1\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 2 \leq i \leq n;\ n\ genap \\ 3, & untuk\ 1 \leq i \leq n;\ n\ ganjil \end{cases}$$

$$w(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j = 1,\ j = m \\ 2, & untuk\ 3 \leq j \leq m;\ m\ ganjil \\ 3, & untuk\ 4 \leq j \leq m;\ m\ genap \\ 5, & untuk\ j = 2 \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(Cr_{n,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3, ..., n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = y_j$ dan $v = y_{j,j+1}$ dimana $j = 1, 2, 3, ..., m.$,

$w(y_j) \neq w(y_{j,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *cricket* $(Cr_{n,m})$ untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$ dan $m \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 3$ yaitu $w(Cr_{n,m} = \{1,2,3,5\})$, sehingga $|w(V(Cr_{n,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf cricket $(Cr_{n,m})$ untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$ dan $m \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 3$ adalah $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf cricket $(Cr_{n,m})$ untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$ dan $m \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 3$ adalah $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) = 4$.

Kasus 2. Untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$, dan $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 6$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *cricket* $(Cr_{n,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(Cr_{n,m}) \longrightarrow \{1,2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 2\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ i \equiv 2\ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$l(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j \not\equiv 0\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ j \equiv 0\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 2 \leq i \leq n;\ n\ genap \\ 3, & untuk\ 1 \leq i \leq n;\ n\ ganjil \end{cases}$$

$$w(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j = 1,\ j = m \\ 2, & untuk\ 4 \leq j \leq m;\ m\ genap \\ 3, & untuk\ 3 \leq j \leq m;\ m\ ganjil \\ 5, & untuk\ j = 2 \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(Cr_{n,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1,2,3,...,n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = y_j$ dan $v = y_{j,j+1}$ dimana $j = 1,2,3,...,m.$, $w(y_j) \neq w(y_{j,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *cricket* $(Cr_{n,m})$ untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$, dan $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 6$ yaitu $w(Cr_{n,m} = \{1,2,3,5\})$, sehingga $|w(V(Cr_{n,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf cricket $(Cr_{n,m})$ untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$ dan $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 6$ adalah $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf cricket $(Cr_{n,m})$ untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$ dan $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 6$ adalah $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) = 4$.

Kasus 3. Untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 3$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *cricket* $(Cr_{n,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(Cr_{n,m}) \longrightarrow \{1,2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 3\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ i \equiv 3\ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$l(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j \not\equiv 1\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 1 \leq i \leq n;\ n\ ganjil \\ 3, & untuk\ 2 \leq i \leq n;\ n\ genap \end{cases}$$

$$w(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j = 1,\ j = m \\ 2, & untuk\ 3 \leq j \leq m;\ m\ ganjil \\ 3, & untuk\ 4 \leq j \leq m;\ m\ genap \\ 5, & untuk\ j = 2 \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(Cr_{n,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3, ..., n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = y_j$ dan $v = y_{j,j+1}$ dimana $j = 1, 2, 3, ..., m.$, $w(y_j) \neq w(y_{j,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *cricket* $(Cr_{n,m})$ untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 3$ yaitu $w(Cr_{n,m} = \{1, 2, 3, 5\})$, sehingga $|w(V(Cr_{n,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf cricket $(Cr_{n,m})$ untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 3$ adalah $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf cricket $(Cr_{n,m})$ untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 3$ adalah $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) = 4$.

Kasus 4. Untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 6$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *cricket* $(Cr_{n,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(Cr_{n,m}) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 3\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ i \equiv 3\ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$l(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j \not\equiv 0\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ j \equiv 0\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 1 \leq i \leq n;\ n\ ganjil \\ 3, & untuk\ 2 \leq i \leq n;\ n\ genap \end{cases}$$

$$w(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j = 1,\ j = m \\ 2, & untuk\ 4 \leq j \leq m;\ m\ genap \\ 3, & untuk\ 3 \leq j \leq m;\ m\ ganjil \\ 5, & untuk\ j = 2 \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(Cr_{n,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3, ..., n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = y_j$ dan $v = y_{j,j+1}$ dimana $j = 1, 2, 3, ..., m.$, $w(y_j) \neq w(y_{j,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *cricket* $(Cr_{n,m})$ untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 6$ yaitu $w(Cr_{n,m} = \{1, 2, 3, 5\})$, sehingga $|w(V(Cr_{n,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf cricket $(Cr_{n,m})$ untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 6$ adalah $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf cricket $(Cr_{n,m})$ untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 6$ adalah $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) = 4$.

Kasus 5. Untuk $n \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 3$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *cricket* $(Cr_{n,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(Cr_{n,m}) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 3\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ i \equiv 3\ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$l(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j \not\equiv 1\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 1 \leq i \leq n;\ n\ ganjil \\ 3, & untuk\ 2 \leq i \leq n;\ n\ genap \end{cases}$$

$$w(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j = 1,\ j = m \\ 2, & untuk\ 3 \leq j \leq m;\ m\ ganjil\} \\ 3, & untuk\ 4 \leq j \leq m;\ m\ genap \\ 4, & untuk\ j = 2 \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(Cr_{n,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3, ..., n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = y_j$ dan $v = y_{j,j+1}$ dimana $j = 1, 2, 3, ..., m.$, $w(y_j) \neq w(y_{j,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *cricket* $(Cr_{n,m})$ untuk $n \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 3$ yaitu $w(Cr_{n,m} = \{1, 2, 3, 4\})$, sehingga $|w(V(Cr_{n,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf cricket $(Cr_{n,m})$ untuk $n \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 3$ adalah $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf cricket $(Cr_{n,m})$ untuk $n \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 3$ adalah $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) = 4$.

Kasus 6. Untuk $n \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 6$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *cricket* $(Cr_{n,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(Cr_{n,m}) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 3\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ i \equiv 3\ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$l(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j \not\equiv 0\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ j \equiv 0\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 1 \leq i \leq n;\ n\ ganjil \\ 3, & untuk\ 2 \leq i \leq n;\ n\ genap \end{cases}$$

$$w(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j = 1,\ j = m \\ 2, & untuk\ 4 \leq j \leq m;\ m\ genap \\ 3, & untuk\ 3 \leq j \leq m;\ m\ ganjil \\ 4, & untuk\ j = 2 \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(Cr_{n,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3, ..., n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = y_j$ dan $v = y_{j,j+1}$ dimana $j = 1, 2, 3, ..., m.$, $w(y_j) \neq w(y_{j,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *cricket* $(Cr_{n,m})$ untuk $n \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 6$ yaitu $w(Cr_{n,m} = \{1, 2, 3, 4\})$, sehingga $|w(V(Cr_{n,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf cricket $(Cr_{n,m})$ untuk $n \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 6$ adalah $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf cricket $(Cr_{n,m})$ untuk $n \not\equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 6$ adalah $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) = 4$.

Teorema 2.2 Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf *net* $(N_{3,m})$ untuk $m \geq 3$ adalah $\chi_{lis}(N_{3,m}) = 4$.

Bukti. Misalkan $(N_{3,m})$ for $m \geq 3$ merupakan graf *net*. Kemudian kardinalitas dari graf *net* $(N_{3,m})$ adalah himpunan titik $V(N_{3,m}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(N_{3,m}) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i x_n\} \cup \{x_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$. Misalkan setiap titik dilabeli dengan 1, maka didapatkan $w(x_i) = l(x_{i-1}) + l(x_{i+1}) = 1 + 1 = 2$ dan $w(x_{i+1}) = l(x_i) + l(x_{i+2}) = 1 + 1 = 2$, dimana $w(x_i) = w(x_{i+1})$. Hal tersebut kontadiksi dengan definisi [2], dimana $x_i x_{i+1} \in E(N_{3,m})$, $w(x_i) \neq w(x_{i+1})$. Sehingga label maksimum dari graf *net* adalah *opt*$(l) \geq 2$.
Berdasarkan Lemma 1. batas bawah untuk bilangan kromatik ketakteraturan lokal $\chi_{lis}(N_{3,m}) \geq \chi(N_{3,m}) = 2$. Sehingga, batas bawah bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf $\chi_{lis}(N_{3,m}) \geq 2$.
Selanjutnya, akan ditunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal $(N_{3,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(N_{3,m}) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = 1, \ untuk \ 1 \leq i \leq 3$$

$$l(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & untuk \ i = 1, \ 1 \leq j \leq m \\ & atau \ i = 2, \ 1 \leq j \leq m-1 \\ & atau \ i = 3, \ 1 \leq j \leq m-2 \\ 2, & untuk \ i = 2, \ m \\ & atau \ i = 3, \ m-1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Dari fungsi label diatas, diperoleh *opt*$(l) = 2$ dan diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2 + m, & untuk \ i = 1 \\ 3 + m, & untuk \ i = 2 \\ 4 + m, & untuk \ i = 3 \end{cases}$$

$$w(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & untuk \ i = 1, \ 1 \leq j \leq m \\ & atau \ i = 2, \ 1 \leq j \leq m \\ & atau \ i = 3, \ 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(N_{3,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$ dan ambil $u = x_i$ dan $v = x_{i,j}$ dimana $i = 1, 2, 3$, dan $j = 1, 2, 3, ...m$, $w(x_i) \neq w(x_{i,j})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *net* $(N_{3,m})$ yaitu $w(N_{3,m} = \{1, (2 + m), (3 + m), (4 + m)\})$, sehingga $|w(V(N_{3,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf net $(N_{3,m})$ adalah $\chi_{lis}(N_{3,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf net $(N_{3,m})$ adalah $\chi_{lis}(N_{3,m}) = 4$.

Teorema 2.3 Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf *tadpole* $(T_{n,m})$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) = 4$.

Bukti. Misalkan $(T_{n,m})$ for $n \geq 3$ and $m \geq 2$ merupakan graf *tadpole*. Kemudian kardinalitas dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$ adalah himpunan titik $V(T_{n,m}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq m\}$, dan himpunan sisi $E(T_{n,m}) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{x_1 y_1\} \cup \{x_1 x_n\}$.
Misalkan setiap titik dilabeli dengan 1, maka didapatkan $w(x_i) = l(x_{i-1}) + l(x_{i+1}) = 1 + 1 = 2$ dan $w(x_{i+1}) = l(x_i) + l(x_{i+2}) = 1 + 1 = 2$, dimana $w(x_i) = w(x_{i+1})$. Hal tersebut kontadiksi dengan definisi [2], dimana $x_i x_{i+1} \in E(T_{n,m})$, $w(x_i) \neq w(x_{i+1})$. Sehingga label maksimum dari graf *tadpole* adalah *opt*$(l) \geq 2$.

Berdasarkan Lemma 1. batas bawah untuk bilangan kromatik ketakteraturan lokal $chi_{lis}(T_{n,m}) \geq \chi(T_{n,m}) = 2$. Sehingga, batas bawah bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf *tadpole* $\chi_{lis}(T_{n,m}) \geq 2$.

Kasus 1. Untuk $n \equiv 1\ (mod\ 4);\ n \geq 5$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(T_{n,m}) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 3\ (mod\ 4) \\ & untuk\ i = n-1 \\ 2, & untuk\ i \equiv 3\ (mod\ 4) \\ & untuk\ i = n \end{cases}$$

$$l(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j \not\equiv 3\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 3 \leq i \leq n;\ n\ ganjil \\ 3, & untuk\ 2 \leq i \leq n-3;\ n\ genap \\ 4, & untuk\ i = 1,\ i = n-1 \end{cases}$$

$$w(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ i = m \\ 2, & untuk\ 1 \leq j \leq m;\ m\ ganjil \\ 3, & untuk\ 2 \leq j \leq m;\ m\ genap \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(T_{n,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3, ..., n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = y_j$ dan $v = y_{j,j+1}$ dimana $j = 1, 2, 3, ..., m.$, $w(y_j) \neq w(y_{j,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 1\ (mod\ 4);\ n \geq 5$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ yaitu $w(T_{n,m} = \{1, 2, 3, 4\})$, sehingga $|w(V(T_{n,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 1\ (mod\ 4);\ n \geq 5$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 1\ (mod\ 4);\ n \geq 5$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) = 4$.

Kasus 2. Untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(T_{n,m}) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 3\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ i \equiv 3\ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$l(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j \not\equiv 3\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 3 \leq i \leq n;\ n\ ganjil \\ 3, & untuk\ 2 \leq i \leq n;\ n\ genap \\ 4, & untuk\ i = 1 \end{cases}$$

$$w(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ i = m \\ 2, & untuk\ 1 \leq j \leq m;\ m\ ganjil \\ 3, & untuk\ 2 \leq j \leq m;\ m\ genap \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(T_{n,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3, ..., n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = y_j$ dan $v = y_{j,j+1}$ dimana $j = 1, 2, 3, ..., m.$, $w(y_j) \neq w(y_{j,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ yaitu $w(T_{n,m} = \{1, 2, 3, 4\})$, sehingga $|w(V(T_{n,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) = 4$.

Kasus 3. Untuk $n \equiv 1\ (mod\ 4);\ n \geq 5$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(T_{n,m}) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 3\ (mod\ 4) \\ & untuk\ i = n-1 \\ 2, & untuk\ i \equiv 3\ (mod\ 4) \\ & untuk\ i = n \end{cases}$$

$$l(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j \not\equiv 2\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 3 \leq i \leq n;\ n\ ganjil \\ 3, & untuk\ 2 \leq i \leq n-3;\ n\ genap \\ 4, & untuk\ i = 1,\ i = n-1 \end{cases}$$

$$w(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ i = m \\ 2, & untuk\ 2 \leq j \leq m;\ m\ genap \\ 3, & untuk\ 1 \leq j \leq m;\ m\ ganjil \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(T_{n,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3, ..., n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = y_j$ dan $v = y_{j,j+1}$ dimana $j = 1, 2, 3, ..., m.$, $w(y_j) \neq w(y_{j,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 1\ (mod\ 4);\ n \geq 5$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$ yaitu $w(T_{n,m} = \{1, 2, 3, 4\})$, sehingga $|w(V(T_{n,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 1\ (mod\ 4);\ n \geq 5$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 1\ (mod\ 4);\ n \geq 5$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$ adalah$\chi_{lis}(T_{n,m}) = 4$.

Kasus 4. Untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(T_{n,m}) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 3\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ i \equiv 3\ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$l(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j \not\equiv 2\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 3 \leq i \leq n;\ n\ ganjil \\ 3, & untuk\ 2 \leq i \leq n;\ n\ genap \\ 4, & untuk\ i = 1 \end{cases}$$

$$w(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ i = m \\ 2, & untuk\ 2 \leq j \leq m;\ m\ genap \\ 3, & untuk\ 1 \leq j \leq m;\ m\ ganjil \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(T_{n,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3, ..., n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = y_j$ dan $v = y_{j,j+1}$ dimana $j = 1, 2, 3, ..., m.$, $w(y_j) \neq w(y_{j,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$ yaitu $w(T_{n,m} = \{1, 2, 3, 4\})$, sehingga $|w(V(T_{n,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) = 4$.

Kasus 5. Untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(T_{n,m}) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 0\ (mod\ 4) \\ & untuk\ i = n - 1 \\ 2, & untuk\ i \equiv 0\ (mod\ 4) \\ & untuk\ i = n \end{cases}$$

$$l(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j \not\equiv 3\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 2 \leq i \leq n;\ n\ genap \\ 3, & untuk\ 3 \leq i \leq n - 3;\ n\ ganjil \\ 4, & untuk\ i = 1,\ i = n - 1 \end{cases}$$

$$w(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ i = m \\ 2, & untuk\ 1 \leq j \leq m;\ m\ ganjil \\ 3, & untuk\ 2 \leq j \leq m;\ m\ genap \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(T_{n,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3, ..., n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = y_j$ dan $v = y_{j,j+1}$ dimana $j = 1, 2, 3, ..., m.$, $w(y_j) \neq w(y_{j,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ yaitu $w(T_{n,m} = \{1, 2, 3, 4\})$, sehingga $|w(V(T_{n,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$

untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) = 4$.

Kasus 6. Untuk $n \equiv 0\ (mod\ 4);\ n \geq 4$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(T_{n,m}) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 0\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ i \equiv 0\ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$l(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j \not\equiv 3\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 2 \leq i \leq n;\ n\ genap \\ 3, & untuk\ 3 \leq i \leq n;\ n\ ganjil \\ 4, & untuk\ i = 1 \end{cases}$$

$$w(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ i = m \\ 2, & untuk\ 1 \leq j \leq m;\ m\ ganjil \\ 3, & untuk\ 2 \leq j \leq m;\ m\ genap \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(T_{n,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3, ..., n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = y_j$ dan $v = y_{j,j+1}$ dimana $j = 1, 2, 3, ..., m.$, $w(y_j) \neq w(y_{j,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 0\ (mod\ 4);\ n \geq 4$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ yaitu $w(T_{n,m} = \{1, 2, 3, 4\})$, sehingga $|w(V(T_{n,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 0\ (mod\ 4);\ n \geq 4$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 0\ (mod\ 4);\ n \geq 4$ dan $m \not\equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) = 4$.

Kasus 7 Untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(T_{n,m}) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 0\ (mod\ 4) \\ & untuk\ i = n - 1 \\ 2, & untuk\ i \equiv 0\ (mod\ 4) \\ & untuk\ i = n \end{cases}$$

$$l(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j \not\equiv 2\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 2 \leq i \leq n;\ n\ ganjil \\ 3, & untuk\ 3 \leq i \leq n - 3;\ n\ genap \\ 4, & untuk\ i = 1,\ i = n - 1 \end{cases}$$

$$w(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ i = m \\ 2, & untuk\ 2 \leq j \leq m;\ m\ genap \\ 3, & untuk\ 1 \leq j \leq m;\ m\ ganjil \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(T_{n,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1,2,3,...,n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = y_j$ dan $v = y_{j,j+1}$ dimana $j = 1,2,3,...,m.$, $w(y_j) \neq w(y_{j,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$ yaitu $w(T_{n,m} = \{1,2,3,4\})$, sehingga $|w(V(T_{n,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 2\ (mod\ 4);\ n \geq 6$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) = 4$.

Kasus 8 Untuk $n \equiv 0\ (mod\ 4);\ n \geq 4$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(T_{n,m}) \longrightarrow \{1,2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 0\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ i \equiv 0\ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$l(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ j \not\equiv 2\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 2 \leq i \leq n;\ n\ genap \\ 3, & untuk\ 3 \leq i \leq n;\ n\ ganjil \\ 4, & untuk\ i = 1 \end{cases}$$

$$w(y_j) = \begin{cases} 1, & untuk\ i = m \\ 2, & untuk\ 2 \leq j \leq m;\ m\ genap \\ 3, & untuk\ 1 \leq j \leq m;\ m\ ganjil \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(T_{n,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1,2,3,...,n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = y_j$ dan $v = y_{j,j+1}$ dimana $j = 1,2,3,...,m.$, $w(y_j) \neq w(y_{j,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *tadpole* $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 0\ (mod\ 4);\ n \geq 4$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$ yaitu $w(T_{n,m} = \{1,2,3,4\})$, sehingga $|w(V(T_{n,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 0\ (mod\ 4);\ n \geq 4$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf tadpole $(T_{n,m})$ untuk $n \equiv 0\ (mod\ 4);\ n \geq 4$ dan $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) = 4$.

Teorema 2.4 Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf *peach* (C_m^n) untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(C_m^n) = 4$.

Bukti. Misalkan (C_m^n) untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ merupakan graf *peach*. Kemudian kardinalitas dari graf *peach* (C_m^n) adalah himpunan titik $V(C_m^n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq m\}$, dan himpunan sisi $E(C_m^n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n y_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_1 x_n\}$. Misalkan setiap titik dilabeli dengan 1, maka didapatkan $w(x_i) = l(x_{i-1}) + l(x_{i+1}) = 1 + 1 = 2$ dan $w(x_{i+1}) = l(x_i) + l(x_{i+2}) = 1 + 1 = 2$, dimana $w(x_i) = w(x_{i+1})$. Hal tersebut kontadiksi dengan definisi [2], dimana $x_i x_{i+1} \in E(C_m^n)$, $w(x_i) \neq w(x_{i+1})$. Sehingga label maksimum dari graf *peach* adalah $opt(l) \geq 2$.
Berdasarkan Lemma 1. batas bawah untuk bilangan kromatik ketakteraturan lokal $\chi_{lis}(C_m^n) \geq \chi(C_m^n) = 2$. Sehingga, batas bawah bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf *peach*

adalah $\chi_{lis}(C_m^n) \geq 2$.

Kasus 1. Untuk $n \equiv 0\ (mod\ 4);\ n \geq 4$ dan $m \geq 2$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *peach* (C_m^n). Didefinisikan fungsi label $l : V(C_m^n) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 0\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ i \equiv 0\ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$l(y_j) = 1,\ untuk\ 1 \leq j \leq m$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 2 \leq i \leq n;\ n\ genap \\ 3, & untuk\ 1 \leq i \leq n-1;\ n\ ganjil \\ 3+m, & untuk\ i = 1 \end{cases}$$

$$w(y_j) = 1,\ untuk\ 1 \leq j \leq m$$

Untuk setiap $uv \in E(C_m^n)$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3, ..., n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = x_i$ dan $v = y_j$ dimana $i = 1$ dan $j = 1, 2, 3, ..., m$, $w(x_i) \neq w(y_j)$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *peach* (C_m^n) untuk $n \equiv 0\ (mod\ 4);\ n \geq 4$ dan $m \geq 2$ yaitu $w(C_m^n) = \{1, 2, 3, 4\}$), sehingga $|w(V(C_m^n))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf peach (C_m^n) untuk $n \equiv 0\ (mod\ 4);\ n \geq 4$ dan $m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(C_m^n) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf peach (C_m^n) untuk $n \equiv 0\ (mod\ 4);\ n \geq 4$ dan $m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(C_m^n) = 4$.

Kasus 2. Untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \geq 2$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *peach* (C_m^n). Didefinisikan fungsi label $l : V(C_m^n) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 3\ (mod\ 4) \\ 2, & untuk\ i \equiv 3\ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$l(y_j) = 1,\ untuk\ 1 \leq j \leq m$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 3 \leq i \leq n;\ gannjil \\ 3, & untuk\ 2 \leq i \leq n-1;\ n\ genap \\ 3+m, & untuk\ i = 1 \end{cases}$$

$$w(y_j) = 1,\ untuk\ 1 \leq j \leq m$$

Untuk setiap $uv \in E(C_m^n)$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3, ..., n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = x_i$ dan $v = y_j$ dimana $i = 1$ dan $j = 1, 2, 3, ..., m$, $w(x_i) \neq w(y_j)$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *peach* (C_m^n) untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \geq 2$ yaitu $w(C_m^n) = \{1, 2, 3, 4\}$), sehingga $|w(V(C_m^n))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf peach (C_m^n) untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(C_m^n) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf peach (C_m^n) untuk $n \equiv 3\ (mod\ 4);\ n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah

$\chi_{lis}(C_m^n) = 4.$

Kasus 3. Untuk $n \not\equiv 3\ (mod\, 4);\ n \geq 3$ dan $m \geq 2$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *peach* (C_m^n). Didefinisikan fungsi label $l : V(C_m^n) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i \not\equiv 0\ (mod\, 4) \\ 2, & untuk\ i \equiv 0\ (mod\, 4) \end{cases}$$

$$l(y_j) = 1,\ untuk\ 1 \leq j \leq m$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ 2 \leq i \leq n;\ n\ genap \\ 3, & untuk\ 1 \leq i \leq n-1;\ ganjil \\ 2+m, & untuk\ i = 1 \end{cases}$$

$$w(y_j) = 1,\ untuk\ 1 \leq j \leq m$$

Untuk setiap $uv \in E(C_m^n)$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3, ..., n.$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$, dan ambil $u = x_i$ dan $v = y_j$ dimana $i = 1$ dan $j = 1, 2, 3, ..., m$, $w(x_i) \neq w(y_j)$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *peach* (C_m^n) untuk $n \not\equiv 3\ (mod\, 4);\ n \geq 3$ dan $m \geq 2$ yaitu $w(C_m^n) = \{1, 2, 3, 4\})$, sehingga $|w(V(C_m^n))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf peach (C_m^n) untuk $n \not\equiv 3\ (mod\, 4);\ n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(C_m^n) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf peach (C_m^n) untuk $n \not\equiv 3\ (mod\, 4);\ n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(C_m^n) = 4$.

Teorema 2.5 Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf *bull* $(B_{3,m})$ untuk $m \geq 2$ adalah

$$\chi_{lis}(B_{3,m}) = \begin{cases} 4, & untuk\ j \equiv 1\ (mod\, 2)\ m \geq 3 \\ & untuk\ j \equiv 2\ (mod\, 4)\ m \geq 2 \\ 5, & untuk\ j \equiv 0\ (mod\, 4)\ m \geq 4 \end{cases}$$

Bukti. Misalkan $(B_{3,m})$ untuk $m \geq 2$ merupakan graf *bull*. Kemudian kardinalitas dari graf *bull* $(B_{3,m})$ adalah himpunan titik $V(B_{n,m}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq j \leq m\}$, dan himpunan sisi $E(B_{n,m}) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i x_n\} \cup \{x_i x_{i,j}; 2 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\}$.
Misalkan setiap titik dilabeli dengan 1, maka didapatkan $w(x_i) = l(x_{i-1}) + l(x_{i+1}) = 1 + 1 = 2$ dan $w(x_{i+1}) = l(x_i) + l(x_{i+2}) = 1 + 1 = 2$, dimana $w(x_i) = w(x_{i+1})$. Hal tersebut kontradiksi dengan definisi [2]. dimana $x_i x_{i+1} \in E(B_{3,m})$, $w(x_i) \neq w(x_{i+1})$. Sehingga label maksimum dari graf *bull* $(B_{3,m})$ adalah $opt(l) = 2$.
Berdasarkan Lemma 1. batas bawah untuk bilangan kromatik ketakteraturan lokal $\chi_{lis}(B_{3,m}) \geq \chi(B_{3,m}) = 2$. Sehingga, batas bawah bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf *bull* $(B_{3,m})$ adalah $\chi_{lis}(B_{3,m}) \geq 2$.

Kasus 1. Untuk $m \equiv 1\ (mod\, 2);\ m \geq 3$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *bull* $(B_{3,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(B_{3,m}) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = 1,\ untuk\ 1 \leq i \leq 3$$

$$l(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & untuk\ i=2;\ j \not\equiv 3\ (mod\ 4) \\ & untuk\ i=3;\ j \not\equiv 1\ (mod\ 3) \\ 2, & untuk\ i=2;\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \\ & untuk\ i=3;\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ i=1 \\ 3, & untuk\ i=2 \\ 4, & untuk\ i=3 \end{cases}$$

$$w(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & untuk\ i=2,\ 3;\ j=m \\ 2, & untuk\ i=2,\ 3;\ 1 \leq j \leq m-2;\ m\ ganjil \\ 3, & untuk\ i=2,\ 3;\ 2 \leq j \leq m-1;\ m\ genap \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(B_{3,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1,2,3$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$ dan ambil $u = x_{i,j}$ dan $v = x_{i,j+1}$ dimana $i = 2,3$, dan $j = 1,2,3,...m$, $w(x_{i,j}) \neq w(x_{i,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *bull* $(B_{3,m})$ untuk $m \equiv 1\ (mod\ 2);\ m \geq 3$ yaitu $w(B_{3,m} = \{1,2,3,4\})$, sehingga $|w(V(B_{3,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf bull $(B_{3,m})$ untuk $m \equiv 1\ (mod\ 2);\ m \geq 3$ adalah $\chi_{lis}(B_{3,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf bull $B_{3,m}$ untuk $m \equiv 1\ (mod\ 2);\ m \geq 3$ adalah $\chi_{lis}(B_{3,m}) = 4$.

Kasus 2 Untuk $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 2$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *bull* $(B_{3,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(B_{3,m}) \longrightarrow \{1,2\}$ sebagai berikut:

$$l(x_i) = 1,\ untuk\ 1 \leq i \leq 3$$

$$l(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & untuk\ i=2;\ j \not\equiv 3\ (mod\ 4) \\ & untuk\ i=3;\ 2 \leq j \leq m-2;\ m\ genap, \\ 2, & untuk\ i=2;\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \\ & untuk\ i=3;\ 1 \leq j \leq m-1;\ m\ ganjil,\ j=m \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ i=1 \\ 3, & untuk\ i=2 \\ 4, & untuk\ i=3 \end{cases}$$

$$w(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & untuk\ i=2;\ j=m \\ 2, & untuk\ i=2;\ 1 \leq j \leq m-1;\ m\ ganjil \\ & untuk\ i=3;\ 1 \leq j \leq m-1;\ m\ ganjil,\ j=m \\ 3, & untuk\ i=2;\ 2 \leq j \leq m-2;\ m\ genap \\ & untuk\ i=3;\ j=m-1 \\ 4, & untuk\ i=3;\ 2 \leq j \leq m-2;\ m\ genap \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(B_{3,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1,2,3$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$ dan ambil $u = x_{i,j}$ dan $v = x_{i,j+1}$ dimana $i = 2,3$, dan $j = 1,2,3,...m$, $w(x_{i,j}) \neq w(x_{i,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *bull* $(B_{3,m})$ untuk $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ yaitu $w(B_{3,m} = \{1, 2, 3, 4\})$, sehingga $|w(V(B_{3,m}))| = 4$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf bull $(B_{3,m})$ untuk $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(B_{3,m}) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf bull $(B_{3,m})$ untuk $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(B_{3,m}) = 4$.

Kasus 3. Untuk $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$.
Selanjutnya, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf *bull* $(B_{3,m})$. Didefinisikan fungsi label $l : V(B_{3,m}) \longrightarrow \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i = 1,\ 2 \\ 2, & untuk\ i = 3 \end{cases}$$

$$l(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & untuk\ i = 2;\ j \not\equiv 1\ (mod\ 4) \\ & untuk\ i = 3;\ 2 \leq j \leq m-2;\ m\ genap, \\ 2, & untuk\ i = 2;\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\ & untuk\ i = 3;\ 1 \leq j \leq m-1;\ m\ ganjil,\ j = m \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label diatas, diperoleh fungsi bobot titik sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk\ i = 1 \\ 4, & untuk\ i = 3 \\ 5, & untuk\ i = 2 \end{cases}$$

$$w(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & untuk\ i = 2;\ j = m \\ 2, & untuk\ i = 2;\ 1 \leq j \leq m-1;\ m\ ganjil \\ & untuk\ i = 3;\ 3 \leq j \leq m-1;\ m\ ganjil,\ j = m \\ 3, & untuk\ i = 2;\ 2 \leq j \leq m-2;\ m\ genap \\ & untuk\ i = 3;\ j = 1,\ j = m-1 \\ 4, & untuk\ i = 3;\ 2 \leq j \leq m-2;\ m\ genap \end{cases}$$

Untuk setiap $uv \in E(B_{3,m})$, ambil sembarang $u = x_i$ dan $v = x_{i,i+1}$ dimana $i = 1, 2, 3$, $w(x_1) \neq w(x_{i,i+1})$ dan ambil $u = x_{i,j}$ dan $v = x_{i,j+1}$ dimana $i = 2, 3$, dan $j = 1, 2, 3, ...m$, $w(x_{i,j}) \neq w(x_{i,j+1})$. Selanjutnya didapatkan himpunan bobot titik dari graf *bull* $(B_{3,m})$ untuk $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$ yaitu $w(B_{3,m} = \{1, 2, 3, 4, 5\})$, sehingga $|w(V(B_{3,m}))| = 5$. Hal ini menunjukkan batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf bull $(B_{3,m})$ untuk $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$ adalah $\chi_{lis}(B_{3,m}) \leq 5$. Jadi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf bull $(B_{3,m})$ untuk $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4$ adalah $\chi_{lis}(B_{3,m}) = 5$.

Kesimpulan

Pada penelitian ini, kami telah membahas mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf *cricket*, graf *net*, graf *tadpole*, graf *peach* dan graf *bull*. Sehingga didapatkan lima teorema barumengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal, yaitu:

1. Graf *cricket* $(Cr_{n,m})$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ adalah $\chi_{lis}(Cr_{n,m}) = 4$.

2. Graf *net* $(N_{3,m})$ untuk $m \geq 3$ adalah $\chi_{lis}(N_{3,m}) = 4$.

3. Graf *tadpole* $(T_{n,m})$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(T_{n,m}) = 4$.

4. Graf *peach* (C_m^n) untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(C_m^n) = 4$.
5. Graf *bull* $(B_{3,m})$ untuk $m \equiv 2\ (mod\ 4);\ m \geq 2$ adalah $\chi_{lis}(B_{3,m}) = 4$, dan untuk $m \equiv 0\ (mod\ 4);\ m \geq 4\ \chi_{lis}(B_{3,m}) = 5$.

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada beberapa graf yang termasuk dalam keluarga graf *unicyclic*, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat:

Masalah terbuka 1 *mengembangkan konsep pewarnaan titik ketakteraturan pada beberapa keluarga graf dan graf khusus yang belum ditemukan seperti butterfly graph, diamond graph, lobster graph, dan sebagainya.*

Referensi

[1] Ariningtyas, R., Kristiana, A.I., and Dafik. 2020. Coloring Of Unicyclic Graph Family. 4(1), 1–9.

[2] Azahra, N., Kristiana, A.I., Dafik, and R. Alfarisi. 2020. On the Local Irregularity Vertex Coloring of Related Grid. 4(2), 1–4.

[3] A. I. Kristiana, M. I. Utoyo, Dafik, R. Alfarisi, I. H. Agustin, and E. Waluyo., On the chromatic number local irregularity of related wheel graph, Journal of Physics: Conf. Series, 1211, 012003, 2019.

[4] Kristiana I. A., Dafik, Utoyo M. I., Slamin, Alfarisi R, Agustin I.H., and Venkatachalam M. 2019. Local irregularity vertex coloring of graphs, International Journal of civil Engineering and Technology (IJCIET), vol.10, pp.1606-1616.

[5] Mursyidah, I. L., Adawiyah, R., and Kristiana, A. I. (2021). On local irregularity vertex coloring of comb product on star graphs.

[6] Umilasari, R., Susilowati, L., dan Slamin. 2020. Local irregularity chromatic number of vertex shackle product of graphs. IOP Conf. Series: Materials Sciences and Engineering. 821(2020)012038 10.1088/1757-899X?821/1/012038. 1-7.

[7] Slamin. 2017. On Distance Irregular Labelling of Graphs *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)* **102**(5) 919-932.

[8] Slamin. 2009. *Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.