

Pewarnaan Sisi r -Dinamis pada Graf Khusus dan Graf Operasi Sakel

Viqedina Rizky Noviyanti^{1,2}, Kusbudiono^{1,2}, Ika Hesti A.^{1,2}, Dafik^{1,3}

¹CGANT - Universitas Jember

²Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember

³Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

viqedina@gmail.com, kusbudiono@unej.ac.id, hestiyarin@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Let $G = (V(G), E(G))$ be a nontrivial connected graph. The edge coloring is defined as $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, with the condition that no adjacent edges have the same color. k -color r -dynamic is an edge coloring of k -colors such that each edge in neighboring $E(G)$ is at least $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ has a different color. The dynamic r -edge coloring is defined as a mapping of c from $E(G)$ such that $|c(N(uv))| = \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, where $N(uv)$ is the neighbor of uv and $c(N(uv))$ is the color used by the neighboring side of uv . The minimum value of k so that the graph G satisfies the k -coloring r -dynamic edges is called the dynamic r -edge chromatic number. 1-dynamic chromatic number is denoted by $\lambda(G)$, 2-dynamic chromatic number is denoted by $\lambda_d(G)$ and for dynamic r -chromatic number is denoted by $\lambda_r(G)$. The graphs that used in this study are graph TL_n , TCL_n and the switch operation graph $shack(H_{2,2}, v, n)$.

Keywords : r -dynamic edge coloring, r -dynamic edge chromatic number, special graphs, shackle graph

Mathematics Subject Classification: 05C15

Pendahuluan

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $(G = V, E)$, yang mana V merupakan himpunan tak kosong yang anggotanya disebut titik (*vertex*) dan E merupakan himpunan yang elemen-elemennya dinamakan sisi (*edge*). Sebuah graf G dimungkinkan tidak memiliki sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu. Sebuah graf yang tidak memiliki sisi tetapi memiliki sebuah titik saja disebut dengan graf trivial [7]. Salah satu kajian dalam teori graf adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf merupakan suatu fungsi yang memetakan unsur-unsur graf (titik dan sisi) ke suatu sembarang himpunan. Jika daerah asal adalah sebuah sisi disebut dengan pewarnaan sisi. Jika daerah asal adalah titik maka disebut dengan pewarnaan titik [6]. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf terhubung tak-trivial. Suatu pewarnaan terhadap sisi-sisi G didefinisikan sebagai $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, dimana dua sisi yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Penggunaan warna yang paling minimum disebut dengan bilangan kromatik, dan selalu memenuhi Teorema 1 sebagai berikut.

Teorema 1 [1] Jika G adalah graf sederhana, maka $\Delta(G) \leq \lambda(G) \leq \Delta(G) + 1$

Salah satu kajian dalam teori graf adalah pewarnaan sisi r -dinamis yang digeneralisasikan dari pewarnaan titik r - dinamis.

Definisi 1. *Pewarnaan sisi r -dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari E ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:*

1. jika $e = uv, f = vwe \in E(G)$ maka $c(e) \neq c(f)$, dan
2. $\forall e = uv \in E(G), |c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$.

[2] Untuk mendapatkan nilai kromatik r dinamis dirumuskan oleh Observasi 1 sebagai berikut.

Observasi 1 [4] *Misal G adalah graf terhubung dan λ merupakan bilangan kromatik dinamis maka berlaku $\lambda_r(G) \leq \lambda_{r+1}(G)$.*

Berikut beberapa definisi operasi graf yang dipakai dalam penelitian ini.

Definisi 2. [3] *Shackle dari graf H dinotasikan dengan $G = shack(H, v, n)$ adalah graf G yang dibangun dari graf non trivial H_1, H_2, \dots, H_n sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq s, t \leq n, H_s$ dan H_t tidak memiliki titik penghubung dimana $|s - t| \geq 2$ dan untuk setiap $1 \leq i \leq n - 1, H_i$ dan H_{i+1} memiliki tepat satu titik bersama v , disebut dengan titik penghubung dan $k - 1$ titik penghubung tersebut adalah berbeda. Jika $G = shack(H, v, n)$ titik penghubung digantikan dengan subgraf $K \subset H$ disebut dengan generalized shackle, dan dinotasikan dengan $G = gshack(H, K \subset H, n)$.*

Terdapat beberapa hasil penelitian pewarnaan sisi r dinamis sebelumnya, seperti Meganingtyas pada tesisya melakukan pewarnaan sisi r dinamis pada graf khusus diantaranya yaitu graf lintasan (P_n), graf sikel (C_n), graf bintang (S_n), graf roda (W_n), graf friendship (F_n), dan graf amalgamasi lintasan [5]. Pada penelitian ini, penulis akan mengangkat masalah bagaimana menemukan nilai kromatik pewarnaan sisi r -dinamis graf hasil operasi.

Hasil Penelitian

Dari hasil penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait pewarnaan sisi r -dinamis pada graf hasil operasi. Teorema yang pertama adalah nilai kromatik pada pewarnaan sisi r -dinamis dari graf $gshack(H_3, e, n)$ yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 1. *Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi r -dinamis pada graf triangular ladder (TL_n) adalah :*

$$\begin{aligned} \lambda(TL_n) &= \lambda_d(TL_n) = \lambda_3(TL_n) = 4 \\ \lambda_4(TL_n) &= 5 \\ \lambda_5(TL_n) &= 7 \\ \lambda_{r \geq 6}(TL_n) &= 9 \end{aligned}$$

Bukti. Graf TL_n dengan $n \geq 3$ memiliki himpunan titik $V(TL_n) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n+1\}$ dan himpunan sisi $E(TL_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{x_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$. $|V(TL_n)| = 2n + 2, |E(TL_n)| = 4n + 1$, serta $\Delta(TL_n) = 4$.

Kasus 1. Berdasarkan Teorema 1 bahwa $\Delta(TL_n) \leq \lambda(TL_n) \leq \Delta(TL_n) + 1$, sehingga $\lambda(TL_n) \geq 4$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda(TL_n) \leq 4$ dengan fungsi c_1 . Misal $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ adalah himpunan dari k -warna dan c_1 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D , $c_1 : E(TL_n) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} c_1(x_i y_i) &= 1, 1 \leq i \leq n + 1 \\ c_1(x_i x_{i+1}) &= \begin{cases} 3, 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ 4, 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \end{cases} \\ c_1(y_i y_{i+1}) &= \begin{cases} 4, 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ 3, 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \end{cases} \\ c_1(x_i y_{i+1}) &= 2, 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dari fungsi pewarnaan c_1 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 1, 2, 3-dinamis ada-lah $\lambda(TL_n) \leq 4$. Karena $\lambda(TL_n) \geq 4$ dan $\lambda(TL_n) \leq 4$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\lambda(TL_n) = \lambda_d(TL_n) = \lambda_3(TL_n) = 4$.

Kasus 2. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_4(TL_n) \geq \lambda_3(TL_n)$, maka $\lambda_4(TL_n) \geq 4$. Misal $\lambda_4(TL_n) = 4$ maka pewarnaan sisinya adalah c_1 . Andaikan untuk $x_1 x_2$, $|c(N(e))| = 3$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{4, 5\} = 4$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_4(TL_n) \geq 5$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_4(TL_n) \leq 5$ dengan fungsi c_2 . Misal $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ adalah himpunan dari k -warna dan c_2 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D , $c_2 : E(TL_n) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} c_2(x_i y_i) &= \begin{cases} 2, 1 \leq i \leq n + 1, i \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, 1 \leq i \leq n + 1, i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 5, 1 \leq i \leq n + 1, i \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases} \\ c_2(x_i x_{i+1}) &= \begin{cases} 3, 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, \\ 4, 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \end{cases} \\ c_2(y_i y_{i+1}) &= \begin{cases} 4, 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, \\ 3, 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, \end{cases} \\ c_2(x_i y_{i+1}) &= \begin{cases} 5, 1 \leq i \leq n, i \equiv 0(\text{mod } 3), \\ 2, 1 \leq i \leq n, i \equiv 1(\text{mod } 3), \\ 1, 1 \leq i \leq n, i \equiv 2(\text{mod } 3), \end{cases} \end{aligned}$$

Dari fungsi pewarnaan c_2 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 4-dinamis adalah $\lambda_4(TL_n) \leq 5$. Karena $\lambda_4(TL_n) \geq 5$ dan $\lambda_4(TL_n) \leq 5$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\lambda_4(TL_n) = 5$.

Kasus 3. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_5(TL_n) \geq \lambda_4(TL_n)$, maka $\lambda_5(TL_n) \geq 5$. Misal $\lambda_5(TL_n) = 5$ maka pewarnaan sisinya adalah c_2 . Andaikan untuk $x_1 x_2$, $|c(N(e))| = 4$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{5, 5\} = 5$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_5(TL_n) \geq 6$. Misal $\lambda_5(TL_n) = 6$ maka pewarnaan sisinya pada figure 1. Andaikan untuk $x_2 y_2$ (lihat

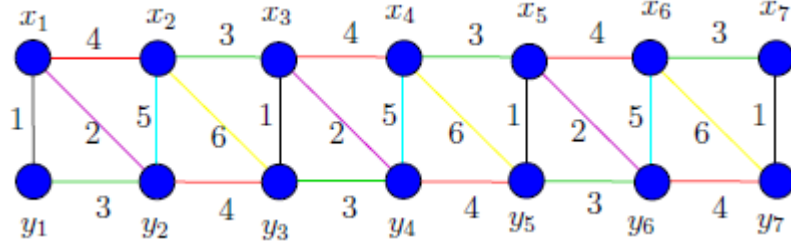


Figure 1: Pewarnaan Sisi 5-dinamis pada TL_6 dengan 6 warna

figure 1), $|c(N(e))| = 4$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{5, 6\} = 5$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_5(TL_n) \geq 7$.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_5(TL_n) \leq 7$ dengan fungsi c_3 . Misal $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ adalah himpunan dari k -warna dan c_1 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D , $c_3 : E(TL_n) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_3(x_i y_i) = \begin{cases} 5, & 1 \leq i \leq n + 1, \text{ } i \text{ genap} \\ 1, & 1 \leq i \leq n + 1, \text{ } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$c_3(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 3, & 1 \leq i \leq n, \text{ } i \text{ genap} \\ 4, & 1 \leq i \leq n, \text{ } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$c_3(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} 7, & 1 \leq i \leq n, \text{ } i \text{ genap} \\ 3, & 1 \leq i \leq n, \text{ } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$c_3(x_i y_{i+1}) = \begin{cases} 6, & 1 \leq i \leq n, \text{ } i \text{ genap,} \\ 2, & 1 \leq i \leq n, \text{ } i \text{ ganjil,} \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_3 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 5-dinamis adalah $\lambda_5(TL_n) \leq 7$. Karena $\lambda_5(TL_n) \geq 7$ dan $\lambda_5(TL_n) \leq 7$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\lambda_5(TL_n) = 7$.

Kasus 4. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_6(TL_n) \geq \lambda_5$, maka $\lambda_6(TL_n) \geq 7$. Misal $\lambda_6(TL_n) = 7$ maka pewarnaan sisinya adalah c_3 . Andaikan $x_2 y_2$, $|c(N(e))| = 5$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{6, 6\} = 6$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_6(TL_n) \geq 8$. Misal $\lambda_6(TL_n) = 8$ maka pewarnaan sisinya pada figure 2. Andaikan untuk $y_2 y_3$ (lihat figure 2), $|c(N(e))| = 5$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{6, 6\} = 6$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_6(TL_n) \geq 9$.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_6(TL_n) \leq 9$ dengan fungsi c_4 . Misal $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ adalah himpunan dari k -warna dan c_1 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D , $c_4 : E(TL_n) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_4(x_i y_i) = \begin{cases} 5, & 1 \leq i \leq n + 1, \text{ } i \text{ genap} \\ 1, & 1 \leq i \leq n + 1, \text{ } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

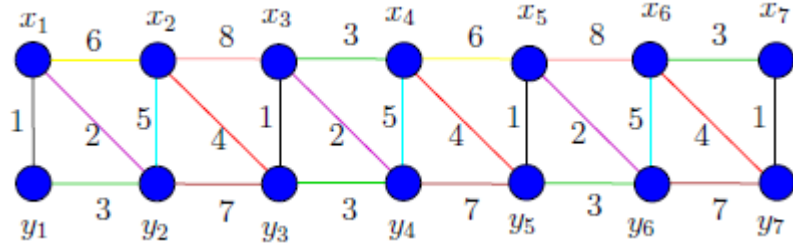


Figure 2: Pewarnaan sisi 6-dinamis dengan pada TL_6 dengan 8 warna

$$c_4(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 9, 1 \leq i \leq n, i \equiv 0(\text{mod } 5) \\ 6, 1 \leq i \leq n, i \equiv 1(\text{mod } 5) \\ 8, 1 \leq i \leq n, i \equiv 2(\text{mod } 5) \\ 3, 1 \leq i \leq n, i \equiv 3(\text{mod } 5) \\ 7, 1 \leq i \leq n, i \equiv 4(\text{mod } 5) \end{cases}$$

$$c_4(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} 8, 1 \leq i \leq n, i \equiv 0(\text{mod } 5) \\ 3, 1 \leq i \leq n, i \equiv 1(\text{mod } 5) \\ 7, 1 \leq i \leq n, i \equiv 2(\text{mod } 5) \\ 9, 1 \leq i \leq n, i \equiv 3(\text{mod } 5) \\ 6, 1 \leq i \leq n, i \equiv 4(\text{mod } 5) \end{cases}$$

$$c_4(x_i y_{i+1}) = \begin{cases} 4, 1 \leq i \leq n, i \text{ genap,} \\ 2, 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil,} \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_4 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 6-dinamis adalah $\lambda_6(TL_n) \leq 9$. Karena $\lambda_6(TL_n) \geq 9$ dan $\lambda_6(TL_n) \leq 9$ sehingga dapat simpulkan bahwa $\lambda_6(TL_n) = 9$. Pada graf *triangular ladder* (TL_n) nilai dari $\max\{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G)\} = 6$. Dengan demikian fungsi pewarnaan c_4 juga berlaku untuk r lainnya, dimana $r \geq 6$. Hal ini disebabkan pada saat $r \geq 6$ nilai $\min\{r, \max\{d(v) + d(u) - 2, uv \in E(G)\}\} = \max\{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G)\} = 6$. Oleh karena itu, nilai bilangan kromatik dinamis $\lambda_{r \geq 6}(TL_n) = \lambda_6(TL_n) = 9$. Berdasarkan uraian diatas Teorema 1 terbukti. \square

Teorema 2. Untuk $n \geq 3$, bilangan kromatik sisi r -dinamis pada graf tangga tiga siklus (TCL_n) adalah :

$$\begin{aligned} \lambda(TCL_n) = \lambda_d(TCL_n) = \lambda_3(TCL_n) = \lambda_4(TCL_n) &= 5 \\ \lambda_5(TCL_n) &= 7 \\ \lambda_6(TCL_n) &= 9 \\ \lambda_7(TCL_n) &= 11 \\ \lambda_{r \geq 8}(TCL_n) &= 12 \end{aligned}$$

Bukti. Graf TCL_n dengan $n \geq 3$ memiliki himpunan titik $V(TCL_n) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(TCL_n) = \{x_i z_i, y_i z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i+1} z_i, y_{i+1} z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$. $|V(TCL_n)| = 3n + 2, |E(TCL_n)| = 6n + 1$, serta $\Delta(TCL_n) = 5$.

Kasus 1. Berdasarkan Teorema 1 bahwa $\Delta(TCL_n) \leq \lambda(TCL_n) \leq \Delta(TCL_n) + 1$, sehingga $\lambda(TCL_n) \geq 5$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda(TCL_n) \leq 5$ dengan fungsi

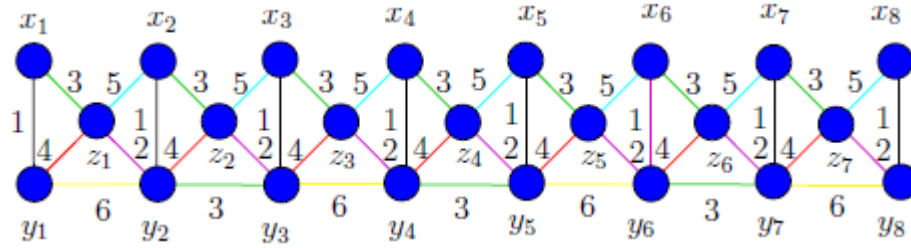


Figure 3: Pewarnaan sisi 5-dinamis pada TCL_7 dengan 6 warna

c_5 . Misal $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ adalah himpunan dari k -warna dan c_5 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D , $c_5 : E(TCL_n) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 c_5(x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n, x_{n+1}y_{n+1}) &= 11 \dots 11 \\
 c_5(x_1z_1, x_2z_2, \dots, x_nz_n) &= 33 \dots 33 \\
 c_5(y_1z_1, y_2z_2, \dots, y_nz_n) &= 44 \dots 44 \\
 c_5(x_2z_1, x_3z_2, \dots, x_nz_{n-1}, x_{n+1}z_n) &= \begin{cases} 52 \dots 52, & n \text{ genap} \\ 52 \dots 52 5, & n \text{ ganjil} \end{cases} \\
 c_5(y_2z_1, y_3z_2, \dots, y_nz_{n-1}, y_{n+1}z_n) &= \begin{cases} 25 \dots 25, & n \text{ genap} \\ 25 \dots 25 2, & n \text{ ganjil} \end{cases} \\
 c_5(y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) &= \begin{cases} 53 \dots 53, & n \text{ genap} \\ 53 \dots 53 5, & n \text{ ganjil} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dari fungsi pewarnaan c_5 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 1, 2, 3, 4-dinamis adalah $\lambda(TCL_n) \leq 5$. Karena $\lambda(TCL_n) \geq 5$ dan $\lambda(TCL_n) \leq 5$ sehingga dapat simpulkan bahwa $\lambda(TCL_n) = \lambda_d(TCL_n) = \lambda_3(TCL_n) = \lambda_4(TCL_n) = 5$.

Kasus 2. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_5(TCL_n) \geq \lambda_4(TCL_n)$, maka $\lambda_5(TCL_n) \geq 5$. Misal $\lambda_5(TCL_n) = 5$ maka pewarnaan sisinya adalah c_5 . Andaikan untuk y_1z_1 , $|c(N(e))| = 4$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{5, 5\} = 5$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_5(TCL_n) \geq 6$. Misal $\lambda_5(TCL_n) = 6$ maka pewarnaan sisinya pada Figure 3. Andaikan untuk x_2z_1 (lihat Figure 3), $|c(N(e))| = 4$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{5, 5\} = 5$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_5(TCL_n) \geq 7$.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_5(TCL_n) \leq 7$ dengan fungsi c_6 . Misal $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ adalah himpunan dari k -warna dan c_6 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D , $c_6 : E(TCL_n) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_6(x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n, x_{n+1}y_{n+1}) = \begin{cases} 176523 \dots 176523, & n \equiv 5 \pmod{6} \\ 176523 \dots 176523 1, & n \equiv 0 \pmod{6} \\ 176523 \dots 176523 17, & n \equiv 1 \pmod{6} \\ 176523 \dots 176523 176, & n \equiv 2 \pmod{6} \\ 176523 \dots 176523 1765, & n \equiv 3 \pmod{6} \\ 176523 \dots 176523 17652, & n \equiv 4 \pmod{6} \end{cases}$$

$$c_6(x_1z_1, x_2z_2, \dots, x_nz_n) = \begin{cases} 317652 \dots 317652, n \equiv 0(\text{mod } 6) \\ 317652 \dots 317652 \ 3, n \equiv 1(\text{mod } 6) \\ 317652 \dots 317652 \ 31, n \equiv 2(\text{mod } 6) \\ 317652 \dots 317652 \ 317, n \equiv 3(\text{mod } 6) \\ 317652 \dots 317652 \ 3176, n \equiv 4(\text{mod } 6) \\ 317652 \dots 317652 \ 31765, n \equiv 5(\text{mod } 6) \end{cases}$$

$$c_6(y_1z_1, y_2z_2, \dots, y_nz_n) = 44 \dots 44$$

$$c_6(x_2z_1, x_3z_3, \dots, x_nz_{n-1}, x_{n+1}z_n) = \begin{cases} 523176 \dots 523176, n \equiv 0(\text{mod } 6) \\ 523176 \dots 523176 \ 5, n \equiv 1(\text{mod } 6) \\ 523176 \dots 523176 \ 52, n \equiv 2(\text{mod } 6) \\ 523176 \dots 523176 \ 523, n \equiv 3(\text{mod } 6) \\ 523176 \dots 523176 \ 5231, n \equiv 4(\text{mod } 6) \\ 523176 \dots 523176 \ 52317, n \equiv 5(\text{mod } 6) \end{cases}$$

$$c_6(y_2z_1, y_3z_2, \dots, y_nz_{n-1}, y_{n+1}z_n) = \begin{cases} 231765 \dots 231765, n \equiv 0(\text{mod } 6) \\ 231765 \dots 231765 \ 2, n \equiv 1(\text{mod } 6) \\ 231765 \dots 231765 \ 23, n \equiv 2(\text{mod } 6) \\ 231765 \dots 231765 \ 231, n \equiv 3(\text{mod } 6) \\ 231765 \dots 231765 \ 2317, n \equiv 4(\text{mod } 6) \\ 231765 \dots 231765 \ 23176, n \equiv 5(\text{mod } 6) \end{cases}$$

$$c_6(y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 652317 \dots 652317, n \equiv 0(\text{mod } 6) \\ 652317 \dots 652317 \ 6, n \equiv 1(\text{mod } 6) \\ 652317 \dots 652317 \ 65, n \equiv 2(\text{mod } 6) \\ 652317 \dots 652317 \ 652, n \equiv 3(\text{mod } 6) \\ 652317 \dots 652317 \ 6523, n \equiv 4(\text{mod } 6) \\ 652317 \dots 652317 \ 65231, n \equiv 5(\text{mod } 6) \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_6 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 5-dinamis adalah $\lambda_5(TCL_n) \leq 7$. Karena $\lambda_5(TCL_n) \geq 7$ dan $\lambda_5(TCL_n) \leq 7$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\lambda_5(TCL_n) = 7$.

Kasus 3. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_6(TCL_n) \geq \lambda_5(TCL_n)$, maka $\lambda_6(TCL_n) \geq 7$. Misal $\lambda_6(TCL_n) = 7$ maka pewarnaan sisinya adalah c_6 . Andaikan untuk x_2y_2 , $|c(N(e))| = 5$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{6, 6\} = 6$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_6(TCL_n) \geq 8$. Misal $\lambda_6(TCL_n) = 8$ maka pewarnaan sisinya pada Figure 4. Andaikan untuk x_3y_3 (Figure 4), $|c(N(e))| = 5$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{6, 6\} = 6$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_6(TCL_n) \geq 9$.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_6(TCL_n) \leq 9$ dengan fungsi c_7 . Misal $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ adalah himpunan dari k -warna dan c_7 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D , $c_7 : E(TCL_n) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_7(x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n, x_{n+1}y_{n+1}) = \begin{cases} 176 \dots 176, n \equiv 2(\text{mod } 3) \\ 176 \dots 176 \ 1, n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 176 \dots 176 \ 17, n \equiv 1(\text{mod } 3) \end{cases}$$

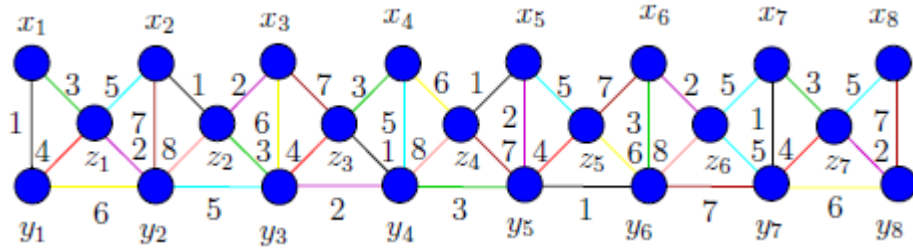


Figure 4: Pewarnaan sisi 6-dinamis pada TCL_7 dengan 8 warna

$$c_7(x_1z_1, x_2z_2, \dots, x_nz_n) = \begin{cases} 312 \dots 312, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 312 \dots 312 \ 3, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 312 \dots 312 \ 31, & n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$$c_7(y_1z_1, y_2z_2, \dots, y_nz_n) = \begin{cases} 487 \dots 487, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 487 \dots 487 \ 4, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 487 \dots 487 \ 48, & n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$$c_7(x_2z_1, x_3z_2, \dots, x_nz_{n-1}, x_{n+1}z_n) = \begin{cases} 548 \dots 548, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 548 \dots 548 \ 5, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 548 \dots 548 \ 54, & n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$$c_7(y_2z_1, y_3z_2, \dots, y_nz_{n-1}, y_{n+1}z_n) = \begin{cases} 239 \dots 239, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 239 \dots 239 \ 2, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 239 \dots 239 \ 23, & n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$$c_7(y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 695 \dots 695, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 695 \dots 695 \ 6, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 695 \dots 695 \ 69, & n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_7 terlihat bahwa bialangan kromatik sisi 6-dinamis adalah $\lambda_6(TCL_n) \leq 9$. Karena $\lambda_6(TCL_n) \geq 9$ dan $\lambda_6(TCL_n) \leq 9$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\lambda_6(G) = 9$.

Kasus 4. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_7(TCL_n) \geq \lambda_6(TCL_n)$, maka $\lambda_7(TCL_n) \geq 9$. Misal $\lambda_7(TCL_n) = 9$ maka pewarnaan sisinya adalah c_7 . Andaikan untuk y_3z_3 , $|c(N(e))| = 6$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{7, 7\} = 7$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_7(TCL_n) \geq 10$. Misal $\lambda_7(TCL_n) = 10$ maka pewarnaan sisinya pada Figure 5. Andaikan untuk y_4z_3 (Figure 5), $|c(N(e))| = 6$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{7, 7\} = 7$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_7(TCL_n) \geq 11$.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_7(TCL_n) \leq 11$ dengan mewarnai c_8 . Misal $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ adalah himpunan dari k -warna dan c_8 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D , $c_8 : E(TCL_n) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_8(x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n, x_{n+1}y_{n+1}) = \begin{cases} 175 \dots 175, & n \equiv 2 \pmod{3} \\ 175 \dots 175 \ 1, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 175 \dots 175 \ 17, & n \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

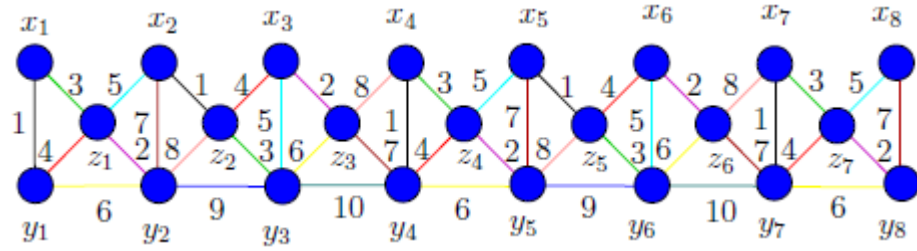


Figure 5: Pewarnaan sisi 7-dinamis pada TCL_6 dengan 10 warna

$$c_8(x_1z_1, x_2z_2, \dots, x_nz_n) = \begin{cases} 312 \dots 312, & n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 312 \dots 312 3, & n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 312 \dots 312 31, & n \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$c_8(y_1z_1, y_2z_2, \dots, y_nz_n) = \begin{cases} 486 \dots 486, & n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 486 \dots 486 4, & n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 486 \dots 486 48, & n \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$c_8(x_2z_1, x_3z_2, \dots, x_nz_{n-1}, x_{n+1}z_n) = \begin{cases} 548 \dots 548, & n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 548 \dots 548 5, & n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 548 \dots 548 54, & n \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$c_8(y_2z_1, y_3z_2, \dots, y_nz_{n-1}, y_{n+1}z_n) = \begin{cases} 23(11) \dots 23(11), & n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 23(11) \dots 23(11) 2, & n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 23(11) \dots 23(11) 23, & n \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$c_8(y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 69(10) \dots 69(10), & n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 69(10) \dots 69(10) 6, & n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 69(10) \dots 69(10) 69, & n \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_8 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 7-dinamis adalah $\lambda_7(TCL_n) \leq 11$. Karena $\lambda_7(TCL_n) \geq 11$ dan $\lambda_7(TCL_n) \leq 7$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\lambda_7(TCL_n) = 11$.

Kasus 5. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_8(TCL_n) \geq \lambda_7(TCL_n)$, maka $\lambda_8(TCL_n) \geq 11$. Misal $\lambda_8(TCL_n) = 11$ maka pewarnaan sisinya adalah c_8 . Andaikan untuk y_3y_4 (lihat Gambar 4.13), $|c(N(e))| = 7$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{8, 8\} = 8$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_8(TCL_n) \geq 12$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_8(TCL_n) \leq 12$ dengan fungsi c_9 . Misal $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ adalah himpunan dari k -warna dan c_9 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D , $c_9 : E(TCL_n) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$, fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_9(x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n, x_{n+1}y_{n+1}) = \begin{cases} 175 \dots 175, & n \equiv 2(\text{mod } 3) \\ 175 \dots 175 1, & n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 175 \dots 175 17, & n \equiv 1(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$c_9(x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_nz_n) = \begin{cases} 312 \dots 312, & n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 312 \dots 312 3, & n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 312 \dots 312 31, & n \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$c_9(y_1z_1, y_2z_2, \dots, y_nz_n) = \begin{cases} 48(12) \dots 48(12), & n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 48(12) \dots 48(12) 4, & n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 48(12) \dots 48(12) 48, & n \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$c_9(x_2z_1, x_3z_2, \dots, x_nz_{n-1}, x_{n+1}z_n) = \begin{cases} 548 \dots 548, & n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 548 \dots 548 5, & n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 548 \dots 548 54, & n \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$c_9(y_2z_1, y_3z_2, \dots, y_nz_{n-1}, y_{n+1}z_n) = \begin{cases} 23(11) \dots 23(11), & n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 23(11) \dots 23(11) 2, & n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 23(11) \dots 23(11) 23, & n \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$c_9(y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 69(10) \dots 69(10), & n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 69(10) \dots 69(10) 6, & n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 69(10) \dots 69(10) 69, & n \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_9 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 8-dinamis adalah $\lambda_8(TCL_n) \leq 12$. Karena $\lambda_8(TCL_n) \geq 12$ dan $\lambda_8(TCL_n) \leq 12$ sehingga dapat simpulkan bahwa $\lambda_8(TCL_n) = 12$. Pada graf tangga tiga siklus (TCL_n) nilai dari $\max\{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G)\} = 8$. Sehingga fungsi pewarnaan c_9 juga berlaku untuk r lainnya, dengan $r \geq 8$. Hal ini disebabkan pada saat $r \geq 8$ nilai $\min\{r, \max\{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G)\}\} = \max\{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G)\} = 8$. Oleh karena itu, nilai bilangan kromatik dinamis $\lambda_{r \geq 8}(TCL_n) = \lambda_8(TCL_n) = 12$. Berdasarkan uraian diatas Teorema 2 terbukti. \square

Teorema 3. Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi r -dinamis pada graf $G = shack(H_{2,2}, v, n)$ adalah :

$$\begin{aligned} \lambda(shack(H_{2,2}, v, n)) &= \lambda_d(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_3(shack(H_{2,2}, v, n)) = 4 \\ \lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) &= 6 \\ \lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n)) &= 7 \\ \lambda_{r \geq 6}(shack(H_{2,2}, v, n)) &= 8 \end{aligned}$$

Bukti. $shack(H_{2,2}, v, n)$, dengan $n \geq 3$ memiliki himpunan titik dan himpunan sisi graf $G = shack(H_{2,2}, v, n), n \geq 2$ adalah $V(shack(H_{2,2}, v, n)) = \{x_i, z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n + 1\}$, $E(shack(H_{2,2}, v, n)) = \{y_i z_i, x_i z_i, x_i y_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$, $|V(shack(H_{2,2}, v, n))| = 3n + 1$ dan $|E(shack(H_{2,2}, v, n))| = 4n$, serta $\Delta(shack(H_{2,2}, v, n)) = 4$.

Kasus 1. Berdasarkan Teorema 1 bahwa $\Delta(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq \lambda(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq \Delta(shack(H_{2,2}, v, n)) + 1$, sehingga $\lambda(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 4$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq 4$ dengan fungsi c_{12} . Misal $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ adalah himpunan dari k -warna dan c_{12} adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D , $c_{10} : E(shack(H_{2,2}, v, n)) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_{10}(y_1z_1, y_2z_2, \dots, y_nz_n) = 11 \dots 11,$$

$$c_{10}(y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 23 \dots 23, & n \text{ genap,} \\ 23 \dots 23 2, & n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

$$c_{10}(x_1z_1, x_2z_2, \dots, x_nz_n) = \begin{cases} 32 \dots 32, & n \text{ genap,} \\ 32 \dots 32 3, & n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

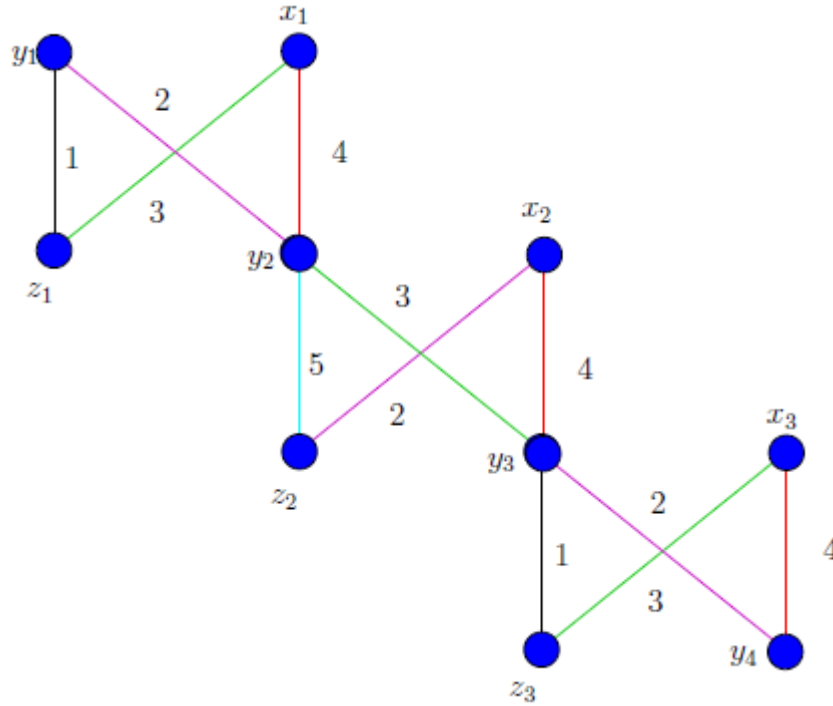


Figure 6: Pewarnaan sisi 4-dinamis pada $shack(H_{2,2}, v, 3)$ dengan 5 warna

$$c_{10}(x_1y_2, x_2y_3, \dots, x_{n-1}y_n, x_ny_{n+1}) = 44 \dots 44,$$

Dari fungsi pewarnaan c_{10} terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 1, 2, 3-dinamis adalah $\lambda(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq 4$. Karena $\lambda(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 4$ dan $\lambda(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq 4$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\lambda_d(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_d(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_3(shack(H_{2,2}, v, n)) = 4$.

Kasus 2. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq \lambda_3(shack(H_{2,2}, v, n))$, maka $\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 4$. Misal $\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) = 4$ maka pewarnaan sisinya adalah c_{12} . Andaikan untuk y_1y_2 , $|c(N(e))| = 3$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{4, 4\} = 4$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 5$. Misal $\lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n)) = 5$ maka pewarnaan sisinya pada Figure 6. Andaikan untuk x_1y_2 (lihat Figure 6), $|c(N(e))| = 3$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{4, 4\} = 4$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 6$.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq 6$ dengan fungsi c_{11} . Misal $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ adalah himpunan dari k -warna dan c_{11} adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D , $c_{11} : E(shack(H_{2,2}, v, n)) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_{11}(y_1z_1, y_2z_2, \dots, y_nz_n) = \begin{cases} 153 \dots 153, & n \equiv 0 \pmod{3}, \\ 153 \dots 153 1, & n \equiv 1 \pmod{3}, \\ 153 \dots 153 15, & n \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

$$c_{11}(y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 265 \dots 265, & n \equiv 0(\text{mod } 3), \\ 265 \dots 265 2, & n \equiv 1(\text{mod } 3), \\ 265 \dots 265 26, & n \equiv 2(\text{mod } 3), \end{cases}$$

$$c_{11}(x_1z_1, x_2z_2, \dots, x_nz_n) = \begin{cases} 314 \dots 314, & n \equiv 0(\text{mod } 3), \\ 314 \dots 314 3, & n \equiv 1(\text{mod } 3), \\ 314 \dots 314 31, & n \equiv 2(\text{mod } 3), \end{cases}$$

$$c_{11}(x_1y_2, x_2y_3, \dots, x_{n-1}y_n, x_ny_{n+1}) = \begin{cases} 426 \dots 426, & n \equiv 0(\text{mod } 3), \\ 426 \dots 426 4, & n \equiv 1(\text{mod } 3), \\ 426 \dots 426 42, & n \equiv 2(\text{mod } 3), \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_{11} terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 4-dinamis adalah $\lambda_4(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) \leq 6$. Karena $\lambda_4(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) \geq 6$ dan $\lambda_4(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) \leq 6$ maka dapat disimpulkan bahwa $\lambda_4(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) = 6$.

Kasus 3. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_5(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) \geq \lambda_4(\text{shack}(H_{2,2}, v, n))$, maka $\lambda_5(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) \geq 6$. Misal $\lambda_5(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) = 6$ maka pewarnaan sisinya adalah c_{11} . Andaikan untuk y_2y_3 , $|c(N(e))| = 4$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{5, 6\} = 5$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_5(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) \geq 7$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_5(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) \leq 7$ dengan fungsi c_{12} . Misal $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ adalah himpunan dari k -warna dan c_{14} adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D , $c_{12} : E(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_{12}(y_1z_1, y_2z_2, \dots, y_nz_n) = \begin{cases} 15 \dots 15, & n \text{ genap}, \\ 15 \dots 15 1, & n \text{ ganjil}, \end{cases}$$

$$c_{12}(y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 26 \dots 26, & n \text{ genap}, \\ 26 \dots 26 2, & n \text{ ganjil}, \end{cases}$$

$$c_{12}(x_1z_1, x_2z_2, \dots, x_nz_n) = 33 \dots 33,$$

$$c_{12}(x_1y_2, x_2y_3, \dots, x_{n-1}y_n, x_ny_{n+1}) = \begin{cases} 47 \dots 47, & n \text{ genap}, \\ 47 \dots 47 4, & n \text{ ganjil}, \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_{12} terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 5-dinamis adalah $\lambda_5(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) \leq 7$. Karena $\lambda_5(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) \geq 7$ dan $\lambda_5(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) \leq 7$ maka dapat disimpulkan bahwa $\lambda_5(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) = 7$.

Kasus 4. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_6(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) \geq \lambda_5(\text{shack}(H_{2,2}, v, n))$, maka $\lambda_6(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) \geq 7$. Misal $\lambda_6(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) = 7$ maka pewarnaan sisinya adalah c_{12} . Andaikan untuk y_2y_3 , $|c(N(e))| = 5$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{6, 6\} = 6$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \not\geq \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_6(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) \geq 8$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_6(\text{shack}(H_{2,2}, v, n)) \leq 8$ dengan fungsi c_{13} . Misal $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ adalah himpunan dari k -warna dan c_{13} adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan

warna D , $c_{13} : E(shack(H_{2,2}, v, n)) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_{13}(y_1z_1, y_2z_2, \dots, y_nz_n) = \begin{cases} 153 \dots 153, & n \equiv 0(mod 3), \\ 153 \dots 153 1, & n \equiv 1(mod 3), \\ 153 \dots 153 15, & n \equiv 2(mod 3), \end{cases}$$

$$c_{13}(y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 268 \dots 268, & n \equiv 0(mod 3), \\ 268 \dots 268 2, & n \equiv 1(mod 3), \\ 268 \dots 268 26, & n \equiv 2(mod 3), \end{cases}$$

$$c_{13}(x_1z_1, x_2z_2, \dots, x_nz_n) = \begin{cases} 314 \dots 314, & n \equiv 0(mod 3), \\ 314 \dots 314 3, & n \equiv 1(mod 3), \\ 314 \dots 314 31, & n \equiv 2(mod 3), \end{cases}$$

$$c_{13}(x_1y_2, x_2y_3, \dots, x_{n-1}y_n, x_ny_{n+1}) = \begin{cases} 475 \dots 475, & n \equiv 0(mod 3), \\ 475 \dots 475 4, & n \equiv 1(mod 3), \\ 475 \dots 475 47, & n \equiv 2(mod 3), \end{cases}$$

Dari pewarnaan c_{13} terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 6-dinamis adalah $\lambda_6(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq 8$. Karena $\lambda_6(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 8$ dan $\lambda_6(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq 8$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\lambda_6(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_r(shack(H_{2,2}, v, n)) = 8$. Pada graf operasi sakel *cocktail party* ($shack(H_{2,2}, v, n)$) nilai dari $max\{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G)\} = 6$. Dengan demikian fungsi pewarnaan c_{13} juga berlaku untuk r lainnya, dengan $r \geq 6$. Hal ini disebabkan pada saat $r \geq 6$ nilai $min\{r, max\{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G)\}\} = max\{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G)\} = 6$. Oleh karena itu, nilai bilangan kromatik dinamis $\lambda_{r \geq 6}(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_6(shack(H_{2,2}, v, n)) = 8$. Berdasarkan uraian diatas Teorema 3 terbukti. \square

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa graf TL_n dengan $n \geq 3$ diperoleh $\lambda(TL_n) = \lambda_d(TL_n) = \lambda_3(TL_n) = 4, \lambda_4(TL_n) = 5, \lambda_5(TL_n) = 7, \lambda_{r \geq 6}(TL_n) = 9$, dan graf TCL_n dengan $n \geq 3$ diperoleh $\lambda(TCL_n) = \lambda_d(TCL_n) = \lambda_3(TCL_n) = \lambda_4(TCL_n) = 5, \lambda_5(TCL_n) = 7, \lambda_6(TCL_n) = 9, \lambda_7(TCL_n) = 11, \lambda_{r \geq 8}(TCL_n) = 12$, serta graf operasi sakel ($shack(H_{2,2}, v, n)$) dengan $n \geq 3, \lambda(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_d(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_3(shack(H_{2,2}, v, n)) = 4, \lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) = 6, \lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n)) = 7, \lambda_{r \geq 6}(shack(H_{2,2}, v, n)) = 8$.

Masalah terbuka 1 Tentukan nilai kromatik pewarnaan sisi r -dinamis dari graf khusus dan graf hasil operasi sakel graf yang lain. Tentukan bilangan kromatik pewarnaan sisi r -dinamis dari graf khusus Helm (H_n) dan hasil operasi $shack(H_{m,n}, v, n)$.

Referensi

[1] Chartrand, G dan Zhang, P. 2009. *Chromatic Graph Theory*. USA: CRC Press.

- [2] Dafik dan Meganingtyas. 2015. On Edge r -dynamic Coloring of Graphs. *Graph Master Workshop*. Universitas Jember.
- [3] Dafik, S. Setiawani, dan K.M.F. Azizah. Generalized Shackle of Fans is a Super (a,d) -Edge Antimagic Total Graph. *Applied Mathematical Sciences*, Submitted, 2015.
- [4] Kang, R., Muller, T., dan West, D. B. 2015. On r -Dynamic Coloring of Grids. *Discrete Applied Mathematics*. **186**: 286-290.
- [5] Meganingtyas, Devi E. 2015."Analisis Pewarnaan r -dinamis pada graf-graf khusus". Tidak Diterbitkan. Tesis. Jember: Universitas Jember.
- [6] Munir, Rinaldi. 2012. *Matematika Diskrit Edisi Kelima*. Bandung: Informatika.
- [7] Slamin. 2009.*Desain Jaringan : Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.