CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 2, No 2, 2021
DOI:
10.25037/cgantjma.v2i2.56

Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Kajian *Rainbow 2-Connected* Pada Graf Eksponensial dan Beberapa Operasi Graf

Herninda Lucky Oktaviana[1,2], Ika Hesti A.[1,2], Dafik[1,3]
[1]CGANT - Universitas Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
[3]Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
herninda.lucky17@gmail.com, hestyarin@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Let $G = (V(G), E(G))$ is a graph connected non-trivial. *Rainbow connection* is edge coloring on the graph defined as $f : E(G) \to \{1, 2, ..., r|r \in N\}$, for every two distinct vertices in G have at least one *rainbow path*. The graph G says *rainbow connected* if every two vertices are different in G associated with *rainbow path*. A path $u - v$ in G says *rainbow path* if there are no two edges in the trajectory of the same color. The edge coloring sisi cause G to be *rainbow connected* called *rainbow coloring*. Minimum coloring in a graph G called *rainbow connection number* which is denoted by $rc(G)$. If the graph G has at least two *disjoint rainbow path* connecting two distinct vertices in G. So graph G is called *rainbow 2-connected* which is denoted by $rc_2(G)$. The purpose of this research is to determine *rainbow 2-connected* of some resulting graph operations. This research study *rainbow 2-connected* on the graph ($C_4{}^{K_n}$ and $Wd_{(3,2)} \Box K_n$).

Keywords : *rainbow 2-connected*, coloring of *rainbow 2-connected*, graph operation
Mathematics Subject Classification: 05C15

Pendahuluan

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(v(G), E(G))$, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah himpunan berhingga yang tidak kosong dan elemennya disebut titik (*vertex*), sedangkan $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ adalah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan dua buah titik atau lebih. Suatu graf G dimungkinkan tidak memiliki sisi, tetapi harus ada minimal satu titik [10]. Banyaknya titik pada graf G disebut *order* dari G yang dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan banyakya sisi pada graf G disebut *size* dari graf G yang dinotasikan dengan $|E(G)|$ [5].

Jarak (*distance*) antara dua titik v_i dan v_j yang dinotasikan dengan $d(v_i, v_j)$ adalah panjang lintasan terpendek dari titik v_i ke titik v_j. Jarak maksimum antara dua titik sebarang pada graf G disebut diameter yang dinotasikan dengan $diam(G) = max\{e(v) : v \in V\}$. Salah satu kajian dalam teori graf adalah *rainbow connection*. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf terhubung tidak trivial. *Rainbow connection* adalah pewarnaan sisi pada graf G yang didefinisikan sebagai $f : E(G) \to \{1, 2, 3, \ldots, r|r \in N\}$, untuk setiap dua titik yang berbeda di G memiliki minimal satu *rainbow path*. Graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan dengan *rainbow path*. Suatu lintasan $u - v$ di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di lintasan tersebut yang memiliki warna sama. Pewarnaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connected* disebut *rainbow coloring*. Banyaknya warna minimal yang digunakan agar graf G bersifat *rainbow connected* disebut *rainbow connection number* yang dinotasikan dengan $rc(G)$ [6]. Apabila graf G memiliki minimal dua *disjoint rainbow path* yang menghubungkan setiap dua titik berbeda di G, maka graf G dikatakan *rainbow 2-connected* yang dinotasikan dengan $rc_2(G)$. Berikut beberapa definisi operasi graf yang digunakan dalam penelitian ini.

Definisi 1. *Graf Eksponensial yang dinotasikan dengan G^H adalah sebuah graf yang dibangun dari graf G dan H, dimana setiap sisi pada graf G diganti oleh graf H. Apabila $|V(G)| = p_1$ dan $|E(G)| = q_1$, sedangkan $|V(H)| = p_2$ dan $|E(H)| = q_2$ maka $|V(G^H)| = q_1(p_2 - 2) + p_1$ dan $|E(G^H)| = q_1q_2$.*

Definisi 2. *Cartesian Product dari graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ adalah graf $G(V, E)$ dinotasikan dengan $G = G_1 \Box G_2$, jika $V = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku: $u_1 = v_1$ dan $(u_2, v_2) \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1, v_1) \in E(G_1)$.*

Beberapa hasil penelitian sebelumnya mengenai *rainbow connection* antara lain Histamedika telah melakukan penelitian yang mengkaji tentang *rainbow connection* pada beberapa graf [6]. Fajariyanto telah melakukan penelitian *rainbow connection* pada graf-graf hasil operasi [4]. Pada penelitian ini, peneliti akan mengembangkan *rainbow connection* yang sebelumnya bersifat *rainbow connected* menjadi *rainbow 2-connected* pada graf eksponensial dan beberapa operasi graf.

Berikut ini teorema yang diperoleh dari penelitian sebelumnya dan digunakan untuk membuktikan teorema baru dalam penelitian ini.

Teorema 1. *Misalkan G adalah graf terhubung dengan $d(G) \geq 2$ sehingga $diam(G) \leq rc(G) \leq diam(G)+1$, dengan d adalah derajat. Misalkan G bersifat rainbow κ-connected dengan $\kappa \geq 1$ sehingga $rc_1(G) \leq rc_2 \leq ... \leq rc_\kappa(G)$, dimana κ adalah banyaknya rainbow path yang menghubungkan setiap dua titik berbeda di G* [7].

Hasil Penelitian

Dari hasil penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait *rainbow 2-connected* pada graf hasil operasi. Teorema yang pertama mengenai *rainbow 2-connected* dari graf ${C_4}^{K_n}$ yang disajikan dalam teorema berikut beserta pembuktiannya.

Teorema 1. *Misal G adalah graf eksponensial dari graf siklus dengan graf lengkap. Untuk $n \geq 4$, $rc({C_4}^{K_n}) = 3$ dan $rc_2({C_4}^{K_n}) = 4$.*

Bukti. Graf ${C_4}^{K_n}$ memiliki $V({C_4}^{K_n})$= $\{x_i; 1 \leq i \leq 4\} \cup \{{y_j}^i; 1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq n-2\}$, $E({C_4}^{K_n})$= $\{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq 3\} \cup \{x_1x_4\} \cup \{x_i{y_j}^i; 1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq n-2\} \cup \{x_{i+1}{y_j}^i; 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq n-2\} \cup \{x_1{y_j}^4; 1 \leq j \leq n-2\} \cup \{{y_j}^i{y_{j+1}}^i; 1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq n-3\}$. Sehingga kardinalitas titik $|V({C_4}^{K_n})| = 4n - 4$ dan kardinalitas sisi $|E({C_4}^{K_n})| = 2n(n-1)$, $diam({C_4}^{K_n}) = 3$. Berdasarkan Teorema 1, nilai rc berada pada selang $diam({C_4}^{K_n}) \leq rc({C_4}^{K_n}) \leq diam({C_4}^{K_n}) + 1$. Untuk $n \geq 4$ berlaku $3 \leq rc({C_4}^{Bt_n}) \leq 4$ atau $rc({C_4}^{Bt_n}) \geq 3$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $rc({C_4}^{K_n}) \leq 3$

dengan mendefinisikan pewarnaan sisi f sebagai berikut:

$$f(e) = \begin{cases} 1, \text{untuk } e = x_i {y_j}^i;\ 1 \le i \le 4;\ 1 \le j \le n \\ 2, \text{untuk } e = x_i x_{i+1}\ ,\ x_1 x_4;\ 1 \le i \le 3 \\ 2, \text{untuk } e = {y_j}^i {y_t}^i;\ 1 \le i \le 4;\ 1 \le j,t \le n-2;\ j \ne t \\ 3, \text{untuk } e = x_{i+1} {y_j}^i\ ,\ x_1 {y_j}^4;\ 1 \le i \le 3;\ 1 \le j \le n \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E({C_4}^{K_n}) \to \{1,2,3\}$. Karena $rc({C_4}^{K_n}) \le 3$ dan $rc({C_4}^{K_n}) \ge 3$, maka $rc({C_4}^{K_n}) = 3$. Selanjutnya akan dibuktikan *rainbow 2-connected* dari graf eksponensial ${C_4}^{K_n}$ dengan $n \ge 4$. Berdasarkan Teorema 1, nilai $rc_2({C_4}^{K_n}) \ge rc({C_4}^{K_n})$ yang berarti $rc_2({C_4}^{K_n}) \ge 3$. Namun demikian, $rc_2({C_4}^{K_n}) \ne 3$ karena apabila $rc_2({C_4}^{K_n}) = 3$ maka akan terdapat $u-v$ *path* yang hanya memiliki 1 lintasan dengan warna berbeda yaitu $x_i - y_j^k$, dengan $1 \le i,k \le 4 (i \ne k)$ dan $1 \le j \le n$ sehingga $rc_2({C_4}^{K_n}) \ge 4$. Akan dibuktikan bahwa $rc_2({C_4}^{K_n}) \le 4$ dengan mendefinisikan pewarnaan sisi f sebagai berikut:

$$f(e) = \begin{cases} 1, \text{untuk } e = x_i {y_j}^i;\ 1 \le i \le 4;\ 1 \le j \le n \\ 2, \text{untuk } e = x_{2i-1} x_{2i};\ 1 \le i \le 2 \\ 2, \text{untuk } e = {y_j}^i {y_t}^i;\ 1 \le i \le 4;\ 1 \le j,t \le n-2;\ j \ne t \\ 3, \text{untuk } e = x_{i+1} {y_j}^i\ ,\ x_1 {y_j}^4;\ 1 \le i \le 3;\ 1 \le j \le n \\ 4, \text{untuk } e = x_1 x_4,\ x_2 x_3 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E({C_4}^{K_n}) \to \{1,2,3,4\}$. Karena $rc_2({C_4}^{K_n}) \le 4$ dan $rc_2({C_4}^{K_n}) \ge 4$, maka diperoleh $rc_2({C_4}^{K_n}) = 4$. Selanjutnya untuk membuktikan bahwa $rc_2({C_4}^{K_n}) = 4$, dapat ditunjukkan melalui tiga kasus berikut.

Kasus 1. Misalkan $u = x_i$ dan $v = x_k$. Jika u *adjacent* dengan v, maka $k = i+1$ dan terdapat dua *rainbow path* yaitu $x_i x_k$ atau $x_4 x_1$ dan $x_i y_j^i x_k$ atau $x_4 y_j^4 x_1$ yang menghubungkan u dan v. Jika u tidak *adjacent* dengan v, maka $k = i+2$ dan terdapat dua *rainbow path* yaitu $x_i x_{i+1} x_k$ dan $x_i x_{i+1} y_j^{i+1} x_k$ yang menghubungkan u dan v.

Kasus 2. Misalkan $u = {y_j}^l$ dan $v = x_i$. Jika u *adjacent* dengan v, maka terdapat dua kasus yaitu $l = i$ dan $l = i-1$. Jika $l = i$, maka terdapat dua *rainbow path* yaitu $x_i y_j^l$ dan $x_i x_{i+1} y_j^l$ atau $x_4 x_1 y_j^4$ yang menghubungkan u dan v. Jika $l = i-1$, maka terdapat dua *rainbow path* yaitu $x_1 y_j^4$ atau $x_i y_j^l$ dan $x_1 x_4 y_j^4$ atau $x_i x_l y_j^l$ yang menghubungkan u dan v. Jika u tidak *adjacent* dengan v, maka terdapat dua kasus yaitu $l = i+1$ dan $l = i+2$. Jika $l = i+1$, maka terdapat dua *rainbow path* yaitu $x_i x_l y_j^l$ atau $x_4 x_1 y_j^1$ dan $x_i ... x_l x_{l+1} ... y_j^l$ atau $x_3 ... x_4 x_1 ... y_j^4$ atau $x_4 ... x_1 x_2 ... y_j^1$ yang menghubungkan u dan v. Jika $l = i+2$, maka terdapat dua *rainbow path* yaitu $x_i x_{i+1} ... x_l y_j^l$ atau $x_3 x_4 ... x_1 y_j^1$ atau $x_4 x_1 ... x_2 y_j^2$ dan $x_1 x_4 y_j^3$ atau $x_2 x_1 y_j^4$ atau $x_i x_{i-1} y_j^l$ yang menghubungkan u dan v.

Kasus 3. Misalkan $u = y_j^l$ dan $v = y_t^s$. Jika u *adjacent* dengan v, maka $l = s$ dan terdapat dua *rainbow path* yaitu $y_j^l y_t^s$ dan $y_j^l x_l x_{l+1} y_t^s$ atau $y_j^4 x_4 x_1 y_t^4$, dengan $j \ne t$ yang menghubungkan u dan v. Jika u tidak *adjacent* dengan v, maka $l \ne s$ dan terdapat dua *rainbow path* yaitu $y_j^l ... x_s y_t^s$ dan $y_j^l x_l ... x_{s+1} ... {y_t}^s$ atau $y_j^l x_l ... x_1 ... {y_t}^4$ yang menghubungkan u dan v.

Selanjutnya adalah teorema *rainbow 2-connected* dari graf $Wd_{(3,2)} \Box K_n$, berikut teorema beserta pembuktiannya.

Teorema 2. *Misal G adalah cartesian product dari graf kincir dengan graf lengkap. Untuk $n \geq 4$, $rc(Wd_{(3,2)} \Box K_n) = 3$ dan $rc_2(Wd_{(3,2)} \Box K_n) = 4$.*

Bukti. Graf $Wd_{(3,2)} \Box K_n$ memiliki $V(Wd_{(3,2)} \Box K_n)$= $\{x_i^j; 1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq 5\}$, $E(Wd_{(3,2)} \Box K_n)$= $\{x_i^j x_k^j; 1 \leq i,k \leq n;\ 1 \leq j \leq 5;\ i \neq k\} \cup \{x_i^j x_i^{j+1}; 1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq 4\} \cup \{x_i^{2j-1} x_i^{2j+1}; 1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq 2\}$. Sehingga kardinalitas titik $|V(Wd_{(3,2)} \Box K_n)| = 5n$ dan kardinalitas sisi $|E(Wd_{(3,2)} \Box K_n)| = 6n + 5(\frac{n(n-1)}{2})$, $diam(Wd_{(3,2)} \Box K_n) = 3$. Berdasarkan Teorema 1, nilai rc berada pada selang $diam(Wd_{(3,2)} \Box K_n) \leq rc(Wd_{(3,2)} \Box K_n) \leq diam(Wd_{(3,2)} \Box K_n) + 1$. Untuk $n \geq 4$ berlaku $3 \leq rc(Wd_{(3,2)} \Box K_n) \leq 4$ atau $rc(Wd_{(3,2)} \Box K_n) \geq 3$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $rc(Wd_{(3,2)} \Box K_n) \leq 3$ dengan mendefinisikan pewarnaan sisi f sebagai berikut:

$$f(e) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } e = x_i^{j+2} x_i^{j+3};\ 1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq 2 \\ 1, \text{ untuk } e = x_i^3 x_i^5;\ 1 \leq i \leq n \\ 2, \text{ untuk } e = x_i^j x_i^{j+1};\ 1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq 2 \\ 2, \text{ untuk } e = x_i^1 x_i^3;\ 1 \leq i \leq n \\ 3, \text{ untuk } e = x_i^j x_k^j;\ 1 \leq i,k \leq n;\ 1 \leq j \leq 5;\ i \neq k \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(Wd_{(3,2)} \Box K_n) \to \{1,2,3\}$. Karena $rc(Wd_{(3,2)} \Box K_n) \leq 3$ dan $rc(BWd_{(3,2)} \Box K_n)$ ≥ 3, maka $rc(Wd_{(3,2)} \Box K_n) = 3$. Selanjutnya akan dibuktikan *rainbow 2-connected* dari *cartesian product* $Wd_{(3,2)} \Box K_n$ dengan $n \geq 4$. Berdasarkan Teorema 1, nilai $rc_2(Wd_{(3,2)} \Box K_n) \geq rc(Wd_{(3,2)} \Box K_n)$ yang berarti $rc_2(Wd_{(3,2)} \Box K_n) \geq 3$. Namun demikian, $rc_2(Wd_{(3,2)} \Box K_n) \neq 3$ karena apabila $rc_2(Wd_{(3,2)} \Box K_n) = 3$ maka akan terdapat $u - v$ *path* yang hanya memiliki 1 lintasan dengan warna berbeda yaitu $x_i^j - x_{i+2}^j$ sehingga $rc_2(Wd_{(3,2)} \Box K_n) \leq 4$. Akan dibuktikan bahwa $rc_2(Wd_{(3,2)} \Box K_n) \leq 4$ dengan mendefinisikan pewarnaan sisi f sebagai berikut:

$$f(e) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } e = x_i^1 x_i^3;\ 1 \leq i \leq n \\ 1, \text{ untuk } e = x_i^{j+3} x_k^{j+3};\ 1 \leq i,k \leq n;\ 1 \leq j \leq 2;\ i \neq k \text{ dan } k \neq i+1 \\ 2, \text{ untuk } e = x_i^{2j-1} x_i^{2j};\ 1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq 2 \\ 3, \text{ untuk } e = x_i^j x_k^j;\ 1 \leq i,k \leq n;\ 1 \leq j \leq 3;\ i \neq k \text{ dan } k \neq i+1 \\ 3, \text{ untuk } e = x_i^3 x_i^4;\ 1 \leq i \leq n \\ 4, \text{ untuk } e = x_i^4 x_i^5;\ 1 \leq i \leq n \\ 4, \text{ untuk } e = x_i^j x_{i+1}^j;\ 1 \leq i \leq n-1;\ 1 \leq j \leq 5 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(Wd_{(3,2)} \Box K_n) \to \{1,2,3,4\}$. Karena $rc_2(Wd_{(3,2)} \Box K_n) \leq 4$ dan $rc_2(Wd_{(3,2)} \Box K_n) \geq 4$, maka diperoleh $rc_2(Wd_{(3,2)} \Box K_n) = 4$. Selanjutnya untuk membuktikan bahwa $rc_2(Wd_{(3,2)} \Box K_n) = 4$, dapat ditunjukkan melalui dua kasus berikut:

Kasus 1. Misalkan $u = x_i^j$ dan $v = x_k^j$ dengan $i < k$. Jika u *adjacent* dengan v, maka $k = i+1$ dan terdapat dua *rainbow path* yaitu $x_i^j x_k^j$ dan $x_i^j x_{i+2}^j x_k^j$ atau $x_i^j x_{i-1}^j x_k^j$ yang menghubungkan u dan v. Jika u tidak *adjacent* dengan v, terdapat dua *rainbow path* yaitu $x_i^j x_k^j$ dan $x_i^j x_{k+1}^j x_k^j$ atau $x_i^j x_{i-1}^j x_k^j$ yang menghubungkan u dan v.

Kasus 2. Misalkan $u = x_i^j$ dan $v = x_k^l$ dengan $j < l$. Jika u *adjacent* dengan v, maka $k = i$ dan $l = j+1$ serta terdapat dua *rainbow path* yaitu $x_i^j x_k^l$ dan $x_i^j x_i^{j-1} ... x_k^l$ atau $x_i^j x_i^{j+2} ... x_k^l$

yang menghubungkan u dan v. Jika u tidak *adjacent* dengan v, terdapat dua kasus yaitu $i = k$ dan $i \neq k$. Jika $i = k$, terdapat dua *rainbow path* yaitu $x_i^j x_i^{j+1} ... x_k^l$ dan $x_i^j x_k^l$ atau $x_i^j x_i^{j+2} ... x_k^l$ yang menghubungkan u dan v. Jika $i \neq k$, terdapat dua *rainbow path* yaitu $x_i^j x_k^j ... x_k^{j+1} ... x_k^l$ atau $x_i^j x_k^j ... x_k^l$ dan $x_i^j x_i^l ... x_k^l$ atau $x_i^j x_i^{j+1} ... x_i^l x_k^l$ yang menghubungkan u dan v.

Masalah terbuka 1 Tentukan rainbow 2-connected pada graf ${C_m}^{K_n}$ dan $Wd_{(3,m)} \square K_n$.

Referensi

[1] Alfarisi, R. dan Dafik. 2014. The rainbow connection number of special graph. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ*, **1**(1):457-461.

[2] Chartrand, G., G.L. Jhons, K.A. McKeon, dan P. Zhang. 2008. Rainbow connection in graphs, *Math. Bohem.*, **133**(2):85-98.

[3] Darmawan, R. N. dan Dafik. 2014. Rainbow connection number of prism and product of two graphs. *Seminar Nasional Pendidikan Matematika SENDIKMAD UAD*, **1**(1):449-456.

[4] Fajariyanto, A. 2015. *Penerapan rainbow connection pada graf-graf hasil operasi*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

[5] Harary, F. 2007. Graph theory. New London: Wesley.

[6] Histamedika, G. 2012. *Rainbow connection pada beberapa graf.* Matematika UNAD, 2:17-25.

[7] Li, X. dan Sun, Y. 2012. Rainbow connection of graphs. Tiajin: Springer Science.

[8] Munir, R. 2009. *Matematika diskrit edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.

[9] Purwanto, H., Indriani, G., dan Dayanti, E. 2006. *Matematika diskrit*. Jakarta: PT. Ercontara Rajawali.

[10] Slamin. 2009. *Desain jaringan: pendekatan teori graf.* Jember: Universitas Jember.

[11] Susanti, B.H., Salman, A.N.M., dan Simanjuntak, R. 2015. Upper bounds for rainbow 2-connectivity of the cartesian product of a path and a cycle. *International Conference on Graph Theory and Information Security*, 74:151-154.

[12] Yulianti, A. dan Dafik. 2014. Rainbow connection number pada operasi graf. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ*, **1**(1):521-525.