CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 1, No 2, 2020
DOI:
10.25037/cgantjma.v1i2.43

Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal pada Graf Hasil Operasi Korona $G \odot P_3$ dan $G \odot S_4$

A. Nabila T.[2], Dafik[1,2], R. M. Prihandini[2], R. Alfarisi[3]
[1]CGANT - University of Jember
[2]Department of Mathematics Education - University of Jember
[3]Department of Primary School - University of Jember
a.nabila.t99@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id, rafiantikap.fkip@unej.ac.id,
alfarisi.fkip@unej.ac.id

Abstract

There are variant of the metric dimensions in graph theory, one of them is a local adjacency metric dimension. Let $W \subset V(G)$ with $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, the representation of the vertex $V \in V(G)$, $r_A(v|W) = (d_A(v, w_1), d_A(v, w_2), \dots, d_A(v, w_k))$ with $d_A(v, w)$= 0 if $v = w$, $d_A(v, w)$= 1 if v adjacent to w, and $d_A(v, w)$ =2 if v does not adjacent to w. If every two adjacent vertices v_1, $v_2 \in V(G)$, $r_A(v_1|W) \neq r_A(v_2|W)$, then W is the minimum cardinality of the local adjacency metric dimension. The minimum cardinality of W is called the local adjacency metric dimension number, denoted by $\dim_{(A,l)}(G)$. In this paper, we have found the local adjacency metric dimension of corona product of special graphs, namely the $L_n \odot P_3$ graph, $S_n \odot P_3$ graph, $C_n \odot P_3$ graph, $P_n \odot S_4$ graph, and the graph $L_n \odot S_4$.

Keywords : Local adjacency metric dimension, corona graph
Mathematics Subject Classification: 05C15

Pendahuluan

Sebuah graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut u, v dari titik-titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi. Anggota-anggota $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan anggota-anggota $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G [9]. Salah satu topik yang sering kali dikaji dan terus berkembang dalam teori graf adalah dimensi metrik. Dimensi metrik merupakan suatu topik yang sangat menarik untuk dibahas dalam teori graf. Konsep dimensi metrik pertama kali diperkenalkan secara terpisah oleh Slater dan Harary [6]. Mereka memperkenalkan ide tentang himpunan acuan pembeda, basis, serta himpunan pembeda minimal dimensi metrik. Dimensi metrik pada graf G, dinotasikan dengan $dim(G)$.

Dimensi metrik dalam teori graf ada banyak, salah satunya adalah dimensi metrik ketetanggaan lokal. Topik ini merupakan penggabungan dari dimensi metrik ketetanggaan dengan dimensi metrik lokal. Dimensi metrik ketetanggaan lokal adalah misalkan G merupakan graf terhubung dengan $l : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, .., n\}$ dimana fungsi l disebut sebagai pelabelan titik, maka setiap dua titik yang bertetangga v_1,$v_2 \in V(G)$ maka representasi ketetanggaan $r_A(v_1|W) \neq r_A(v_2|W)$. Dengan distance adjacency $d_A(v, w)$ adalah 0 jika $v = w$, 1 jika v bertetangga w, dan 2 jika v tidak bertetangga w[5]. Dimensi metrik ketetanggaan lokal adalah misalkan G graf terhubung, himpunan titik yang bertetangga dengan titik v pada graf G dinotasikan sebagai $N(v)$. Himpunan W adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal

Alfin Nabila Taufik, Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal pada Graf Hasil Operasi Korona $G \odot P_3$ dan $G \odot S_4$, CGANT JMA Vol. 1, No. 2, 2020, pp 39-50. DOI: 10.25037/cgantjma.v1i2.43 **Received:** 07 02 2020; **Revised:** 09 29 2020; **Accepted:** 11 03 2020; **Published:** 12 28 2020

jika untuk setiap dua titik yang bertetangga $\{x, y\} \in V(G)-W$ terdapat $z \in W$ sedemikian hingga $|N(z) \cap \{x, y\}| = 1$. Himpunan pembeda ketetanggaan lokal dengan kardinalitas minimum disebut basis ketetanggaan lokal untuk graf G, sedangkan kardinalitas dari basis disebut dimensi metrik ketetanggan lokal yang dinotasikan dengan $\dim_{(A,l)}(G)$ [8].

Graf hasil operasi korona adalah operasi pada dua buah graf misalkan pada graf G dan graf H, yang kemudian mengambil satu duplikat dari graf G dan $|V(G)|$ duplikat dari graf H yaitu H_i dengan $i = 1, 2, 3, ..., |G|$ kemudian menghubungkan setiap simpul ke-i dari G ke setiap simpul di H_i [4].

Penelitian ini telah dilakukan oleh Rinurwati,dkk (2017) yang menemukan dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf roda pendant. Selanjutnya Badri, dkk (2019) dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf matahari dan graf buku bertumpuk. Selanjutnya Albirri, dkk (2019) juga telah menemukan dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf split.

Lemma yang Digunakan

Lemma 1 digunakan untuk membantu proses penurunan batas bawah. Dalam pembuktian teorema dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf hasil operasi korona diperlukan Lemma sebagai berikut:

Lemma 1. *Jika H adalah subgraf dari graf (G), maka $\chi_g(G) \geq \chi_g(H)$ [4].Misalkan G merupakan graf terhubung. Jika tidak ada himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari G dengan kardinalitas k, maka sembarang himpunan $W \subseteq V(G)$ dengan $|W| < k$, bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.*

Bukti. Misalkan G merupakan graf terhubung. Asumsikan tidak ada himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari G dengan kardinalitas k dan ada himpunan pembeda ketetanggaan lokal $T \subseteq V(G)$ dengan $|T| < k$, sehingga untuk setiap $u, v \in V(G)$ memiliki $r(u|T) \neq r(v|T)$ dan T adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal pada G. Selain itu, ada subset $U \subseteq V(G) \backslash T$ sedemikian rupa sehingga $T \cup U = k$. Karena T adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari G, maka $T \cup U$ adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari G yang merupakan kontradiksi. □

Hasil Penelitian

Penelitian ini menghasilkan lima teorema dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf hasil operasi korona yaitu graf $L_n \odot P_3$, graf $S_n \odot P_3$, graf $C_n \odot P_3$, graf $P_n \odot S_4$, dan graf $L_n \odot S_4$. Dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf $L_n \odot P_3$, dengan $n \geq 1$ adalah $3n$. Akan dibuktikan batas atas dari dimensi metrik ketetanggaan lokal adalah $\dim_{A,l}(L_n \odot P_3) \leq 3n$. Misalkan himpunan $W = \{x_i; 1 \leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \cup \{x_{i,2}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}\} \cup \{y_{i,2}; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga didapatkan representasi titik terhadap W sebagai berikut.

$$x_i = \begin{cases} (\underbrace{2, \cdots, 2}_{3i-3}, 0, 1, \underbrace{2, \cdots, 2}_{3n-3i+1}), & \text{untuk } \{\text{i}|1 \leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \\ (\underbrace{2, \cdots, 2}_{3i-6}, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, \underbrace{2, \cdots, 2}_{3n-3i-1}), & \text{untuk } \{\text{i}|1 \leq i \leq n, i \text{ genap}\} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-3},1,2,1,2,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3i-2}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i\leq n, i \text{ gasal}\} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-2},0,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3i}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i\leq n, i \text{ genap}\} \end{cases}$$

$$x_{i,j} = \begin{cases} (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-3},1,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3i-1}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i\leq n, i \text{ gasal}\} \text{ dan } j=1,3 \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-3},1,0,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3i-1}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i\leq n, i \text{ gasal}\} \text{ dan } j=2 \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-3},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3i-1}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i\leq n, i \text{ genap}\} \text{ dan } j=1,3 \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-3},0,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3i-1}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i\leq n, i \text{ genap}\} \text{ dan } j=2 \end{cases}$$

$$x_{i,j} = \begin{cases} (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-1},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3i}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i\leq n, i \text{ gasal}\} \text{ dan } j=1,3 \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-1},0,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3i}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i\leq n, i \text{ gasal}\} \text{ dan } j=2 \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-2},1,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3i}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i\leq n, i \text{ genap}\} \text{ dan } j=1,3 \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-2},1,0,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3i}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i\leq n, i \text{ genap}\} \text{ dan } j=2 \end{cases}$$

Berdasarkan representasi titik yang diperoleh, titik yang bertetangga pada graf $L_n \odot P_3$ memiliki representasi titik yang berbeda terhadap himpunan W, maka W adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Jadi $\dim_{A,l}(L_n \odot P_3) \leq 3n$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas bawah dari dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $L_n \odot P_3$ adalah $\dim_{A,l}(L_n \odot P_3) \geq 3n$. Asumsikan $\dim_{A,l}(L_n \odot P_3) < 3n$, ambil $|W| = 3n-1$. Terdapat beberapa kasus penempatan titik-titik sebagai anggota himpunan W pada graf $L_n \odot P_3$ sebagai berikut:

Kasus 1. Jika $x_k \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ gasal, maka $r(x_{k,1}|W) = r(x_k|W) = r(x_{k,3}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{3k-3},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3k+1})$.

Kasus 2. Jika $y_k \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ genap, maka $r(y_{k,1}|W) = r(y_k|W) = r(y_{k,3}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{3k-2},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3k})$.

Kasus 3. Jika $x_{k,2} \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ gasal, maka $r(x_{k,1}|W) = r(x_{k,2}|W) = r(x_{k,3}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{3k-3},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3k+1})$.

Kasus 4. Jika $x_{k,2} \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ genap, maka $r(x_{k,1}|W) = r(x_{k,2}|W) = r(x_{k,3}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-1})$.

Kasus 5. Jika $y_{k,2} \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ gasal, maka $r(y_{k,1}|W) = r(y_{k,2}|W) = r(y_{k,3}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-1})$.

Kasus 6. Jika $y_{k,2} \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ genap, maka $r(y_{k,1}|W) = r(y_{k,2}|W) = r(y_{k,3}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{3k-2},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3k})$.

Berdasarkan Kasus 1 sampai 6, dapat ditunjukkan bahwa W bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 1 diperoleh batas bawah dari dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $L_n \odot P_3$ adalah $\dim_{A,l}(L_n \odot P_3) \geq 3n-1$. Jadi, dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $L_n \odot P_3$ adalah $3n$. $\square$

Dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf $S_n \odot P_3$, dengan $n \geq 2$ adalah $n+2$. Akan dibuktikan batas atas dari dimensi metrik ketetanggaan lokal adalah $\dim_{A,l}(S_n \odot P_3) \leq n+2$. Misalkan himpunan $W = \{a\} \cup \{a_2\} \cup \{x_{i,2}; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga didapatkan representasi titik terhadap W sebagai berikut.

$$a = (0,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{n})$$

$$x_i = (1,\underbrace{2,\cdots,2}_{i-1},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{n-i+1}), \text{ untuk } \{i\big|1 \leq i \leq n\}$$

$$a_i = \begin{cases} (1,0,\underbrace{2,\cdots,2}_{n}), & \text{untuk i=2} \\ (1,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{n}), & \text{untuk i=1,3} \end{cases}$$

$$x_{i,j} = \begin{cases} (\underbrace{2,\cdots,2}_{i},0,\underbrace{2,\cdots,2}_{n-i}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i \leq n\} \text{ dan } j=2 \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{i},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{n-i}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i \leq n\} \text{ dan } j=1,3 \end{cases}$$

Berdasarkan representasi titik yang diperoleh, titik yang bertetangga pada graf $S_n \odot P_3$ memiliki representasi titik yang berbeda terhadap himpunan W, maka W adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Jadi $\dim_{A,l}(S_n \odot P_3) \leq n+2$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas bawah dari dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $S_n \odot P_3$ adalah $\dim_{A,l}(S_n \odot P_3) \geq n+2$. Asumsikan $\dim_{A,l}(S_n \odot P_3) < n+2$, ambil $|W| = (n+2)-1 = n+1$. Terdapat beberapa kasus penempatan titik-titik sebagai anggota himpunan W pada graf $(S_n \odot P_3)$ sebagai berikut:

Kasus 1. Jika $x_{k,2} \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n$ maka $r(x_{k,1}|W) = r(x_{k,2}|W) = r(x_{k,3}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{n+1})$.

Kasus 2. Jika $a \notin W$, maka $r(a_1|W) = r(a|W) = r(a_3|W) = (1,\underbrace{2,\cdots,2}_{n})$.

Kasus 3. Jika $a_2 \notin W$, maka $r(a_1|W) = r(a_2|W) = r(a_3|W) = (1,\underbrace{2,\cdots,2}_{n})$.

Berdasarkan kasus 1 sampai 3, dapat ditunjukkan bahwa W bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 1 diperoleh batas bawah dari dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $S_n \odot P_3$ adalah $\dim_{A,l}(S_n \odot P_3) \geq n+2$

terbukti salah. Jadi, dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $S_n \odot P_3$ adalah $n+2$. $\square$

Dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf $C_n \odot P_3$, dengan $n \geq 2$ adalah

$$\dim_{A,l}(C_n \odot P_3) = \begin{cases} \frac{3n}{2}, & untuk \quad n \quad genap \\ \frac{3n-1}{2}, & untuk \quad n \quad gasal \end{cases}$$

Kasus 1 untuk n genap.

Akan dibuktikan batas atas dari dimensi metrik ketetanggaan lokal adalah $\dim_{A,l}(C_n \odot P_3) \geq \frac{3n}{2}$. Misalkan himpunan $W = \{x_i; 1 \leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \cup \{x_{i,2}; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga didapatkan representasi titik terhadap W sebagai berikut.

$$x_i = \begin{cases} (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-3}{2}},0,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i-1}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}|1 \leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-4}{2}},1,2,1,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i-4}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}|1 \leq i \leq n, i \text{ genap}\} \end{cases}$$

$$x_{i,j} = \begin{cases} (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-3}{2}},1,0,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i-1}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}|1 \leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \text{ dan } j=2 \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-3}{2}},1,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i-1}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}|1 \leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \text{ dan } j=1,3 \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-2}{2}},0,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}|1 \leq i \leq n, i \text{ genap}\} \text{ dan } j=2 \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-2}{2}},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}|1 \leq i \leq n, i \text{ genap}\} \text{ dan } j=1,3 \end{cases}$$

Berdasarkan representasi titik yang diperoleh, titik yang bertetangga pada graf $C_n \odot P_3$ memiliki representasi titik yang berbeda terhadap himpunan W, maka W adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Jadi $\dim_{A,l}(C_n \odot P_3) \leq \frac{3n}{2}$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas bawah dari dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $C_n \odot P_3$ adalah $\dim_{A,l}(C_n \odot P_3) \geq \frac{3n}{2}$. Asumsikan $\dim_{A,l}(C_n \odot P_3) < \frac{3n}{2}$, ambil $|W| = \frac{3n}{2} - 1 = \frac{3n-2}{2}$. Terdapat beberapa kasus penempatan titik-titik sebagai anggota himpunan W pada graf $C_n \odot P_3$ sebagai berikut:

1) Jika $x_k \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ gasal, maka $r(x_{k,1}|W) = r(x_k|W) = r(x_{k,3}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3k-3}{2}},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3k-1}{2}})$.
2) Jika $x_{k,2} \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ gasal, maka $r(x_{k,1}|W) = r(x_{k,2}|W) = r(x_{k,3}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3k-3}{2}},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3k-1}{2}})$.
3) Jika $x_{k,2} \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ genap, maka $r(x_{k,1}|W) = r(x_{k,2}|W) = r(x_{k,3}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-2}{2}})$.

Berdasarkan 1) sampai 3), dapat ditunjukkan bahwa W bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 1 batas bawah dari dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $C_n \odot P_3$ adalah $\dim_{A,l}(C_n \odot P_3) \geq \frac{3n}{2}$. Jadi, dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $L_n \odot P_3$ untuk n genap adalah $\frac{3n}{2}$.

Kasus 2 untuk n gasal.
Akan dibuktikan batas atas dari dimensi metrik ketetanggaan lokal adalah $\dim_{A,l}(C_n \odot P_3) \geq \frac{3n-1}{2}$. Misalkan himpunan $W = \{x_i; 1 \leq i \leq n-2, i \text{ gasal}\} \cup \{x_{i,2}; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga di dapatkan representasi titik terhadap W sebagai berikut.

$$x_i = \begin{cases} (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-3}{2}},0,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i-2}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i \leq n-2, i \text{ gasal}\} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-4}{2}},1,2,1,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i-5}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i \leq n-3, i \text{ genap}\} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-9}{2}},1,2,1,2), & \text{untuk i=n-1} \\ (1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-5}{2}},1), & \text{untuk i=n} \end{cases}$$

$$x_{i,j} = \begin{cases} (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-3}{2}},1,0,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-3-2}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i \leq n-2, i \text{ gasal}\} \text{ dan } j=2 \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-3}{2}},1,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-3-2}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i \leq n-2, i \text{ gasal}\} \text{ dan } j=1,3 \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-2}{2}},0,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i-2}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i \leq n-1, i \text{ genap}\} \text{ dan } j=2 \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-2}{2}},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i-2}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}|1\leq i \leq n-1, i \text{ genap}\} \text{ dan } j=1,3 \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3}{2}},0), & \text{untuk i=n dan j=2} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3}{2}},1), & \text{untuk i=n dan j=1,3} \end{cases}$$

Berdasarkan representasi titik yang diperoleh, titik yang bertetangga pada graf $C_n \odot P_3$ memiliki representasi titik yang berbeda terhadap himpunan W, maka W adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Jadi $\dim_{A,l}(C_n \odot P_3) \leq \frac{3n-1}{2}$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas bawah dari dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $C_n \odot P_3$ adalah $\dim_{A,l}(C_n \odot P_3) \geq \frac{3n-1}{2}$. Asumsikan $\dim_{A,l}(C_n \odot P_3) < \frac{3n-1}{2}$, ambil $|W| = \frac{3n-1}{2} - 1 = \frac{3n-3}{2}$. Terdapat beberapa kasus penempatan titik-titik sebagai anggota himpunan W pada graf $C_n \odot P_3$ sebagai berikut:

1) Jika $x_k \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n-2, k$ gasal, maka $r(x_{k,1}|W) = r(x_k|W) = r(x_{k,3}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3k-3}{2}},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3k-2}{2}})$.
2) Jika $x_{k,2} \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n-2, k$ gasal, maka $r(x_{k,1}|W) = r(x_{k,2}|W) =$

$r(x_{k,3}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3k-3}{2}},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3k-2}{2}})$.

3) Jika $x_{k,2} \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ genap, maka $r(x_{k,1}|W) = r(x_{k,2}|W) = r(x_{k,3}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3}{2}})$.

4) Jika $x_{k,2} \notin W$, untuk $k = n$, maka $r(x_{k,1}|W) = r(x_{k,2}|W) = r(x_{k,3}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3}{2}})$.

Berdasarkan 1) sampai 4), dapat ditunjukkan bahwa W bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 1 batas bawah dari dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $C_n \odot P_3$ adalah $\dim_{A,l}(C_n \odot P_3) \geq \frac{3n-1}{2}$. Jadi, dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $L_n \odot P_3$ untuk n gasal adalah $\frac{3n-1}{2}$. □

Dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf $P_n \odot S_4$, dengan $n \geq 2$ adalah

$$\dim_{A,l}(P_n \odot S_4) = \begin{cases} \frac{3n}{2}, & untuk \quad n \quad genap \\ \frac{3n-1}{2}, & untuk \quad n \quad gasal \end{cases}$$

Kasus 1 untuk n genap.

Akan dibuktikan batas atas dari dimensi metrik ketetanggaan lokal $\dim_{A,l}(P_n \odot S_4) \leq \frac{3n}{2}$. Ambil himpunan $W = \{x_i; 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga di dapatkan representasi titik terhadap W sebagai berikut.

$$x_i = \begin{cases} (1,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-4}{2}}), & \text{untuk i=1} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-7}{2}},1,2,1,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i-1}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|3\leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-4}{2}},0,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n, i \text{ genap}\} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-3}{2}},0,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i+1}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-4}{2}},1,0,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n, i \text{ genap}\} \end{cases}$$

$$y_{i,j} = \begin{cases} (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-3}{2}},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i+1}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \text{ dan } \{j\big|1 \leq j \leq 4\} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-4}{2}},1,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n, i \text{ genap}\} \text{ dan } \{j\big|1 \leq j \leq 4\} \end{cases}$$

Berdasarkan representasi titik yang diperoleh, titik yang bertetangga pada graf $P_n \odot S_4$ memiliki representasi titik yang berbeda terhadap himpunan W, maka W adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Jadi $\dim_{A,l}(P_n \odot S_4) \leq \frac{3n}{2}$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas bawah dari dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $P_n \odot S_4$ adalah $\dim_{A,l}(P_n \odot S_4) \geq \frac{3n}{2}$. Asumsikan $\dim_{A,l}(P_n \odot S_4) < \frac{3n}{2}$, ambil $|W| = \frac{3n}{2} - 1 = \frac{3n-2}{2}$. Terdapat beberapa kasus penempatan titik-titik sebagai anggota himpunan W pada graf $P_n \odot S_4$ sebagai berikut:

1) Jika $x_k \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ genap, maka $r(y_{k,1}|W) = r(y_{k,2}|W) = r(x_k|W) = r(y_{k,3}|W) = r(y_{k,4}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3k-4}{2}},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3k}{2}})$.
2) Jika $y_k \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ genap, maka $r(y_{k,1}|W) = r(y_{k,2}|W) = r(y_k|W) = r(y_{k,3}|W) = r(y_{k,4}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3k-4}{2}},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3k}{2}})$.
3) Jika $x_{k,2} \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ gasal, maka $r(y_{k,1}|W) = r(y_{k,2}|W) = r(y_k|W) = r(y_{k,3}|W) = r(y_{k,4}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-2}{2}})$.

Berdasarkan 1) sampai 3), dapat ditunjukkan bahwa W bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 1 batas bawah dari dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $P_n \odot S_4$ adalah $\dim_{A,l}(P_n \odot S_4) \geq \frac{3n}{2}$. Jadi, dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $P_n \odot S_4$ untuk n genap adalah $\frac{3n}{2}$.

Kasus 2. untuk n gasal.

Akan dibuktikan batas atas dari dimensi metrik ketetanggaan lokal adalah $\dim_{A,l}(P_n \odot S_4) \geq \frac{3n-1}{2}$. Misalkan himpunan $W = \{x_i; 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga di dapatkan representasi titik terhadap W sebagai berikut.

$$x_i = \begin{cases} (1,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-5}{2}}), & \text{untuk i=1} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-7}{2}},1,2,1,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i-2}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|3\leq i \leq n-2, i \text{ gasal}\} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-4}{2}},0,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i-1}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n-1, i \text{ genap}\} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-1}{2}},1,2,1), & \text{untuk i=n} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-3}{2}},0,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-4}{2}},1,0,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i-1}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n, i \text{ genap}\} \end{cases}$$

$$y_{i,j} = \begin{cases} (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-3}{2}},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i+1}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \text{ dan } \{j\big|1 \leq j \leq 4\} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3i-4}{2}},1,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\frac{3n-3i}{2}}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n, i \text{ genap}\} \text{ dan } \{j\big|1 \leq j \leq 4\} \end{cases}$$

Berdasarkan representasi titik yang diperoleh, titik yang bertetangga pada graf $P_n \odot S_4$ memiliki representasi titik yang berbeda terhadap himpunan W, maka W adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Jadi $\dim_{A,l}(P_n \odot S_4) \leq \frac{3n-1}{2}$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas bawah dari dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $P_n \odot S_4$ adalah $\dim_{A,l}(P_n \odot S_4) \geq \frac{3n-1}{2}$. Asumsikan $\dim_{A,l}(P_n \odot S_4) < \frac{3n-1}{2}$, ambil $|W| = \frac{3n-1}{2} - 1 = \frac{3n-3}{2}$. Terdapat beberapa kasus penempatan titik-titik sebagai anggota himpunan W pada graf $P_n \odot S_4$ sebagai berikut:

1) Jika $x_k \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ genap, maka $r(y_{k,1}|W) = r(y_{k,2}|W) = r(x_k|W) = r(y_{k,3}|W) = r(y_{k,4}|W) = (\underbrace{2, \cdots, 2}_{\frac{3k-4}{2}}, 1, \underbrace{2, \cdots, 2}_{\frac{3n-3k-1}{2}})$.
2) Jika $y_k \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ genap, maka $r(y_{k,1}|W) = r(y_{k,2}|W) = r(y_k|W) = r(y_{k,3}|W) = r(y_{k,4}|W) = (\underbrace{2, \cdots, 2}_{\frac{3k-4}{2}}, 1, \underbrace{2, \cdots, 2}_{\frac{3n-3k-1}{2}})$.
3) Jika $x_{k,2} \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ gasal, maka $r(y_{k,1}|W) = r(y_{k,2}|W) = r(y_k|W) = r(y_{k,3}|W) = r(y_{k,4}|W) = (\underbrace{2, \cdots, 2}_{\frac{3n-3}{2}})$.

Berdasarkan kasus 1) sampai 3), dapat ditunjukkan bahwa W bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 4.1 batas bawah dari dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $P_n \odot S_4$ adalah $\dim_{A,l}(P_n \odot S_4) \geq \frac{3n-1}{2}$. Jadi, dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $P_n \odot S_4$ untuk n gasal adalah $\frac{3n-1}{2}$. $\square$

Dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf $L_n \odot S_4$, dengan $n \geq 1$ adalah $3n$. Akan dibuktikan batas atas dari dimensi metrik ketetanggaan lokal adalah $\dim_{A,l}(L_n \odot S_4) \leq 3n$. Misalkan himpunan $W = \{x_i; 1 \leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \cup \{a_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}\} \cup \{b_i; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga di dapatkan representasi titik terhadap W sebagai berikut.

$$x_i = \begin{cases} (\underbrace{2, \cdots, 2}_{3i-3}, 0, 1, \underbrace{2, \cdots, 2}_{3n-3i+1}), & \text{untuk } \{\mathrm{i} \big| 1 \leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \\ (\underbrace{2, \cdots, 2}_{3i-6}, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, \underbrace{2, \cdots, 2}_{3n-3i-1}), & \text{untuk } \{\mathrm{i} \big| 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}\} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} (\underbrace{2, \cdots, 2}_{3i-3}, 1, 2, 1, 2, 1, \underbrace{2, \cdots, 2}_{3n-3i-2}), & \text{untuk } \{\mathrm{i} \big| 1 \leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \\ (\underbrace{2, \cdots, 2}_{3i-2}, 0, 1, \underbrace{2, \cdots, 2}_{3n-3i}), & \text{untuk } \{\mathrm{i} \big| 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}\} \end{cases}$$

$$a_i = \begin{cases} (\underbrace{2, \cdots, 2}_{3i-3}, 1, 0, \underbrace{2, \cdots, 2}_{3n-3i-1}), & \text{untuk } \{\mathrm{i} \big| 1 \leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \\ (\underbrace{2, \cdots, 2}_{3i-3}, 0, \underbrace{2, \cdots, 2}_{3n-3i-1}), & \text{untuk } \{\mathrm{i} \big| 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}\} \end{cases}$$

$$a_{i,j} = \begin{cases} (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-3},1,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3i-1}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \text{ dan } \{j\big|1\leq j\leq 4\} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-3},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3i-1}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n, i \text{ genap}\} \text{ dan } \{j\big|1\leq j\leq 4\} \end{cases}$$

$$b_{i} = \begin{cases} (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-1},0,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3i}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-2},1,0,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3i}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n, i \text{ genap}\} \end{cases}$$

$$b_{i,j} = \begin{cases} (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-1},1,\underbrace{1,\cdots,2}_{3n-3i}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n, i \text{ gasal}\} \text{ dan } \{j\big|1\leq j\leq 4\} \\ (\underbrace{2,\cdots,2}_{3i-2},1,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3i}), & \text{untuk } \{\text{i}\big|1\leq i \leq n, i \text{ genap}\} \text{ dan } \{j\big|1\leq j\leq 4\} \end{cases}$$

Berdasarkan representasi titik yang diperoleh, titik yang bertetangga pada graf $L_n \odot S_4$ memiliki representasi titik yang berbeda terhadap himpunan W, maka W adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Jadi $\dim_{A,l}(L_n \odot S_4) \leq 3n$.

Selanjutnya akan dibuktikan batas bawah dari dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $L_n \odot S_4$ adalah $\dim_{A,l}(L_n \odot S_4) \geq 3n$. Asumsikan $\dim_{A,l}(L_n \odot S_4) < 3n$, ambil $|W| = 3n - 1$. Terdapat beberapa kasus penempatan titik-titik sebagai anggota himpunan W pada graf $L_n \odot S_4$ sebagai berikut:

Kasus 1. Jika $x_k \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ gasal, maka $r(a_{k,1}|W) = r(a_{k,2}|W) = r(x_k|W) = r(a_{k,3}|W) = r(a_{k,4}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{3k-3},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3k+1})$.

Kasus 2. Jika $y_k \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ genap, maka $r(b_{k,1}|W) = r(b_{k,2}|W) = r(y_k|W) = r(b_{k,3}|W) = r(b_{k,4}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{3k-2},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3k})$.

Kasus 3. Jika $a_k \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ gasal, maka $r(a_{k,1}|W) = r(a_{k,2}|W) = r(a_k|W) = r(a_{k,3}|W) = r(a_{k,4}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{3k-3},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3k+1})$.

Kasus 4. Jika $a_k \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ genap, maka $r(a_{k,1}|W) = r(a_{k,2}|W) = r(a_k|W) = r(a_{k,3}|W) = r(a_{k,4}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-1})$.

Kasus 5. Jika $b_k \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ gasal, maka $r(b_{k,1}|W) = r(b_{k,2}|W) = r(b_k|W) = r(b_{k,3}|W) = r(b_{k,4}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-1})$.

Kasus 6. Jika $b_k \notin W$, untuk $1 \leq k \leq n, k$ genap, maka $r(b_{k,1}|W) = r(b_{k,2}|W) = r(b_k|W) = r(b_{k,3}|W) = r(b_{k,4}|W) = (\underbrace{2,\cdots,2}_{3k-2},1,\underbrace{2,\cdots,2}_{3n-3k})$.

Berdasarkan kasus 1 sampai 6, dapat ditunjukkan bahwa W bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 4.1 batas bawah dari dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $L_n \odot S_4$ adalah $\dim_{A,l}(L_n \odot S_4) \geq 3n - 1$. Jadi, dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $L_n \odot S_4$ adalah $3n$. □

Kesimpulan

Pada penelitian ini telah ditemukan lima dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf hasil operasi korona yaitu, yaitu:

1. Dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $L_n \odot P_3$, dengan $n \geq 1$ adalah $3n$.
2. Dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $S_n \odot P_3$, dengan $n \geq 2$ adalah $n + 2$.
3. Dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $C_n \odot P_3$, dengan $n \geq 2$ untuk n genap adalah $\frac{3n}{2}$ serta untuk n gasal adalah $\frac{3n-1}{2}$.
4. Dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $P_n \odot S_4$, dengan $n \geq 2$ untuk n genap adalah $\frac{3n}{2}$ serta untuk n gasal adalah $\frac{3n-1}{2}$.
5. Dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $L_n \odot S_4$, dengan $n \geq 1$ adalah $3n$.

Berdasarkan hasil penelitian mengenai dimensi metrik ketetanggaan lokal pada beberapa graf hasil operasi korona $G \odot P_3$ dan $G \odot S_4$, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat:

Masalah terbuka 1 *mengembangkan konsep dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf hasil operasi lainnya, seperti operasi comb, operasi amalgamasi, dll.*

References

[1] Albirri, E. R., Dafik, Agustin, I. H., Adawiyah R., Alfarisi R. dan Prihandini, R. M. 2019. The local (adjacency) metric dimension of split related complete graphs. *Journal of Physics: Conference Series* **1538**.

[2] Albirri, E. R., Dafik, Agustin, I. H., Alfarisi R., Prihandini, R. M. dan Adawiyah R. 2019. On the local adjacency metric dimension of split graph. *IOP Conference Series: Earth and Enviromental Science* **234**(1).

[3] Badri, A. Y. dan Darmaji. 2018. Local adjacency metric dimension of sun graph and stacked book graph. *Journal of Physics: Conference Series* **974** 012069.

[4] Harary, F. dan Frucht, R. 1970. On The Corona Of Two Graphs. *Aequationes Mathematicae* 322-325.

[5] Jannesari, M. dan Omoomi. B., 2012. The Metric Dimension of The Lexicographic Product of Graphs. *Discrete Mathematics* **312**(22) 3349-3356.

[6] Khoiriyah, S. dan Kusmayadi, T. A. 2018. Dimensi Metrik Lokal Pada Graf Antiprisma dan Graf Sun. *Journal of Mathematics dam Mathematics Education* **8**(1).

[7] Rinurwati, Suprajitno, H. dan Slamin. 2017. On local adjacency metric dimension of some wheel related graphs with pendant points. *AIP Publishing: AIP Conference Proceedings* **1867** 020065.

[8] Rodriguez-Velazquez, J. A., G. A. Barragan –Ramirez. dan C. G.Gomez. 2016. On The Local Metric Dimension of Corona Product Graphs. *Bull malays. Math. Sci. Soc.* **39**(2) 157-173.

[9] Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Jember University Press.