CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 2, No 2, 2021
DOI:
10.25037/cgantjma.v2i2.67

Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Nilai Ketidakteraturan Total Selimut Pada Graf $P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3$, $P_n \dot{\trianglerighteq} W_6$, $P_n \dot{\trianglerighteq} B_{4,2}$

Yessy Eki Fajar Reksi[2], Dafik[1,3], Ika Hesti Agustin[1,2]
[1]CGANT - Universitas Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
[3]Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Jember
yessyeki@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id, ikahesti.fmipa@unej.ac.id

Abstrak

Misal G dan K adalah graf sederhana, nontrivial dan graf tak berarah. Operasi *total comb product* menghasilkan graf baru dengan mengoperasikan dua buah graf. Misalkan G dan K adalah graf terhubung dan $v \in V(K)$ dan $e \in E(K)$. Operasi *total comb product* dari graf G dan K yang dinotasikan ($G \dot{\trianglerighteq} K$) merupakan operasi graf yang diperoleh dengan mengambil salinan satu graf G dan $|V(G)| + |E(G)|$ salinan K, kemudian merekatkan salinan ke-i dari graf K di titik cangkok v pada titik ke-i dari graf G dan merekatkan salinan ke-j dari graf K di sisi cangkok e pada sisi ke-j dari graf G. Pelabelan total didefinisikan suatu fungsi $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, 3, ..., k\}$ merupakan pelabelan *k-total* pada graf G. Pelabelan *k-total* dikatakan pelabelan total ketidakteraturan selimut pada graf G jika untuk $H \subseteq G$ dengan kata lain H merupakan selimut dari suatu graf G, bobot total selimut $W(H) = \Sigma_{v\in V(H)} f(v) + \Sigma_{e\in E(H)} f(e)$ berbeda. Nilai minimum k pada pelabelan total ketidakteraturan selimut disebut dengan *total H-Irregularity Strength* dari suatu graf G yang dinotasikan dengan $tHs(G)$. Pada artikel ini dilakukan penelitian tentang pelabelan total ketidakteraturan selimut yaitu mencari nilai ketidakteraturan total selimut pada graf hasil operasi *total comb product* dari graf khusus .

Kata Kunci : *Nilai ketidakteraturan total selimut, Graf khusus, Operasi* total comb product.

Pendahuluan

Pada tahun 1988 [4] mulai mempelajari tentang irregular atau jaringan ketidakteraturan. Kemudian [8] mempelajari ketidakteraturan pada suatu graf pada tahun 1992. Selain itu, nilai ketidakteraturan juga diperkenalkan oleh [12] dan [9]. Beberapa macam pelabelan total ketidakteraturan yakni pelabelan total ketidakteraturan titik (*vertex irregular total labelling*) dan pelabelan total ketidakteraturan sisi (*Edge irregular total labelling*) dikembangkan oleh [3] pada tahun 2007. Pada tahun 2016, [2] mengembangkan kajian tentang pelabelan total ketidakteraturan yaitu pelabelan total ketidakteraturan selimut (*H-irregular total labelling*). Pelabelan total ketidakteraturan selimut merupakan hasil pengembangan dari pelabelan total ketidakteraturan sisi, dimana $H \subseteq G$ dengan kata lain H merupakan selimut dari suatu graf G. Dari pelabelan total ketidakteraturan sisi diketahui bahwa untuk suatu graf $G = (V, E)$ dapat didefinisikan suatu fungsi $f : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, 3, ..., k\}$ merupakan nilai ketidakteraturan total sisi (*total edge irregularity strength*) jika untuk setiap dua sisi berbeda e dan f dari G masing-masing memiliki $\psi(e) \neq \psi(f)$ dimana bobot dari suatu sisi e=$\{u,v\}$ pada label v adalah $\psi(e) = v(u) + v(v) + v(e)$. Nilai minimum k pada graf G (*total edge irregularity strength*), dinotasikan dengan *tes(G)*. Sedangkan nilai minimum k pada pelabelan total ketidakteraturan selimut *H-irregular total labelling* pada G disebut dengan *total H-irregularity strength* dinotasikan dengan *tHs(G)*. Jika ada suatu fungsi $f : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, 3, ..., k\}$ untuk sebarang selimut $H \subseteq G$, bobot total selimut $W(H) = \Sigma_{v \in V(H)} f(v) + \Sigma_{e \in E(H)} f(e)$ berbeda. Pada artikel ini, akan digunakan graf lintasan (P_n), graf buku segitiga (Bt_n), graf roda (W_n), graf timbunan buku ($B_{m,n}$) sebagai contoh kasusnya [6],[5],[10],[7].

Operasi graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah operasi graf *total comb product. Total Comb Product* merupakan perkembangan dari operasi comb titik dan comb sisi. Pada tahun 2013 [11] mendefinisikan operasi comb titik merupakan operasi yang dihasilkan dari dua buah graf terhubung dengan graf G sebagai graf dasar dimana semua titik pada graf G direkatkan dengan graf K di titik cangkok pada graf G. Menurut [13] tahun 2016 operasi comb sisi merupakan operasi yang dihasilkan dari dua buah graf terhubung dengan graf G sebagai graf dasar dimana semua sisi pada graf G direkatkan dengan graf K di sisi cangkok pada graf G.

Operasi *total comb product* merupakan gabungan dari comb titik (*comb product*) dan comb sisi (*edge comb product*) dimana semua titik dan sisi pada graf G direkatkan dengan graf K di titik dan sisi cangkok pada graf G. Misalkan G dan K adalah graf terhubung dan $v \in V(K)$ dan $e \in E(K)$. Pada tahun 2017, [1] mendefinisikan bahwa operasi *total comb product* dari graf G dan K yang dinotasikan ($G \dot{\trianglerighteq} K$) merupakan operasi graf yang diperoleh dengan mengambil salinan satu graf G dan $|V(G)|+|E(G)|$ salinan K, kemudian merekatkan salinan ke-i dari graf K di titik cangkok v pada titik ke-i dari graf G dan merekatkan salinan ke-j dari graf K di sisi cangkok e pada sisi ke-j dari graf G. Pada artikel ini, akan digunakan graf lintasan (P_n) sebagai graf dasar G dan graf buku segitiga (Bt_n), graf roda (W_n), graf timbunan buku ($B_{m,n}$) sebagai graf K yang merupakan subgraf dari graf G.

Terdapat 2 metode yang digunakan dalam penelitian ini yakni metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksian pola. Metode deduktif aksiomatik yaitu dengan menggunakan prinsip-prinsip pembuktian yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada. Metode pendeteksian pola, digunakan untuk merumuskan pola pelabelan titik dan pelabelan sisi secara umum sedemikian hingga setiap selimut memiliki bobot berbeda. Pelabelan titik dan pelabelan sisi yang telah didapatkan digunakan untuk merumuskan nilai ketidakteraturan total selimut pada suatu graf. Pada pelabelan total ketidakteraturan selimut, misalkan G adalah sebarang graf khusus dan H adalah selimut dari G dengan $|V(H)| = P_H$ dan $|E(H)| = q_H$, maka untuk batas bawah dari *total H-irregularity strength* graf G ditunjukkan dalam lemma berikut.

Lemma 1 Misalkan $G, H \subset G$ adalah sebarang dua graf. Misalkan P_H, q_H merupakan masing-masing dari jumlah titik dan sisi dari H. maka *total H-irregularity strength* memenuhi

$$tHs(G) \geq \lceil \frac{P_H + q_H + |H| - 1}{P_H + q_H} \rceil$$

Hasil Penelitian

$\Diamond$ **Teorema 2.1** *Misal G adalah graf hasil operasi* total comb product P_n *dan* Bt_3 *dinotasikan dengan* $(P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3)$ *dan* $H = C_3$, *maka*

$$tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3) = \lceil \tfrac{6n+2}{6} \rceil$$

Bukti. Graf $(P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3)$ memiliki himpunan titik $V(P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3) = \{x_i; 1 \leq i \leq 3n-3\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i; 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq 2n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3) = \{x_{3i-2}y_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{3i-1}y_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{3i}y_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{3i-2}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{3i-1}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{3i}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{w_i z_i; 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{w_{2i-1}z_{2i}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{2i}z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{2i-1}z_{2i}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$. Jumlah titik $|V(P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3)| = 8n-3$ dan jumlah sisi $|E(P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3)| = 14n-7$. Berdasarkan Lemma 1 didefinisikan P_H adalah jumlah titik pada selimut H, q_H adalah jumlah sisi pada selimut H, dan $|H|$ adalah jumlah selimut pada graf $(P_n\dot{\trianglerighteq}Bt_3)$ dimana selimut $H = C_3$ dan didapatkan jumlah selimut pada graf $(P_n\dot{\trianglerighteq}Bt_3)$ adalah $|H| = 6n - 3$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} tHs(P_n\dot{\trianglerighteq}Bt_3) &\geq \lceil \frac{P_H + q_H + |H| - 1}{P_H + q_H} \rceil \\ &= \lceil \frac{3 + 3 + (6n-3) - 1}{3+3} \rceil \\ &= \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil \end{aligned}$$

Jadi, $tHs(P_n\dot{\trianglerighteq}Bt_3) \geq \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil$. Selanjutnya dilakukan pelabelan total ketidakteraturan selimut pada himpunan titik dan himpunan sisi sedemikian hingga bobot setiap selimut berbeda. Berikut ini adalah fungsi pada label titik dan label sisi pada graf $(P_n\dot{\trianglerighteq}Bt_3)$,

$$\begin{aligned}
f(x_i) &= \begin{cases} 1; \text{ untuk } \ i = 1 \\ \lceil \frac{i-1}{3} \rceil + 1; \text{ untuk } \ 2 \leq i \leq 3n-3 \end{cases} \\
f(y_i) &= i + 1; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(w_{2i}z_{2i-1}) &= i + 1; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(x_{3i}y_i) &= i + 1; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(w_i) &= \begin{cases} 1; \text{ untuk } \ i = 1 \\ \lceil \frac{i+1}{2} \rceil; \text{ untuk } \ 2 \leq i \leq 2n \end{cases} \\
f(w_{2i-1}z_{2i}) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(z_{2i-1}z_{2i}) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(y_iz_{2i-1}) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(y_iz_{2i}) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(x_{3i-2}y_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(x_{3i-1}y_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(x_{3i-2}y_{i+1}) &= i; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(x_{3i-1}y_{i+1}) &= i; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(x_{3i}y_{i+1}) &= i; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(y_iy_{i+1}) &= i; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(w_iz_i) &= \lceil \frac{i}{2} \rceil; \quad 1 \leq i \leq 2n
\end{aligned}$$

Pada pelabelan f, bobot total H adalah $W(H) = \Sigma_{v \in V(H)} f(v) + \Sigma_{e \in E(H)} f(e)$ adalah $W(H) = \{6, 7, ..., 6 + (6n-3)\}$ yang membentuk barisan yang berurutan. Pernyataan tersebut menunjukkan bahwa bobot H berbeda. Pada label f, minimum $tHs(P_n\dot{\trianglerighteq}Bt_3)$ dinyatakan sebagai berikut dimana label terbesar pada $(P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3)$ adalah $\lceil \frac{i+1}{2} \rceil$ untuk $2 \leq i \leq 2n$ sehingga $i = 2n$

$$\begin{aligned} tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3) &\leq \lceil \frac{i+1}{2} \rceil \\ &= \lceil \frac{2n+1}{2} \rceil \\ &= \lceil n + \frac{1}{2} \rceil \end{aligned}$$

karena n merupakan bilangan bulat positif dan $\lceil \frac{a}{b} \rceil$ dimana $a \leq b$ dan $b \neq 0$ selalu 1 maka berlaku $\lceil n + \frac{1}{2} \rceil = \lceil n + \frac{1}{3} \rceil$

$$\begin{aligned} tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3) &\leq \lceil n + \frac{1}{2} \rceil \\ &= \lceil n + \frac{1}{3} \rceil \\ &= \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil \end{aligned}$$

Jadi karena $tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3) \geq \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil$ dan $tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3) \leq \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil$ maka diperoleh $tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3) = \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil$. $\square$

$\lozenge$ **Teorema 2.2** *Misal G adalah graf hasil operasi* total comb product P_n *dan* W_6 *dinotasikan dengan* $(P_n \dot{\trianglerighteq} W_6)$ *dan* $H = C_3$, *maka*

$$tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} W_6) = 2n$$

Bukti. Graf $(P_n \dot{\trianglerighteq} W_6)$ memiliki himpunan titik $V(P_n \dot{\trianglerighteq} W_6) = \{x_i; 1 \leq i \leq 4n-4\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq 2n-1\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{w_i; 1 \leq i \leq 4n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \dot{\trianglerighteq} W_6) = \{x_{4i-1}x_{4i-2}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{4i-3}x_{4i-1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{4i-2}x_{4i}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{4i-3}y_{2i}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{4i-2}y_{2i}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{4i-1}y_{2i}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{4i}y_{2i}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{4i-1}y_{2i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{4i}y_{2i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq 2n-2\} \cup \{y_{2i-1}y_{2i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{w_{4i-1}y_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{4i-3}w_{4i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{4i}z_{2i}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{4i-3}w_{4i-2}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{4i-2}w_{4i}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{4i-3}z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{4i-2}z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{4i-1}z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{4i}z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2i-1}z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{2i-1}z_{2i}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2i-1}z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$. Jumlah titik $|V(P_n \dot{\trianglerighteq} W_6)| = 12n - 5$ dan jumlah sisi $|E(P_n \dot{\trianglerighteq} W_6)| = 24n - 12$. Berdasarkan Lemma 1 didefinisikan P_H adalah jumlah titik pada selimut H, q_H adalah jumlah sisi pada selimut H, dan $|H|$ adalah jumlah selimut pada graf $(P_n \dot{\trianglerighteq} W_6)$ dimana selimut $H = C_3$ dan didapatkan jumlah selimut pada graf $(P_n \dot{\trianglerighteq} W_6)$ adalah $|H| = 12n - 6$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} W_6) &\geq \lceil \frac{P_H + q_H + |H| - 1}{P_H + q_H} \rceil \\
&= \lceil \frac{3 + 3 + (12n - 6) - 1}{3 + 3} \rceil \\
&= \lceil \frac{12n - 1}{6} \rceil \\
&= \lceil 2n - \frac{1}{6} \rceil \\
&= \lceil 2n \rceil \\
&= 2n
\end{aligned}
$$

Jadi, $tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} W_6) \geq 2n$. Selanjutnya dilakukan pelabelan total ketidakteraturan selimut pada himpunan titik dan himpunan sisi sedimikian hingga bobot setiap selimut berbeda. Berikut ini adalah fungsi pada label titik dan label sisi pada graf $tHs(P_n\dot{\trianglerighteq}W_6)$,

$$
\begin{aligned}
f(x_i) &= \lceil \tfrac{i}{2} \rceil + 1; \quad 1 \leq i \leq 4n-4\\
f(w_i) &= \lceil \tfrac{i}{2} \rceil; \quad 1 \leq i \leq 4n\\
f(y_i) &= \begin{cases} i+1; & 1 \leq i \leq 2n-1, i = \text{ganjil}\\ i; & 1 \leq i \leq 2n-1, i = \text{genap} \end{cases}\\
f(z_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq 2n\\
f(x_{4i-3}x_{4i-2}) &= 2i; \quad 1 \leq i \leq n-1\\
f(x_{4i-3}y_{4i-1}) &= 2i; \quad 1 \leq i \leq n-1\\
f(x_{4i-2}x_{4i}) &= 2i; \quad 1 \leq i \leq n-1\\
f(x_{4i-3}y_{2i}) &= 2i; \quad 1 \leq i \leq n-1\\
f(x_{4i-2}y_{2i}) &= 2i; \quad 1 \leq i \leq n-1\\
f(x_{4i-1}y_{2i}) &= 2i; \quad 1 \leq i \leq n-1\\
f(x_{4i}y_{2i}) &= 2i+1; \quad 1 \leq i \leq n-1\\
f(x_{4i-1}y_{2i-1}) &= 2i+1; \quad 1 \leq i \leq n-1\\
f(y_{2i-1}y_{2i+1}) &= 2i+1; \quad 1 \leq i \leq n-1\\
f(z_i) &= \begin{cases} i+2; & 1 \leq i \leq 2n-2, i = \text{ganjil}\\ i+1; & 1 \leq i \leq 2n-2, i = \text{genap} \end{cases}\\
f(w_{4i-1}y_{2i-1}) &= 2i-1; \quad 1 \leq i \leq n\\
f(w_{4i-3}w_{4i-1}) &= 2i-1; \quad 1 \leq i \leq n\\
f(w_{4i}z_{2i}) &= 2i-1; \quad 1 \leq i \leq n\\
f(w_{4i-3}w_{4i-2}) &= 2i-1; \quad 1 \leq i \leq n\\
f(w_{4i-2}w_{4i}) &= 2i-1; \quad 1 \leq i \leq n\\
f(w_{4i-3}z_{2i-1}) &= 2i-1; \quad 1 \leq i \leq n\\
f(w_{4i-2}z_{2i-1}) &= 2i-1; \quad 1 \leq i \leq n\\
f(w_{4i-1}z_{2i-1}) &= 2i-1; \quad 1 \leq i \leq n\\
f(w_{4i}z_{2i-1}) &= 2i; \quad 1 \leq i \leq n\\
f(y_{2i-1}z_{2i-1}) &= 2i; \quad 1 \leq i \leq n\\
f(z_{2i-1}z_{2i}) &= 2i; \quad 1 \leq i \leq n\\
f(y_{2i-1}z_{2i}) &= 2i; \quad 1 \leq i \leq n
\end{aligned}
$$

Pada pelabelan f, bobot total H adalah $W(H) = \Sigma_{v\in V(H)}f(v) + \Sigma_{e\in E(H)}f(e)$ adalah $W(H) = \{6, 7, ..., 6 + (12n-6)\}$ yang membentuk barisan yang berurutan. Pernyataan tersebut menunjukkan bahwa bobot H berbeda. Pada label f, minimum $tHs(P_n\dot{\trianglerighteq}W_6)$ dinyatakan sebagai berikut dimana label terbesar pada $(P_n\dot{\trianglerighteq}W_6)$ adalah $\lceil \frac{i}{2} \rceil$ untuk $1 \leq i \leq 4n$ sehingga $i = 4n$

$$\begin{aligned} tHs(P_n\dot{\trianglerighteq}W_6) &\leq \lceil\frac{i}{2}\rceil \\ &= \lceil\frac{4n}{2}\rceil \\ &= \lceil 2n\rceil \\ &= 2n \end{aligned}$$

Jadi karena $tHs(P_n\dot{\trianglerighteq}W_6) \geq 2n$ dan $tHs(P_n\dot{\trianglerighteq}W_6) \leq 2n$ maka diperoleh $tHs(P_n\dot{\trianglerighteq}W_6) = 2n$. $\square$

$\Diamond$ **Teorema 2.3** *Misal G adalah graf hasil operasi* total comb product P_n *dan $B_{4,2}$ dinotasikan dengan $(P_n\dot{\trianglerighteq}B_{4,2})$ dan $H = C_4$, maka*

$$tHs(P_n\dot{\trianglerighteq}B_{4,2}) = \lceil\tfrac{8n+3}{8}\rceil$$

Bukti. Graf $(P_n\dot{\trianglerighteq}B_{4,2})$ memiliki himpunan titik $V(P_n\dot{\trianglerighteq}B_{4,2}) = \{x_i; 1 \leq i \leq 8n-8\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq 8n\} \cup \{w_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n\dot{\trianglerighteq}B_{4,2}) = \{x_{2i-1}x_{2i}; 1 \leq i \leq 4n-4\} \cup \{x_{8i-7}y_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{8i-5}y_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{8i-3}y_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{8i-1}y_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{8i-6}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{8i-4}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{8i-2}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{8i}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_iw_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{2i-1}z_{2i}; 1 \leq i \leq 4n\} \cup \{z_{8i-7}y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i-5}y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i-3}y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i-1}y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i-6}w_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i-4}w_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i-2}w_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i}w_i; 1 \leq i \leq n\}$. Jumlah titik $|V(P_n\dot{\trianglerighteq}B_{4,2})| = 18n-8$ dan jumlah sisi $|E(P_n\dot{\trianglerighteq}B_{4,2})| = 26n-13$. Berdasarkan Lemma 1 didefinisikan P_H adalah jumlah titik pada selimut H, q_H adalah jumlah sisi pada selimut H, dan $|H|$ adalah jumlah selimut pada graf $(P_n\dot{\trianglerighteq}B_{4,2})$ dimana selimut $H = C_4$ dan didapatkan jumlah selimut pada graf $(P_n\dot{\trianglerighteq}B_{4,2})$ adalah $|H| = 8n-4$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} tHs(P_n\dot{\trianglerighteq}B_{4,2}) &\geq \lceil\frac{P_H+q_H+|H|-1}{P_H+q_H}\rceil \\ &= \lceil\frac{4+4+(8n-4)-1}{4+4}\rceil \\ &= \lceil\frac{8n+3}{8}\rceil \end{aligned}$$

Jadi, $tHs(P_n\dot{\trianglerighteq}B_{4,2}) \geq \lceil\frac{8n+3}{8}\rceil$. Selanjutnya dilakukan pelabelan total ketidakteraturan selimut pada himpunan titik dan himpunan sisi sedimikian hingga bobot setiap selimut berbeda. Berikut ini adalah fungsi pada label titik dan label sisi pada graf $(P_n \dot{\trianglerighteq} B_{4,2})$,

$$\begin{aligned}
f(x_i) &= \lceil \tfrac{i}{8} \rceil + 1; \quad 1 \leq i \leq 8n-8 \\
f(y_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(w_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(z_{8i-7}y_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(z_{8i-5}y_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(z_{8i-3}y_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(z_{8i-1}y_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(z_{8i-6}w_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(z_{8i-4}w_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(z_{8i-2}w_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(z_{8i}w_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\
f(z_i) &= \begin{cases} \lceil \frac{i}{8} \rceil; \text{ untuk } \ 1 \leq i \leq 3 \\ \lceil \frac{i-3}{8} \rceil + 1; \text{ untuk } \ 4 \leq i \leq 8n \end{cases} \\
f(x_{2i-1}x_{2i}) &= \begin{cases} 1; \text{ untuk } \ i = 1 \\ \lceil \frac{i-1}{4} \rceil + 1; \text{ untuk } \ 2 \leq i \leq 4n-4 \end{cases} \\
f(x_{8i-7}y_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(x_{8i-5}y_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(x_{8i-3}y_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(x_{8i-6}y_{i+1}) &= i; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(x_{8i-4}y_{i+1}) &= i; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(x_{8i-1}y_i) &= i+1; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(x_{8i-2}y_{i+1}) &= i+1; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(x_{8i}y_{i+1}) &= i+1; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(y_iy_{i+1}) &= i+1; \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
f(z_{2i-1}z_{2i}) &= \begin{cases} \lceil \frac{i}{4} \rceil; \text{ untuk } \ 1 \leq i \leq 3 \\ \lceil \frac{i-3}{4} \rceil + 1; \text{ untuk } \ 4 \leq i \leq 4n \end{cases}
\end{aligned}$$

Pada pelabelan f, bobot total H adalah $W(H) = \Sigma_{v \in V(H)} f(v) + \Sigma_{e \in E(H)} f(e)$ adalah $W(H) = \{8, 9, ..., 8 + (8n-4)\}$ yang membentuk barisan yang berurutan. Pernyataan tersebut menunjukkan bahwa bobot H berbeda. Pada label f, minimum $tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} B_{4,2})$ dinyatakan sebagai berikut dimana label terbesar pada $(P_n \dot{\trianglerighteq} B_{4,2})$ adalah $\lceil \frac{i-3}{4} \rceil + 1$ untuk $4 \leq i \leq 4n$ sehingga $i = 4n$

$$\begin{aligned} tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} B_{4,2}) &\leq \lceil \frac{i-3}{4} \rceil + 1 \\ &= \lceil \frac{4n-3}{4} \rceil + 1 \\ &= \lceil \frac{4n-3}{4} + \frac{4}{4} \rceil \\ &= \lceil \frac{4n+1}{4} \rceil \\ &= \lceil \frac{8n+2}{8} \rceil \end{aligned}$$

karena n merupakan bilangan bulat positif dan $\lceil \frac{a}{b} \rceil$ dimana $a \leq b$ dan $b \neq 0$ selalu 1 maka berlaku $\lceil \frac{8n+2}{8} \rceil = \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil$

$$\begin{aligned} tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3) &\leq \lceil \frac{8n+2}{8} \rceil \\ &= \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil \end{aligned}$$

Jadi karena $tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} B_{4,2}) \geq \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil$ dan $tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} B_{4,2}) \leq \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil$ maka diperoleh $tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} B_{4,2}) = \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil$. $\square$

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan sebelumnya, didapatkan nilai tHs dari graf hasil operasi *total comb product* dari graf-graf khusus,yaitu $tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} Bt_3) = \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil$, $tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} W_6) = 2n$, $tHs(P_n \dot{\trianglerighteq} B_{4,2}) = \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil$.

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan total ketidakteraturan selimut dalam mencari nilai ketidakteraturan total selimut (tHs) dari graf hasil operasi *total comb product* dari graf-graf khusus, peneliti memberikan saran kepada pembaca melakukan penelitian yang sejenis dengan jenis graf yang berbeda atau operasi yang berbeda.

References

[1] Agustin, I.H. dan Dafik. 2017. Super (a,d)-edge antimagic total covering of total comb product of graph. In preparation..

[2] Agustin, I.H., Dafik, Marsidi, dan Riski E.A. 2016. On The Total H-irregularity Strength of Graphs: A new notion. *Submitted* on ICMETA 2016.

[3] Baca,M.,Jendrol., Miller, M. dan Ryan,J. 2007. *On Irreguler Total Labellings Discretes Mathematics.* **307**(1) : 1378-1388.

[4] Chartrand G., Jacobson M.S., Lehel J., Oellermann O.R., Ruiz S., Saba F. 1988. Irregular Networks, Congressus Numerantium **64**, 187-192.

[5] Dafik, Slamin, F.R. Eka, dan L. Sya'diyah. 2013. Super Antimagicness of Triangular Book and Diamond Ladder Graphs.*Proceeding of International Conference on Mathematics and Its Aplications (IICMA)*. 1-8.

[6] Damayanti,R.T. 2011. *Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan. CHAUCHY* **2**(1):35-40.

[7] Daoud, Salama N. 2013. *Complexity of Stacked Book Graph and Cone Graph. Journal of Taibah University for Science* **7**:162-172.

[8] Dinitz J.H., Garnick D.K., dan Gyarfas A. 1992. On the Irregularity Strength of the m x n grid.j.graph Theory. **16**:355-374.

[9] Frieze A., Gould R.J., Karonski M., dan Pfender F. 2004. On Graph Irregularity Strength. J, *Graph Theory.* **41**:120-137.

[10] Gallian, J. A. 2011. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics* **18**:1-256.

[11] Saputro,S.W.,Mardiana, N., dan Purwasih, I.A. 2013. *The Matric Dimension of Comb Product Graphs. Graph Theory Conference in honor of Egawa's 60th Birthday :1-2.*

[12] Togni O. 1997. Irregularity Strength of The Toroidal Grid. *Discrete Math.* **165/166**:609-620.

[13] Wardani,D.A.R. 2016. Analisis Pewarnaan Total r-dinamis pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi. *Tesis.* Jember: Universitas Jember.