CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 3, No 1, 2022
DOI:
10.25037/cgantjma.v3i1.72

Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Refleksif pada Keluarga Graf Tangga

R. A. Akbar[1], **Dafik**[1,2,3], **dan R. M. Prihandini**[1,2]

[1]Pendidikan Matematika, Universitas Jember, Indonesia
[2]CGANT, Universitas Jember
[3]CEREBEL, Universitas Jember

E-mail: auliaakbarrizki123@gmail.com

Abstract. Let a simple and connected graph $G = (V, E)$ with the vertex set $V(G)$ and the edge set E(G). If there is a mapping $f\colon V(G) \to 0, 2, \ldots, 2k_v$ and $f\colon E(G) \to 1, 2, \ldots, k_e$ as a function of vertex and edge irregularities labeling with $k = max\ 2k_v, k_e$ for k_v and k_e natural numbers and the associated weight of vertex $u, v \in V(G)$ under f is $w(u) = f(u) + \sum_{u,v \in E(G)} f(uv)$. Then the function f is called a local vertex irregular reflexive labeling if every adjacent vertices has distinct vertex weight. When each vertex of graph G is colored with a vertex weight $w(u, v)$, then graph G is said to have a local vertex irregular reflexive coloring. Minimum number of vertex weight is needed to color the vertices in graf G such that any adjacent vertices are not have the same color is called a local vertex irregular reflexive chromatic number, denoted by $\chi_{(lrvs)}(G)$. The minimum k required such that $\chi_{(lrvs)}(G) = \chi(G)$ where $\chi(G)$ is chromatic number of proper coloring on G is called local reflexive vertex color strength, denoted by $lrvcs(G)$. In this paper, we will examine the local reflexive vertex color strength of local vertex irregular reflexive coloring on the family of ladder graph.

Keywords: Local vertex irregular reflexive coloring, local reflexive vertex color strength, family of ladder graph.

1. Pendahuluan

Graf digunakan untuk merepresentasikan objek yang bersifat diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Secara visual, objek direpresentasikan sebagai titik sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan sisi. Teori graf mulai dikenal saat matematikawan berkebangsaan Swiss bernama Leonhard Euler berhasil menyelesaikan permasalahan jembatan Koningsberg pada tahun 1736 menggunakan teori graf [7]. Kesuksesan Euler dalam memecahkan permasalahan tersebut, mengundang banyak perhatian peneliti di seluruh dunia untuk mengembangkan teori graf sebagai alternaltif pemecahan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu topik yang berkembang dalam teori graf adalah pewarnaan graf.

Pewarnaan graf merupakan kasus khusus dari pelabelan graf. Kasus khusus yang dimaksud dari pelabelan adalah pemberian warna yang dilakukan dengan menerapkan prinsip dari pelabelah yaitu memberikan warna pada elemen yang ada pada graf dan harus memenuhi ketentuan bahwa warna dari setiap elemen yang bertetangga harus berbeda [3]. Pewarnaan graf dibagi menjadi 3 bagian yaitu pewarnaan titik, sisi dan wilayah. Tujuan dari pewarnaan graf tidak hanya sekedar mewarnai graf dengan warna yang berbeda untuk setiap titik, sisi maupun wilayah yang bertetangga, tetapi juga bertujuan untuk meminimumkan banyaknya warna yang digunakan pada saat mewarnai graf. Banyaknya minimum warna yang digunakan dalam pewarnaan graf disebut dengan bilangan kromatik dan dinotasikan dengan $\chi(G)$ [1]. Topik pewarnaan titik pada graf dapat dikembangkan menjadi sebuah topik baru yaitu pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif.

Pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif adalah pewarnaan yang diperoleh dengan cara melabeli titik dan sisi pada graf menggunakan pelabelan titik ketakteraturan lokal refleksif. Bobot titik yang dihasilkan dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif diperoleh dengan menjumlahkan titik dan sisi yang terkait dengan titik tersebut. Tujuan dari Pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif adalah menentukan nilai *local reflexive vertex color strength* yang mana merupakan label terkecil ($k - minimum$) yang digunakan untuk mendapatkan bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif $\chi_{(lrvs)}(G)$ yang sama dengan bilangan kromatik pewarnaan titik $\chi(G)$. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif memiliki keunikan dibandingkan dengan topik pewarnaan titik yang lain, misalkan saja pewarnaan titik ketakteraturan lokal [4] dan pewarnaan titik ketakteraturan lokal inklusif [5], dimana pada pewarnaan titik yang lain, untuk mendapatkan bilangan kromatiknya dilakukan hanya dengan melabeli titiknya saja sedangkan pada pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif untuk mendapatkan bilangan kromatiknya tidak hanya dilakukan dengan melabeli titiknya saja tetapi juga dengan melabeli sisi pada graf. Pada penelitian sebelumnya, Dafik dkk. (2021) mendefinisikan pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif sebagai berikut:

Definisi 1. [3]*Misalkan $\chi(G)$ merupakan bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf G. Diketahui sebuah fungsi $f\colon V(G) \to 0, 2, \ldots, 2k_v$ dan $f\colon E(G) \to 1, 2, \ldots, k_e$ dimana $k = max$ $2k_v, k_e$ untuk k_v dan k_e bilangan asli. Bobot titik yang bersesuaiaan $u, v \in V(G)$ dalam f adalah $w(u) = f(u) + \sum_{u,v \in E(G)} f(uv)$. Fungsi f dikatakan sebuah pelabelan titik ketakteraturan lokal refleksif jika setiap dua titik yang bertetangga memiliki bobot yang berbeda. Jika setiap titik dari G diwarnai dengan bobot titik $w(u, v)$, maka G dikatakan memiliki pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif. Banyaknya bobot minimal yang dibutuhkan untuk mewarnai semua titiknya sehingga setiap titik yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama disebut bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif, disimbolkan dengan $\chi_{(lrvs)}(G)$. Selanjutnya minimum k yang dibutuhkan sehingga $\chi_{(lrvs)}(G) = \chi(G)$ disebut dengan* local reflexive vertex color strength*, disimbolkan dengan $lrvcs(G)$.*

Untuk menduga nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif dari graf G digunakan lemma terkait pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif yaitu:

Lemma 1. [2] *Misalkan G merupakan graf terhubung dengan derajat minimum (δ), derajat maksimum (Δ) dan bilangan kromatik $\chi(G)$. Local reflexive vertex color strength dari graf G adalah*

$$\left\lceil \frac{\chi(G) + \delta - 1}{1 + \Delta} \right\rceil$$

Namun, apabila nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada lemma 1 tidak memenuhi untuk diterapkan pada saat melakukan pelabelan graf, maka label terbesar yang digunakan dapat ditambahkan dengan 1 (+1) hingga didapatkan nilai *local reflexive vertex color strength*nya yang sesuai dengan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif.

Penelitian yang dilakukan oleh Dafik, dkk. (2021) [2], menghasilkan nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada beberapa graf meliputi graf lingkaran (C_n), graf bintang (S_n), graf roda (W_n), graf persahabatan (Fr_n), dan graf tangga (L_n). Mengingat bahwa penelitian yang dilakukan terkait pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif masih tergolong penelitian baru dimana masih sedikit yang meneliti pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif, sehingga masih banyak jenis graf yang belum diteliti termasuk keluarga graf.

Keluarga graf adalah pengelompokan graf menjadi satu kelompok dimana graf yang dikelompokkan memiliki karakteristik atau ciri-ciri yang sama. Keluarga graf tangga merupakan salah satu contoh dari keluarga graf. Keluarga graf tangga memiliki unsur penyusun utama yaitu graf tangga (L_n) yang didefinisikan atas hasil kali kartesius antara graf lintasan (P_n) dan graf lengkap dengan dua titik (K_2) [6]. Pada penelitian ini akan dicari nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada keluarga graf tangga yang meliputi graf tangga segitiga (TL_n) untuk $n \geq 2$, graf tangga permata (DL_n) untuk $n \geq 2$, graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk $n \geq 2$, graf tangga melingkar (CL_n) untuk $n \geq 2$ dan graf tangga miring (SL_n) untuk $n \geq 3$.

2. Hasil dan Pembahasan

Pada artikel ini dihasilkan beberapa teorema pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada keluarga graf tangga. Teorema yang dihasilkan berupa teorema yang berkaitan dengan *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada keluarga graf tangga yang meliputi graf tangga segitiga (L_n), graf tangga permata (DL_n), graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n), graf tangga melingkar (CL_n) dan graf tangga miring (SL_n).

Theorem 1. *Diberikan TL_n adalah graf tangga segitiga. Untuk setiap bilangan positif $n \geq 2$, lrvcs $(TL_n) = 2$.*

Bukti. Graf TL_n merupakan graf terhubung dengan himpunan titik $V(TL_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$, dan himpunan sisi $E(TL_n) = \{x_i x_{i+1;}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Kardinalitas titik dari graf TL_n adalah $|V(TL_n)| = 2n$, sedangkan kardinalitas sisinya adalah $|E(TL_n)| = 4n-3$. Selanjutnya, derajat minimum dari graf TL_n adalah $\delta(TL_n) = 2$, derajat maksimum dari graf TL_n adalah $\Delta(TL_n) = 4$, dan bilangan kromatik pewarnaan titiknya adalah $\chi(TL_n) = 4$. Untuk membuktikan nilai $lrvcs(TL_n)$ harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah dan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga segitiga (TL_n). Pada lemma 1. didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga permata (TL_n) sebagai berikut

$$lrvcs(TL_n) \geq \left\lceil \frac{\chi(TL_n) + \delta - 1}{1 + \Delta} \right\rceil = \left\lceil \frac{4+2-1}{1+4} \right\rceil = 1$$

Berdasarkan lemma 1 didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga segitiga (TL_n) adalah 1. Hal tersebut menunjukkan bahwa 1 menjadi label terbesar. Karena 1 merupakan label terbesar yang digunakan, maka label titik dan label sisi masing-masing adalah 0 dan 1. Dengan demikian kondisi tersebut mengakibatkan terdapat bobot titik yang sama pada beberapa titik yang bertetangga, hal ini bertentangan dengan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif bahwa setiap dua titik yang bertetangga harus memiliki bobot titik yang berbeda. Oleh karena itu $1 \neq lrvcs(TL_n)$, sehingga $lrvcs(TL_n) > 1$, Oleh karena itu label terbesar ditambahkan 1, maka label terbesar yang digunakan yaitu $1+1 = 2$ sehingga didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga segitiga (TL_n) adalah 2, jadi nilai lrvcs$(TL_n) \geq 2$ untuk n ganjil.

Selanjutnya akan ditunjukkan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga segitiga (TL_n) berdasarkan fungsi label titik (f) dan sisi (g). Terdapat dua kasus dalam pembuktian batas atas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga segitiga (TL_n).

1. Batas atas untuk n ganjil

$$f(x_i) \quad = \quad \begin{cases} 0, \text{ untuk } 1 < i < n; \; i \text{ ganjil} \\ 2, \text{ untuk } i = 1, \; i \text{ genap dan } i = n \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i \text{ ganjil} > 1 \\ 2, \text{ untuk } i = 1 \text{ dan } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$g(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$g(x_i y_i) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i = 1,\ i \text{ ganjil} < n \text{ dan } i \text{ genap} \\ 2, \text{ untuk } i = n \end{cases}$$

$$g(x_i y_{i+1}) = 1$$

$$g(y_i y_{i+1}) = 1$$

Berdasarkan label titik dan sisi didapatkan batas atasnya adalah $\leq$ 2, sehingga nilai lrvcs$(TL_n) \leq 2$ untuk n ganjil. Selanjutnya diperoleh bobot titik dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga segitiga (TL_n) untuk n ganjil sebagai berikut

$$w(x_i) = \begin{cases} 5, \text{ untuk } i \text{ ganjil} < n \\ 6, \text{ untuk } i = n \\ 7, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 4, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 6, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

2. Batas atas untuk n genap

$$f(x_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i \text{ ganjil} > 1 \\ 2, \text{ untuk } i = 1,\ i \text{ genap dan } i = n \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i \text{ ganjil} > 1 \\ 2, \text{ untuk } i = 1,\ i \text{ genap dan } i = n \end{cases}$$

$$g(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$g(x_i y_i) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$g(x_i y_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ genap} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$g(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ genap} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Berdasarkan label titik dan sisi didapatkan batas atasnya adalah $\leq$ 2, sehingga nilai lrvcs$(TL_n) \leq 2$ untuk n genap. Selanjutnya diperoleh bobot titik dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga segitiga (TL_n) untuk n genap sebagai berikut

$$w(x_i) = \begin{cases} 5, \text{ untuk } i = n \\ 6, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 8, \text{ untuk } i \text{ genap} < n \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 5, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 8, \text{ untuk } i = n \\ 9, \text{ untuk } i \text{ genap} < n \end{cases}$$

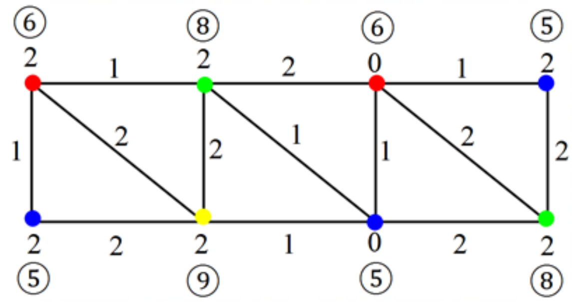

Figure 1. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga segitiga (TL_n) untuk $n = 4$

Berdasarkan bobot titik yang diperoleh maka didapatkan bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif sama dengan bilangan kromatik pewarnaan titiknya yaitu $\chi_{lrvs}(TL_n) = \chi(TL_n) = 4$. Karena $lrvcs(TL_n) \geq 2$ dan $lrvcs(TL_n) \leq 2$, Jadi dapat disimpulkan nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga segitiga (TL_n) untuk n genap adalah $lrvcs(TL_n) = 2$.

Theorem 2. *Diberikan DL_n adalah graf tangga permata. Untuk setiap bilangan positif $n \geq 2$, lrvcs $(DL_n) = 2$.*

Bukti. Graf DL_n merupakan graf terhubung dengan himpunan titik $V(DL_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq 2n\}$, dan himpunan sisi $E(DL_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Kardinalitas titik dari graf DL_n adalah $|V(DL_n)| = 4n$, sedangkan kardinalitas sisinya adalah $|E(DL_n)| = 8n-3$. Selanjutnya, derajat minimum dari graf DL_n adalah $\delta(DL_n) = 2$, derajat maksimum dari graf DL_n adalah $\Delta(DL_n) = 4$, dan bilangan kromatik pewarnaan titiknya adalah $\chi(DL_n) = 4$. Untuk membuktikan nilai $lrvcs(DL_n)$ harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah dan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga permata (DL_n). Pada lemma 1. didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga permata (DL_n) sebagai berikut

$$lrvcs(DL_n) \geq \left\lceil \frac{\chi(DL_n) + \delta - 1}{1 + \Delta} \right\rceil = \left\lceil \frac{4 + 2 - 1}{1 + 4} \right\rceil = 1$$

Berdasarkan lemma 1 didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga permata (DL_n) adalah 1. Hal tersebut menunjukkan bahwa 1 menjadi label terbesar. Karena 1 merupakan label terbesar yang digunakan, maka label titik dan label sisi masing-masing adalah 0 dan 1. Dengan demikian kondisi tersebut mengakibatkan terdapat bobot titik yang sama pada beberapa titik yang bertetangga, hal ini bertentangan dengan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif bahwa setiap dua titik yang bertetangga harus memiliki bobot titik yang berbeda. Oleh karena itu $1 \neq lrvcs(DL_n)$, sehingga $lrvcs(DL_n) > 1$, Oleh karena itu label terbesar ditambahkan 1, maka label terbesar yang digunakan yaitu $1+1 = 2$ sehingga didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga permata (DL_n) adalah 2, jadi nilai lrvcs$(DL_n) \geq 2$ untuk n genap.

Selanjutnya akan ditunjukkan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga permata (DL_n) berdasarkan fungsi label titik (f) dan sisi (g) sebagai berikut

$$f(x_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i \text{ genap} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(z_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$g(x_i x_{i+1}) = 1$$

$$g(x_i y_i) = 1$$

$$g(x_i z_i) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ genapdan } i \text{ ganjil} > 1 \\ 2, \text{ untuk } i = 1 \end{cases}$$

$$g(x_i z_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ ganjil} < n \text{ dan } i \text{ genap} \\ 2, \text{ untuk } i = n \end{cases}$$

$$g(y_i z_i) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ genapdan } i \text{ ganjil} > 1 \\ 2, \text{ untuk } i = 1 \end{cases}$$

$$g(y_i z_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ ganjil} < n \text{ dan } i \text{ genap} \\ 2, \text{ untuk } i = n \end{cases}$$

Berdasarkan label titik dan sisi didapatkan batas atasnya adalah ≤ 2, sehingga nilai lrvcs$(DL_n) \leq 2$. Selanjutnya diperoleh bobot titik dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga permata (DL_n) sebagai berikut

$$w(x_i) = \begin{cases} 5, \text{ untuk } i \text{ genap} \\ 7, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 5, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 7, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(z_i) = \begin{cases} 4, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 6, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

Berdasarkan bobot titik yang diperoleh maka didapatkan bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif sama dengan bilangan kromatik pewarnaan titiknya yaitu $\chi_{lrvs}(DL_n) = \chi(DL_n) = 4$. Karena $lrvcs(DL_n) \geq 2$ dan $lrvcs(DL_n) \leq 2$, Jadi dapat disimpulkan nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga permata (DL_n) adalah $lrvcs(DL_n) = 2$.

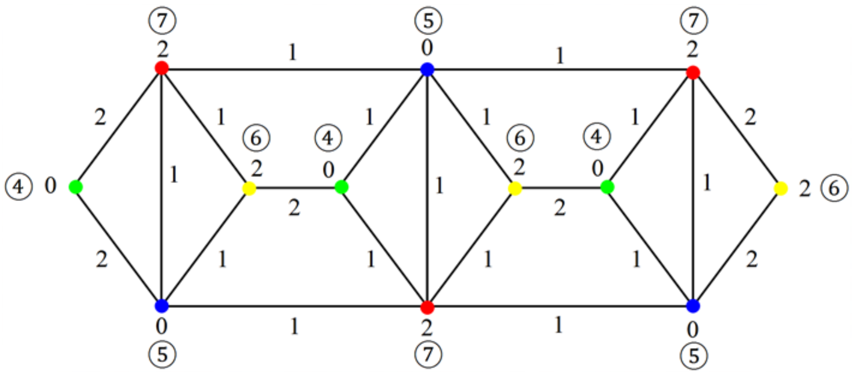

Figure 2. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga permata (DL_n) untuk $n = 3$

Theorem 3. *Diberikan M_n adalah graf tangga $\ddot{m}$obius. Untuk setiap bilangan positif $n \geq 2$, lrvcs $(M_n) = 2$.*

Bukti. Graf M_n merupakan graf terhubung dengan himpunan titik $V(M_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$, dan himpunan sisi $E(M_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_1 y_n; 1\} \cup \{x_n y_1; 1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Kardinalitas titik dari graf M_n adalah $|V(M_n)| = 2n$, sedangkan kardinalitas sisinya adalah $|E(M_n)| = 3n$. Selanjutnya, derajat minimum dari graf TL_n adalah $\delta(M_n) = 3$, derajat maksimum dari graf TL_n adalah $\Delta(M_n) = 3$, dan bilangan kromatik pewarnaan titiknya adalah $\chi_{M_n} = 2$ untuk n ganjil > 2, $\chi(M_n) = 3$ untuk n genap > 2 dan $\chi(M_n) = 4$ untuk $n = 2$. Terdapat tiga kasus dalam pembuktian teorema ini.

Kasus 1. Untuk $n = 2$, $\chi(M_n) = 4$

Untuk membuktikan nilai $lrvcs(M_n)$ untuk $n = 2$, harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah dan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk $n = 2$. Pada lemma 1. didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk $n = 2$ sebagai berikut

$$lrvcs(M_n) \geq \left\lceil \frac{\chi(M_n) + \delta - 1}{1 + \Delta} \right\rceil = \left\lceil \frac{4 + 3 - 1}{1 + 3} \right\rceil = 2$$

Selanjutnya akan ditunjukkan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk $n = 2$ berdasarkan fungsi label titik (f) dan sisi (g) sebagai berikut

$$f(x_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i = 2 \\ 2, \text{ untuk } i = 1 \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i = 2 \\ 2, \text{ untuk } i = 1 \end{cases}$$

$$g(x_1 x_2) = 2$$

$$g(x_i y_i) = 1$$

$$g(x_1 y_2) = 1$$

$$g(x_2 y_1) = 1$$

$$g(y_1 y_2) = 1$$

Berdasarkan label titik dan sisi didapatkan batas atasnya adalah ≤ 2, sehingga nilai lrvcs$(M_n) \leq 2$ untuk $n = 2$. Selanjutnya diperoleh bobot titik dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk $n = 2$ sebagai berikut

$$w(x_i) = \begin{cases} 4, \text{ untuk } i = 2 \\ 6, \text{ untuk } i = 1 \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 3, \text{ untuk } i = 1 \\ 5, \text{ untuk } i = 2 \end{cases}$$

Berdasarkan bobot titik yang diperoleh maka didapatkan bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif sama dengan bilangan kromatik pewarnaan titiknya yaitu $\chi_{lrvs}(M_n) = \chi(M_n) = 4$. Karena $lrvcs(M_n) \geq 2$ dan $lrvcs(M_n) \leq 2$, Jadi dapat disimpulkan nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk $n = 2$ adalah $lrvcs(M_n) = 2$.

Kasus 2. Untuk n ganjil > 2, $\chi(M_n) = 2$

Untuk membuktikan nilai $lrvcs(M_n)$ untuk n ganjil > 2, harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah dan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk n ganjil > 2. Pada lemma 1. didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk n ganjil > 2 sebagai berikut

$$lrvcs(M_n) \geq \left\lceil \frac{\chi(M_n) + \delta - 1}{1 + \Delta} \right\rceil = \left\lceil \frac{2 + 3 - 1}{1 + 3} \right\rceil = 1$$

Berdasarkan lemma 1 didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk n ganjil > 2 adalah 1. Hal tersebut menunjukkan bahwa 1 menjadi label terbesar. Karena 1 merupakan label terbesar yang digunakan, maka label titik dan label sisi masing-masing adalah 0 dan 1. Dengan demikian kondisi tersebut mengakibatkan terdapat bobot titik yang sama pada beberapa titik yang bertetangga, hal ini bertentangan dengan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif bahwa setiap dua titik yang bertetangga harus memiliki bobot titik yang berbeda. Oleh karena itu $1 \neq lrvcs(M_n)$ untuk n ganjil > 2, sehingga $lrvcs(TL_n) > 1$ untuk n ganjil > 2, Oleh karena itu label terbesar ditambahkan 1, maka label terbesar yang digunakan yaitu $1 + 1 = 2$ sehingga didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk n ganjil > 2 adalah 2, jadi nilai lrvcs$(M_n) \geq 2$ untuk n ganjil > 2.

Selanjutnya akan ditunjukkan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk n ganjil > 2 berdasarkan fungsi label titik (f) dan sisi (g) sebagai berikut

$$f(x_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i \text{ genap} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$g(x_i x_{i+1}) = 1$$

$$g(x_i y_i) = 1$$

$$g(x_1 y_n) = 1$$

$$g(x_n y_1) = 1$$

$$g(y_i y_{i+1}) = 1$$

Berdasarkan label titik dan sisi didapatkan batas atasnya adalah ≤ 2, sehingga nilai lrvcs$(M_n) \leq 2$ untuk n ganjil > 2. Selanjutnya diperoleh bobot titik dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk n ganjil > 2 sebagai berikut

$$w(x_i) = \begin{cases} 3, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 5, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 3, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 5, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

Berdasarkan bobot titik yang diperoleh maka didapatkan bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif sama dengan bilangan kromatik pewarnaan titiknya yaitu $\chi_{lrvs}(M_n) = \chi(M_n) = 2$. Karena $lrvcs(M_n) \geq 2$ dan $lrvcs(M_n) \leq 2$, Jadi dapat disimpulkan nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk n ganjil > 2 adalah $lrvcs(M_n) = 2$.

Kasus 3. Untuk n genap > 2, $\chi(M_n) = 3$

Untuk membuktikan nilai $lrvcs(M_n)$ untuk n genap > 2, harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah dan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk n genap > 2. Pada lemma 1. didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk n ganjil > 2 sebagai berikut

$$lrvcs(M_n) \geq \left\lceil \frac{\chi(M_n) + \delta - 1}{1 + \Delta} \right\rceil = \left\lceil \frac{3 + 3 - 1}{1 + 3} \right\rceil = 2$$

Selanjutnya akan ditunjukkan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk n genap > 2 berdasarkan fungsi label titik (f) dan sisi (g) sebagai berikut

$$f(x_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 2, \text{ untuk } i = 1 \text{ dan } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i = 1 \text{ dan } i \text{ genap} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$g(x_i x_{i+1}) = 1$$

$$g(x_i yi) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ ganjil} > 1 \text{ dan} i \text{ genap} \\ 2, \text{ untuk } i = 1 \end{cases}$$

$$g(x_1 y_n) = 1$$

$$g(x_n y_1) = 2$$

$$g(y_i y_{i+1}) = 1$$

Berdasarkan label titik dan sisi didapatkan batas atasnya adalah ≤ 2, sehingga nilai lrvcs$(M_n) \leq 2$ untuk n genap > 2. Selanjutnya diperoleh bobot titik dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk n genap > 2 sebagai berikut

$$w(x_i) = \begin{cases} 3, \text{ untuk } i \text{ ganjil} > 1 \\ 5, \text{ untuk } i \text{ genap} > 1 \\ 6, \text{ untuk } i = 1 \text{ dan } i = n \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 3, \text{ untuk } i \text{ genap} \\ 5, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Berdasarkan bobot titik yang diperoleh maka didapatkan bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif sama dengan bilangan kromatik pewarnaan titiknya yaitu $\chi_{lrvs}(M_n) = \chi(M_n) = 3$. Karena $lrvcs(M_n) \leq 2$ dan $lrvcs(M_n) \geq 2$, Jadi dapat disimpulkan nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk n genap > 2 adalah $lrvcs(M_n) = 2$.

Berdasarkan pembuktian pada kasus 1, 2 dan 3 terkait *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) dapat disimpulkan bahwa nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) adalah $(M_n) = 2$.

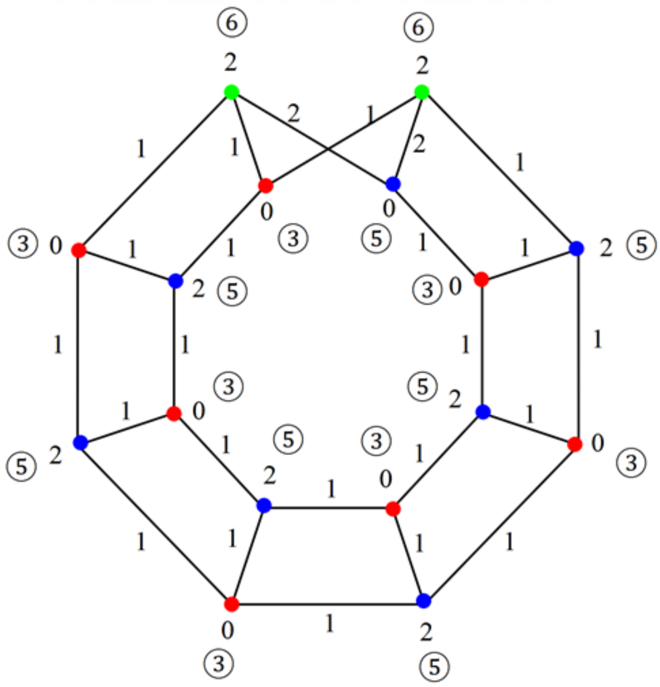

Figure 3. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk $n = 8$

Theorem 4. *Diberikan CL_n adalah graf tangga melingkar. Untuk setiap bilangan positif $n \geq 2$, $lrvcs\ (CL_n) = 2$.*

Bukti. Graf CL_n merupakan graf terhubung dengan himpunan titik $V(CL_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$, dan himpunan sisi $E(CL_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$. Kardinalitas titik dari graf CL_n adalah $|V(CL_n)| = 2n$, sedangkan kardinalitas sisinya adalah $|E(CL_n)| = 3n$. Selanjutnya, derajat minimum dari graf CL_n adalah $\delta(CL_n) = 3$, derajat maksimum dari graf CL_n adalah $\Delta(CL_n) = 3$, dan bilangan kromatik pewarnaan titiknya adalah $\chi_(CL_n) = 2$ untuk n genap dan $\chi_{CL_n} = 3$ untuk n ganjil. Terdapat dua kasus dalam pembuktian teorema ini.

Kasus 1. Untuk n ganjil, $\chi_{CL_n} = 3$

Untuk membuktikan nilai $lrvcs(CL_n)$ untuk n ganjil, harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah dan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga melingkar (CL_n) untuk n ganjil. Pada lema 2.4.1 didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga melingkar (CL_n) untuk n ganjil sebagai berikut

$$lrvcs(CL_n) \geq \left\lceil \frac{\chi(CL_n) + \delta - 1}{1 + \Delta} \right\rceil = \left\lceil \frac{3 + 3 - 1}{1 + 3} \right\rceil = 2$$

Selanjutnya akan ditunjukkan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga melingkar (CL_n) untuk n ganjil berdasarkan fungsi label titik (f) dan sisi (g) sebagai berikut

$$f(x_i) \;=\; \begin{cases} 0, \text{ untuk } i \text{ ganjil} < n \\ 2, \text{ untuk } i \text{ genap dan } i = n \end{cases}$$

$$f(y_i) \;=\; \begin{cases} 0, \text{ untuk } i \text{ genap} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$g(x_ix_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ genapdan } i = n \\ 2, \text{ untuk } i \text{ ganjil} < n \end{cases}$$

$$g(x_iy_i) = 1$$

$$g(x_iy_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

Berdasarkan label titik dan sisi didapatkan batas atasnya adalah $\leq$ 2, sehingga nilai lrvcs$(CL_n) \leq 2$ untuk n ganjil. Selanjutnya diperoleh bobot titik dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga melingkar (CL_n) untuk n ganjil sebagai berikut

$$w(x_i) = \begin{cases} 4, \text{ untuk } i \text{ ganjil} < n \\ 5, \text{ untuk } i = n \\ 6, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 4, \text{ untuk } i \text{ genap} \\ 5, \text{ untuk } i = 1 \\ 6, \text{ untuk } i \text{ ganjil} > 1 \end{cases}$$

Berdasarkan bobot titik yang diperoleh maka didapatkan bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif sama dengan bilangan kromatik pewarnaan titiknya yaitu $\chi_{lrvs}(CL_n) = \chi(CL_n) = 3$. Karena $lrvcs(CL_n) \geq 2$ dan $lrvcs(CL_n) \leq 2$, Jadi dapat disimpulkan nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga melingkar (CL_n) untuk n ganjil adalah $lrvcs(CL_n) = 2$.

Kasus 2. Untuk n genap, $\chi_{CL_n} = 2$

Untuk membuktikan nilai $lrvcs(CL_n)$ untuk n genap, harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah dan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga melingkar (CL_n) untuk n genap. Pada lema 2.4.1 didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga melingkar (CL_n) untuk n genap sebagai berikut

$$lrvcs(CL_n) \geq \left\lceil \frac{\chi(CL_n) + \delta - 1}{1 + \Delta} \right\rceil = \left\lceil \frac{2 + 3 - 1}{1 + 3} \right\rceil = 1$$

Berdasarkan lemma 1 didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga melingkar (CL_n) untuk n genap adalah 1. Hal tersebut menunjukkan bahwa 1 menjadi label terbesar. Karena 1 merupakan label terbesar yang digunakan, maka label titik dan label sisi masing-masing adalah 0 dan 1. Dengan demikian kondisi tersebut mengakibatkan terdapat bobot titik yang sama pada beberapa titik yang bertetangga, hal ini bertentangan dengan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif bahwa setiap dua titik yang bertetangga harus memiliki bobot titik yang berbeda. Oleh karena itu $1 \neq lrvcs(CL_n)$ untuk n genap, sehingga $lrvcs(CL_n) > 1$ untuk n genap, Oleh karena itu label terbesar ditambahkan 1, maka label terbesar yang digunakan yaitu $1+1 = 2$ sehingga didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga melingkar (CL_n) untuk n genap adalah 2, jadi nilai lrvcs$(CL_n) \geq 2$ untuk n genap.

Selanjutnya akan ditunjukkan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga melingkar (CL_n) untuk n genap berdasarkan fungsi label titik (f) dan sisi (g) sebagai berikut

$$f(x_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i \text{ genap} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$g(x_i x_{i+1}) = 1$$

$$g(x_i y_i) = 1$$

$$g(x_i y_{i+1}) = 1$$

Berdasarkan label titik dan sisi didapatkan batas atasnya adalah $\leq$ 2, sehingga nilai lrvcs$(CL_n) \leq 2$ untuk n genap. Selanjutnya diperoleh bobot titik dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga melingkar (CL_n) untuk n genap sebagai berikut

$$w(x_i) = \begin{cases} 3, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 5, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 3, \text{ untuk } i \text{ genap} \\ 5, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Berdasarkan bobot titik yang diperoleh maka didapatkan bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif sama dengan bilangan kromatik pewarnaan titiknya yaitu $\chi_{lrvs}(CL_n) = \chi(CL_n) = 2$. Karena $lrvcs(CL_n) \geq 2$ dan $lrvcs(CL_n) \leq 2$, Jadi dapat disimpulkan nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga melingkar (CL_n) untuk n genap adalah $lrvcs(CL_n) = 2$.

Berdasarkan pembuktian pada kasus 1 dan kasus 2 terkait *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga melingkar (CL_n) dapat disimpulkan bahwa nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga melingkar (CL_n) adalah $lrvcs(CL_n) = 2$.

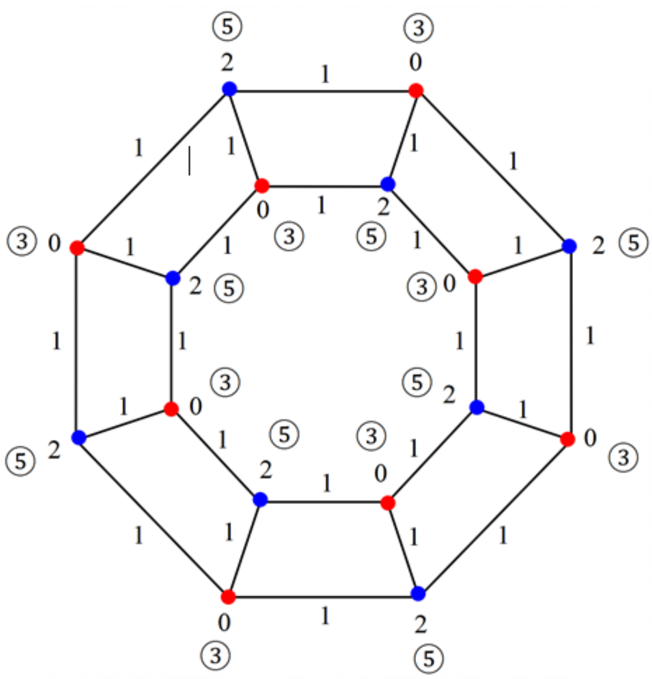

Figure 4. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga melingkar (CL_n) untuk $n = 8$

Theorem 5. *Diberikan SL_n adalah graf tangga miring. Untuk setiap bilangan positif $n \geq 3$,*

$$lrvcs(SL_n) = \begin{cases} 2, \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\ 4, \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

.

Bukti. Graf SL_n merupakan graf terhubung dengan himpunan titik $V(SL_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$, dan himpunan sisi $E(SL_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Kardinalitas titik dari graf SL_n adalah $|V(CL_n)| = 2n$, sedangkan kardinalitas sisinya adalah $|E(CL_n)| = 3n - 3$. Selanjutnya, derajat minimum dari graf SL_n adalah $\delta(SL_n) = 1$, derajat maksimum dari graf SL_n adalah $\Delta(SL_n) = 3$, dan bilangan kromatik pewarnaan titiknya adalah $\chi(SL_n) = 2$. Terdapat dua kasus dalam pembuktian teorema ini.

Kasus 1. Untuk n ganjil

Untuk membuktikan nilai $lrvcs(SL_n)$ untuk n ganjil, harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah dan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) untuk n ganjil. Pada lemma 1. didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) untuk n ganjil sebagai berikut

$$lrvcs(SL_n) \geq \left\lceil \frac{\chi(SL_n) + \delta - 1}{1 + \Delta} \right\rceil = \left\lceil \frac{2 + 1 - 1}{1 + 3} \right\rceil = 1$$

Berdasarkan lemma 1 didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) untuk n ganjil adalah 1. Hal tersebut menunjukkan bahwa 1 menjadi label terbesar. Karena 1 merupakan label terbesar yang digunakan, maka label titik dan label sisi masing-masing adalah 0 dan 1. Dengan demikian kondisi tersebut mengakibatkan terdapat bobot titik yang sama pada beberapa titik yang bertetangga, hal ini bertentangan dengan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif bahwa setiap dua titik yang bertetangga harus memiliki bobot titik yang berbeda. Oleh karena itu $1 \neq lrvcs(SL_n)$ untuk n ganjil, sehingga $lrvcs(SL_n) > 1$ untuk n genap, Oleh karena itu label terbesar ditambahkan 1, maka label terbesar yang digunakan yaitu $1+1 = 2$ sehingga didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) untuk n ganjil adalah 2, jadi nilai lrvcs$(SL_n) \geq 2$ untuk n ganjil.

Selanjutnya akan ditunjukkan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) untuk n ganjil berdasarkan fungsi label titik (f) dan sisi (g) sebagai berikut

$$f(x_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } 1 < i < n,\ i \text{ ganjil} \\ 2, \text{ untuk } i = 1,\ i \text{ genap dan } i = n \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } 1 < i < n,\ i \text{ ganjil} \\ 2, \text{ untuk } i = 1,\ i \text{ genap dan } i = n \end{cases}$$

$$g(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$g(x_i y_{i+1}) = 1$$

$$g(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ genap} \\ 2, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Berdasarkan label titik dan sisi didapatkan batas atasnya adalah ≤ 2, sehingga nilai lrvcs$(SL_n) \leq 2$ untuk n ganjil. Selanjutnya diperoleh bobot titik dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) untuk n ganjil sebagai berikut

$$w(x_i) = \begin{cases} 4, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 6, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 4, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 6, \text{ untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

Berdasarkan bobot titik yang diperoleh maka didapatkan bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif sama dengan bilangan kromatik pewarnaan titiknya yaitu $\chi_{lrvcs}(SL_n) = \chi(S_n) = 2$. Karena $lrvcs(SL_n) \geq 2$ dan $lrvcs(SL_n) \leq 2$, Jadi dapat disimpulkan nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) untuk n ganjil adalah $lrvcs(SL_n) = 2$.

Kasus 2. Untuk n genap

Untuk membuktikan nilai $lrvcs(SL_n)$ untuk n genap, harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah dan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) untuk n genap. Pada lema 2.4.1 didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) untuk n genap sebagai berikut

$$lrvcs(SL_n) \geq \left\lceil \frac{\chi(SL_n) + \delta - 1}{1 + \Delta} \right\rceil = \left\lceil \frac{2 + 1 - 1}{1 + 3} \right\rceil = 1$$

Berdasarkan lemma 1 didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) untuk n ganjil adalah 1. Hal tersebut menunjukkan bahwa 1 menjadi label terbesar. Karena 1 merupakan label terbesar yang digunakan, maka label titik dan label sisi masing-masing adalah 0 dan 1. Dengan demikian kondisi tersebut mengakibatkan terdapat bobot titik yang sama pada beberapa titik yang bertetangga, hal ini bertentangan dengan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif bahwa setiap dua titik yang bertetangga harus memiliki bobot titik yang berbeda. Oleh karena itu $1 \neq lrvcs(SL_n)$ untuk n ganjil, sehingga $lrvcs(SL_n) > 1$ untuk n genap, Oleh karena itu label terbesar ditambahkan 3 karena jika label terbesar 2 atau 3 akan mengakibatkan banyaknya variasi bobot titik yang yang mengakibatkan besarnya bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif, maka label terbesar yang digunakan yaitu $1 + 3 = 4$. sehingga didapatkan batas bawah pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) untuk n ganjil adalah 4, jadi nilai lrvcs$(SL_n) \geq 4$ untuk n genap.

Selanjutnya akan ditunjukkan batas atas pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) untuk n genap berdasarkan fungsi label titik (f) dan sisi (g) sebagai berikut

$$f(x_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } 1 < i < n \\ 2, \text{ untuk } i = 1 \text{ dan } i = n \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i \text{ genap} < n \\ 2, \text{ untuk } i \text{ ganjil} > 1 \text{ dan } i = n \\ 4, \text{ untuk } 1 = 1 \end{cases}$$

$$g(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ ganjil} < n \\ 2, \text{ untuk } i \text{ genap dan } i = n \end{cases}$$

$$g(x_i y_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i \text{ genap dan } i = n \\ 2, \text{ untuk } i = 1 \end{cases}$$

$$g(y_i y_{i+1}) = 1$$

Berdasarkan label titik dan sisi didapatkan batas atasnya adalah ≤ 2, sehingga nilai lrvcs$(SL_n) \leq 2$ untuk n genap. Selanjutnya diperoleh bobot titik dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) untuk n genap sebagai berikut

$$w(x_i) = \begin{cases} 4, \text{ untuk } i \text{ genap} \\ 5, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 4, \text{ untuk } i \text{ genap} \\ 5, \text{ untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Berdasarkan bobot titik yang diperoleh maka didapatkan bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif sama dengan bilangan kromatik pewarnaan titiknya yaitu $\chi_{lrvcs}(SL_n) = \chi(S_n) = 2$. Karena $lrvcs(SL_n) \geq 4$ dan $lrvcs(SL_n) \leq 4$, Jadi dapat disimpulkan nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) untuk n genap adalah $lrvcs(SL_n) = 4$.

Berdasarkan pembuktian pada kasus 1 dan kasus 2 terkait *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) dapat disimpulkan bahwa nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) adalah

$$lrvcs(SL_n) = \begin{cases} 2, \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\ 4, \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

.

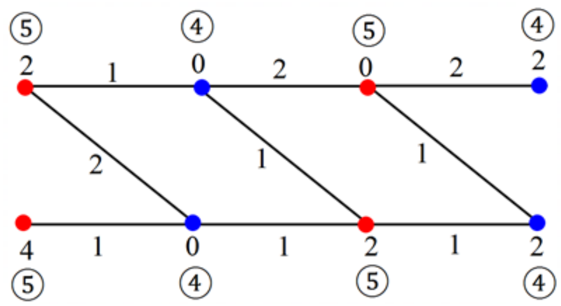

Figure 5. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_n) untuk $n = 4$

3. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah dijelaskan diatas, dapat disimpulkan bahwa pada penelitian ini diperoleh lima teorema baru terkait nilai *local reflexive vertex color strength* dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada keluarga graf tangga yang meliputi graf tangga segitiga (TL_n) untuk $n \geq 2$, graf tangga permata (DL_n) untuk $n \geq 2$, graf tangga $\ddot{m}$obius (M_n) untuk $n \geq 2$, graf tangga melingkar (CL_n) untuk $n \geq 2$ dan graf tangga miring (SL_n) untuk $n \geq 3$. Nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif yang diperoleh yaitu : lrvcs $(TL_n) = 2$, lrvcs $(DL_n) = 2$, lrvcs $(M_n) = 2$, lrvcs $(M_n) = 2$ dan lrvcs $(SL_n) = 2$ untuk n ganjil serta lrvcs $(SL_n) = 4$ untuk n genap.

4. Ucapan Terimakasih

Kami mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada CGANT dan CEREBEL Universitas Jember atas segala dukungan dan ilmu yang telah diberikan kepada kami.

Daftar Pustaka

[1] Balakrishnan, R. dan K. Ranganathan. 2012. *A Textbook of Graph Theory Second Edition.* New York: Springer Science+Business Media.

[2] Dafik, D. J. Koesoemawati, I. H. Agustin, E. I. Kurniawati, dan R. Nisviasri. 2021. On Local Vertex Irregular Reflexive Coloring Of Graphs. *Journal of Physics: Conference Series 2157 012018.* doi:10.1088/1742-6596/2157/1/012018.

[3] Kristiana, A. I.,Dafik, M. I. Utoyo, Slamin, R. Alfarisi, I. H. Agustin, dan M. Venkatachalam. 2019. Local Irregularity Vertex Coloring of Graphs. *International Journal of Civil Engineering and Technology.* 10(4): 451-461.

[4] Kristiana, A. I., M. I. Utoyo, Dafik, I.H. Agustin, R. Alfarisi, dan E. Waluyo. 2019. On the Chromatic Number Local Irregularity of Related Wheel Graph. *IOP Conf.Series.* 1211.0120003.

[5] Kristiana, A. I., Dafik, R. Alfarisi, U. A. Anwar, dan S. M. Citra. 2020. An Inclusive Local Irregularity Coloring of Graphs. *Advances in Mathematics : Scientific Journal.* 10: 8941-8946.

[6] Moussa, I.M. dan E.M. Badr. 2016. Ladder and Subdivision of Ladder Graphs with Pendant Edges are Odd Gracefull. *International Journal on Application of Graph Theory in Wirelles Ad hoc Networks and Sensor Networks(GRAPH-HOC).* 8(1): 1-8.

[7] Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit.* 3. Bandung: Informatika Bandung.