

Pewarnaan Titik r -Dinamis pada Graf Hasil Operasi *Edge Corona*

Adelia Putri Liowardani^{1,2}, Dafik^{1,2}, Arif Fatahillah^{1,2}

¹Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Jember, Indonesia

²CGANT Research Group, Universitas Jember, Indonesia

Adeliapl45@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id

Abstract

This research is a development of research on r -dynamic vertex coloring on simple, connected, and undirected graphs. The r -dynamic vertex coloring on the graph G is the r point coloring of the r graph so that the vertices of degree two on the G graph have at least two different color neighbors. The r -dynamic vertex coloring is satisfied if it meets the conditions for $\forall v \in V(G)$, $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$. The chromatic number for the r -dynamic vertex coloring of the graph G is denoted as $\chi_r(G)$. In this study, we discuss the r -dynamic vertex coloring on the graph resulting from the *edge corona* operation on a path graph with a complete graph, a star graph, and a sweep graph. It is denoted that the result of the operation of *edge corona* graph G and graph H is $G \diamond H$. In this study, the results of the r -dynamic vertex coloring are described in the operation graph $P_n \diamond K_m$, $P_n \diamond S_m$, $P_n \diamond P_m$, and $P_n \diamond B_{(m,k)}$

Keywords : r -dynamic vertex coloring, *edge corona* operation, special graph.

Mathematics Subject Classification: 05C15

Pendahuluan

Pewarnaan k -warna dinamis pada graf G merupakan pewarnaan titik pada graf G sebanyak k warna sedemikian hingga setiap titik berderajat minimum dua pada graf G setidaknya memiliki dua warna berbeda dengan titik-titik ketetanggaannya. Nilai k terkecil dimana graf G memiliki pewarnaan k -warna dinamis disebut sebagai bilangan kromatik dinamis, disimbolkan dengan $\chi_d(G)$. Pewarnaan titik r -dinamis berbeda dengan pewarnaan titik pada umumnya. Pewarnaan titik r -dinamis digunakan untuk mewarnai titik pada graf dengan beberapa warna berbeda sehingga pewarnaan r -dinamis tidak hanya memberi satu warna berbeda pada titik yang bertetangga.

Pewarnaan titik r -dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari $V(G)$ ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:

- jika $uv \in E(G)$ maka $c(u) \neq c(v)$, dan
- $\forall v \in V(G)$, $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$ [6].

Penelitian mengenai bilangan kromatik pada pewarnaan titik r -dinamis telah dilakukan penelitian oleh beberapa peneliti [1] [2] [3] [4] [5].

Observasi berikut digunakan dalam pembuktian teorema dalam penelitian ini. Selalu $\chi(G) = \chi_1(G) \leq \chi_2(G) \leq \dots \leq \chi_\Delta(G)$. Jika $r \geq \Delta(G)$, maka $\chi_r(G) = \chi_\Delta(G)$.

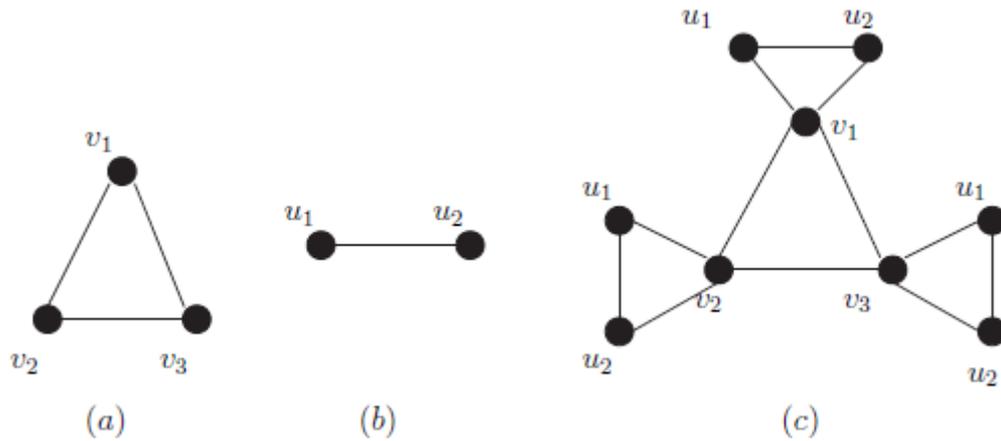


Figure 1: (a)graf K_3 (b)graf P_2 (c) $K_3 \odot P_2$

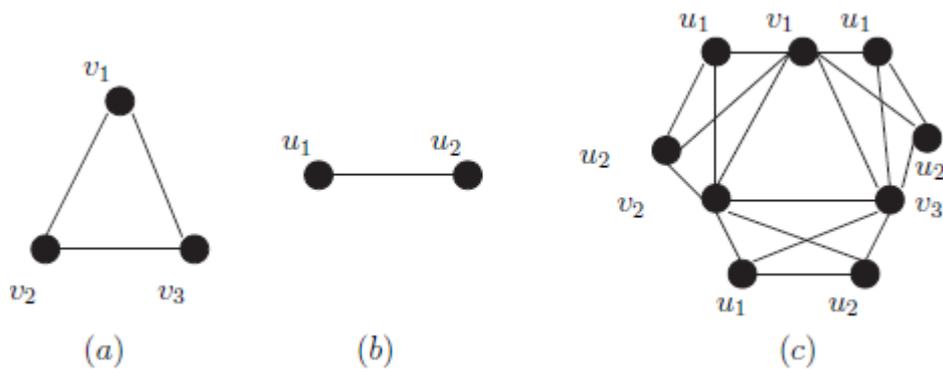


Figure 2: (a)graf K_3 (b)graf P_2 (c) $K_3 \diamond P_2$

Misalkan $\Delta(G)$ adalah derajat terbesar pada graf G . Memenuhi $\chi_r(G) \geq \min\{\Delta(G), r\} + 1$ [7].

Korona dari graf G_1 dan G_2 , diperoleh dengan cara mengambil sebuah duplikat dari G_1 dan sebanyak $|V(G_1)|$ duplikat dari G_2 , kemudian menghubungkan setiap titik pada duplikat ke- i dari G_2 menuju titik ke- i graf G_1 , dimana $i=1,2,3,\dots,|V(G_1)|$ [8].

Edge Corona misalkan G_1 dan G_2 adalah dua graf dalam himpunan *disjoint* n_1 dan n_2 titik, m_1 dan m_2 sisi secara berurutan. *Edge Corona* $G_1 \diamond G_2$ dalam G_1 dan didefinisikan sebagai graf dengan mengambil salinan G_2 sebanyak m_1 salinan pada G_1 dan mengikuti dua titik terakhir pada titik ke- i sisi pada G_1 pada setiap titik ke- i salinan pada G_2 .

Catatan bahwa operasi edge corona $G_1 \diamond G_2$ dalam G_1 dan G_2 memiliki $n_1+m_1n_2$ titik dan $m_1+2m_1n_2+m_1m_2$ sisi [9].

Graf yang digunakan dalam penelitian ini meliputi graf Lintasan dengan graf Komplit, graf Lintasan, dan graf Sapu sehingga menghasilkan bilangan kromatik dari graf hasil operasi $P_n \diamond K_m, P_n \diamond S_m, P_n \diamond P_m, P_n \diamond B_{(m,k)}$.

Hasil Penelitian

Dari hasil penelitian didapatkan empat buah teorema mengenai bilangan kromatik pada pewarnaan titik r -dinamis pada graf hasil operasi *edge corona*.

Misalkan $P_n \diamond K_m$ merupakan graf hasil operasi *edge corona* antara P_n dan K_m untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 4$. Bilangan kromatik pewarnaan titik r -dinamis pada graf $P_n \diamond K_m$ adalah :

$$\chi(P_n \diamond K_m) = \begin{cases} m + 2; & \text{untuk } 1 \leq r \leq m + 1 \\ r + 1; & \text{untuk } m + 2 \leq r \leq 2m + 1 \\ 2m + 3; & \text{untuk } r \geq 2m + 2 \end{cases}$$

Bukti. Graf $P_n \diamond K_m$ adalah graf terhubung dengan memiliki himpunan titik $V(P_n \diamond K_m) = \{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j^i, 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \diamond K_m) = \{x_i x_{(i+1)}, 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_i y_j^i, 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{(i+1)} y_j^i, 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j^i y_{(j+1)}^i, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j^i y_1^i, j = m\} \cup \{y_j^i y_{(j+2)}^i, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j^i y_{(j+3)}^i, 1 \leq j \leq m\} \cup \dots \{y_1^i y_{(j+m-1)}^i, 1 \leq j \leq m\}$. Banyaknya titik dari graf $P_n \diamond K_m$ adalah $|V(P_n \diamond K_m)| = mn - m + n$ dan banyaknya sisi dari graf $P_n \diamond K_m$ adalah $|E(P_n \diamond K_m)| = (n - 1)(1 + (C_2^m) + 2m)$. Dengan demikian, $\Delta(P_n \diamond K_m) = 2m + 2$.

Berdasarkan Observasi 2., $\chi(P_n \diamond K_m) \geq \min\{r, \Delta(P_n \diamond K_m)\} + 1 = \min\{r, 2m + 2\} + 1$. Untuk menentukan batas bawah maka akan dijelaskan dalam beberapa kasus berikut :

Kasus 1. Untuk $1 \leq r \leq m + 1$ berdasarkan Observasi 2. batas bawahnya adalah $\chi_r(G) \geq \min\{r, \Delta(G)\} + 1 = \min\{r, 2m + 2\} + 1 = r + 1 = m + 1 + 1 = m + 2$. Selanjutnya akan ditentukan batas atas dengan $c_1 : V(P_n \diamond K_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ dimana $n \geq 3, m \geq 4$ adalah sebagai berikut:

$$c_1(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2; & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_1(y_j^i) = 2+j; \text{ untuk } 1 \leq j \leq m$$

Dengan mudah dipahami bahwa c_1 adalah pemetaan : $V(P_n \diamond K_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m + 2\}$. Didapat $m+2$ merupakan warna terbesar dalam pewarnaan titik $1 \leq r \leq m + 1$ -dinamis graf $(P_n \diamond K_m)$. Sehingga, untuk $1 \leq r \leq m + 1$ diperoleh $\chi_{(1 \leq r \leq m+1)}(P_n \diamond K_m) \leq m + 2$. Karena $\chi_{(1 \leq r \leq m+1)}(P_n \diamond K_m) \geq m + 2$ dan $\chi_{(1 \leq r \leq m+1)}(P_n \diamond K_m) \leq m + 2$, Jadi dapat disimpulkan bahwa $\chi_{(1 \leq r \leq m+1)}(P_n \diamond K_m) = m + 2$.

Sebagai contoh diberikan ilustrasi gambar untuk pewarnaan titik 5-dinamis untuk $(P_3 \diamond K_4)$ pada Gambar 3.

Kasus 2. Untuk $m + 2 \leq r \leq 2m + 1$ berdasarkan Observasi 2. batas bawahnya adalah $\chi_r(G) \geq \min\{r, \Delta(G)\} + 1 = \min\{r, 2m + 2\} + 1 = r + 1 = 2m + 1 + 1 = 2m + 2$. Selanjutnya akan ditentukan batas atas dengan $c_2 : V(P_n \diamond K_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ dimana $n \geq 3, m \geq 4$ adalah sebagai berikut:

$$c_2(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2; & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_2(y_j^i) = \begin{cases} 2 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil} \\ m + 2 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ genap} \end{cases}$$

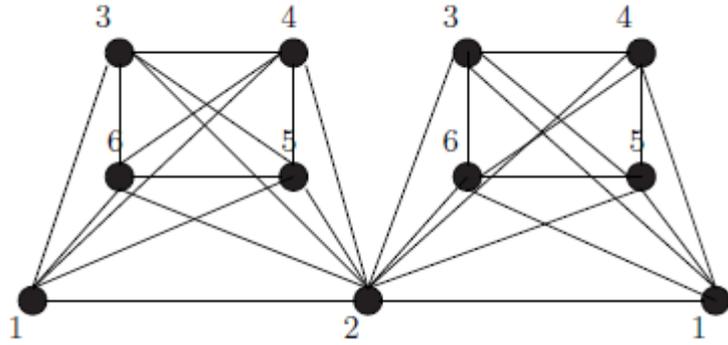


Figure 3: Ilustrasi Pewarnaan Titik 5-Dinamis untuk $(P_3 \diamond K_4)$

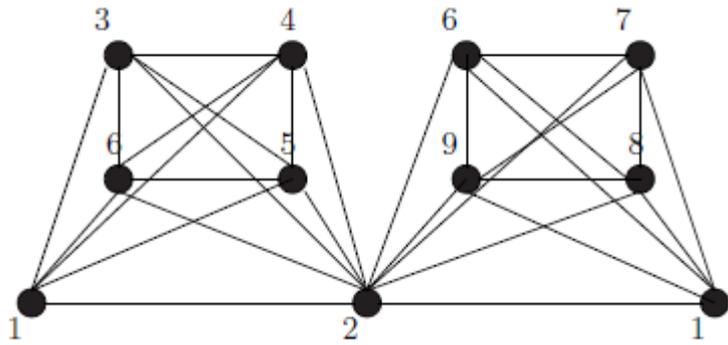


Figure 4: Ilustrasi Pewarnaan Titik 9-Dinamis untuk $(P_3 \diamond K_4)$

Dengan mudah dipahami bahwa c_2 adalah pemetaan : $V(P_n \diamond K_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2m+2\}$. Didapat $2m+2$ merupakan warna terbesar dalam pewarnaan titik $m+2 \leq r \leq 2m+1$ -dinamis graf $(P_n \diamond K_m)$. Sehingga, untuk $m+1 \leq r \leq 2m+1$ diperoleh $\chi_{(m+2 \leq r \leq 2m+1)}(P_n \diamond K_m) \leq 2m+2$. Karena $\chi_{(m+2 \leq r \leq 2m+1)}(P_n \diamond K_m) \geq 2m+2$ dan $\chi_{(m+2 \leq r \leq 2m+1)}(P_n \diamond K_m) \leq 2m+2$, Jadi dapat disimpulkan bahwa $\chi_{(m+2 \leq r \leq 2m+1)}(P_n \diamond K_m) = 2m+2$.

Sebagai contoh diberikan ilustrasi gambar untuk pewarnaan titik 9-dinamis untuk $(P_3 \diamond K_4)$ pada Gambar 4.

Kasus 3. Untuk $r \geq 2m+2$ berdasarkan Observasi 4.1.2. batas bawahnya adalah $\chi_r(G) \geq \min\{r, \Delta(G)\} + 1 = \min\{r, 2m+2\} + 1 = r+1 = 2m+2+1 = 2m+3$. Selanjutnya akan ditentukan batas atas dengan $c_3 : V(P_n \diamond K_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ dimana $n \geq 3, m \geq 4$ adalah sebagai berikut:

$$c_3(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3} \\ 2; & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3} \\ 3; & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$$c_3(y_j^i) = \begin{cases} 3+j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil} \\ m+3+j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ genap} \end{cases}$$

Dengan mudah dipahami bahwa c_3 adalah pemetaan : $V(P_n \diamond K_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2m+3\}$. Didapat $2m+3$ merupakan warna terbesar dalam pewarnaan titik $r \geq 2m+2$ -dinamis graf $(P_n \diamond K_m)$. Sehingga, untuk $r \geq 2m+2$ diperoleh $\chi_{(r \geq 2m+2)}(P_n \diamond K_m) \leq 2m+3$.

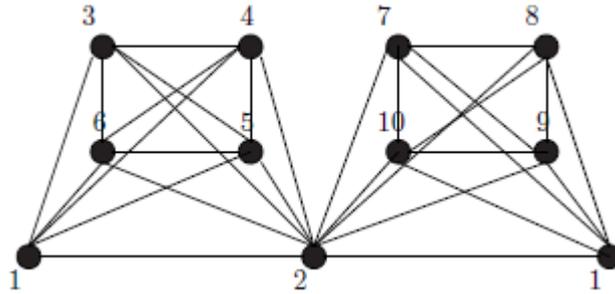


Figure 5: Ilustrasi Pewarnaan Titik 10-Dinamis untuk $(P_3 \diamond K_4)$

Karena $\chi_{(r \geq 2m+2)}(P_n \diamond K_m) \geq 2m + 3$ dan $\chi_{(r \leq 2m+2)}(P_n \diamond K_m) \leq 2m + 3$, Jadi dapat disimpulkan bahwa $\chi_{(r \geq 2m+2)}(P_n \diamond K_m) = 2m + 3$.

Sebagai contoh diberikan ilustrasi gambar untuk pewarnaan titik 10-dinamis untuk $(P_3 \diamond K_4)$ pada Gambar 5.

Misalkan $P_n \diamond P_m$ merupakan graf hasil operasi edge corona antara P_n dan S_m untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 1$. Bilangan kromatik pewarnaan titik r -dinamis pada graf $P_n \diamond S_m$ adalah :

$$\chi(P_n \diamond S_m) = \begin{cases} 4; & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ r + 1; & \text{untuk } 4 \leq r \leq 2m + 3 \\ 2m + 5; & \text{untuk } r \geq 2m + 4 \end{cases}$$

Bukti. Graf $P_n \diamond S_m$ adalah graf terhubung dengan memiliki himpunan titik $V(P_n \diamond S_m) = \{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i, 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{z_j^i, 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \diamond S_m) = \{x_i x_{(i+1)}, 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_i y_i, 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{(i+1)} y_i, 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_i z_j^i, 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{z_j^i x_i, 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{z_j^i x_{(i+1)}, 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\}$. Banyaknya titik dari graf $P_n \diamond S_m$ adalah $|V(P_n \diamond S_m)| = 2n - m + mn - 1$ dan banyaknya sisi dari graf $P_n \diamond S_m$ adalah $|E(P_n \diamond S_m)| = 3(mn + n - m - 1)$. Dengan demikian, $\Delta(P_n \diamond S_m) = 2m + 4$.

Berdasarkan Observasi 4.1.2., $\chi(P_n \diamond S_m) \geq \min\{r, \Delta(P_n \diamond S_m)\} + 1 = \min\{r, 2m + 4\} + 1$. Untuk menentukan batas bawah maka akan dijelaskan dalam beberapa kasus berikut:

Kasus 1. Untuk $1 \leq r \leq 3$, berdasarkan Observasi 2. batas bawahnya adalah $\chi_r \geq \min\{\Delta(G), r\} + 1 = \min\{2m + 4, r\} + 1 = r + 1 = 3 + 1 = 4$. Selanjutnya akan ditentukan batas atas dengan $c_1 : V(P_n \diamond S_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$, dimana $n \geq 3$ $m \geq 1$ adalah sebagai berikut :

$$c_1(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2; & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_1(y_i) = 3$$

$$c_1(z_j^i) = 4$$

Dengan mudah dipahami bahwa c_1 adalah pemetaan : $V(P_n \diamond S_m) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$. Didapat 4 merupakan warna terbesar dalam pewarnaan titik $1 \leq r \leq 3$ -dinamis graf $(P_n \diamond S_m)$. Sehingga, untuk $1 \leq r \leq 3$ diperoleh $\chi_{(1 \leq r \leq 3)}(P_n \diamond S_m) \leq 4$. Karena $\chi_{(1 \leq r \leq 3)}(P_n \diamond S_m) \geq 4$ dan $\chi_{(1 \leq r \leq 3)}(P_n \diamond S_m) \leq 4$, Jadi dapat disimpulkan bahwa $\chi_{(1 \leq r \leq 3)}(P_n \diamond S_m) = 4$.

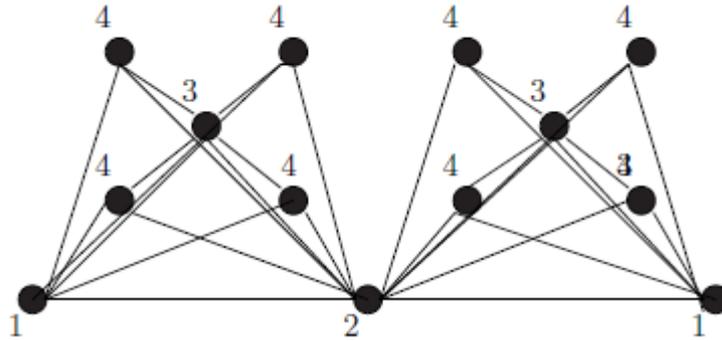


Figure 6: Ilustrasi Pewarnaan Titik 3-Dinamis untuk $(P_3 \diamond S_4)$

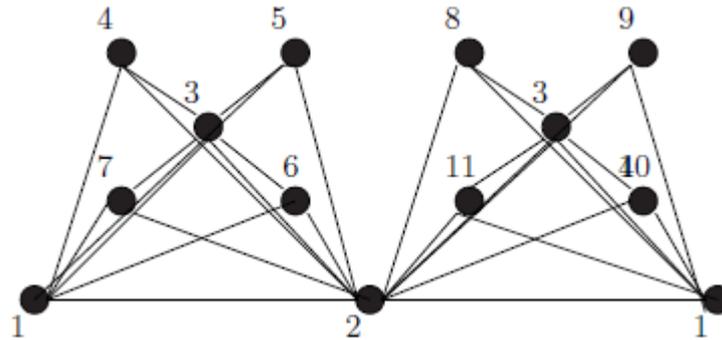


Figure 7: Ilustrasi Pewarnaan Titik 10-Dinamis untuk $(P_3 \diamond S_4)$

Sebagai contoh diberikan ilustrasi gambar untuk pewarnaan titik 3-dinamis untuk $(P_3 \diamond S_4)$ pada Gambar 6.

Kasus 2. Untuk $4 \leq r \leq 2m + 2$, berdasarkan Observasi 2. batas bawahnya adalah $\chi_r \geq \min\{\Delta(G), r\} + 1 = \min\{2m + 4, r\} + 1 = r + 1 = 2m + 2 + 1 = 2m + 3$. Selanjutnya akan ditentukan batas atas dengan $c_2 : V(P_n \diamond S_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$, dimana $n \geq 3, m \geq 1$ adalah sebagai berikut :

$$c_2(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2; & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_2(y_i) = 3$$

$$c_2(z_j^i) = \begin{cases} 3 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil} \\ m + 3 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ genap} \end{cases}$$

Dengan mudah dipahami bahwa c_2 adalah pemetaan : $V(P_n \diamond S_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2m + 3\}$. Didapat $2m + 3$ merupakan warna terbesar dalam pewarnaan titik $4 \leq r \leq 2m + 2$ -dinamis graf $(P_n \diamond S_m)$. Sehingga, untuk $4 \leq r \leq 2m + 2$ diperoleh $\chi_{(4 \leq r \leq 2m + 2)}(P_n \diamond S_m) \leq 2m + 3$. Karena $\chi_{(4 \leq r \leq 2m + 2)}(P_n \diamond S_m) \geq 2m + 3$ dan $\chi_{(4 \leq r \leq 2m + 2)}(P_n \diamond S_m) \leq 2m + 3$, Jadi dapat disimpulkan bahwa $\chi_{(4 \leq r \leq 2m + 2)}(P_n \diamond S_m) = 2m + 3$.

Sebagai contoh diberikan ilustrasi gambar untuk pewarnaan titik 10-dinamis untuk $(P_3 \diamond S_4)$ pada Gambar 7.

Kasus 3. Untuk $r = 2m + 3$, berdasarkan Observasi 2. batas bawahnya adalah $\chi_r \geq \min\{\Delta(G), r\} + 1 = \min\{2m + 4, r\} + 1 = r + 1 = 2m + 3 + 1 = 2m + 4$. Selanjutnya

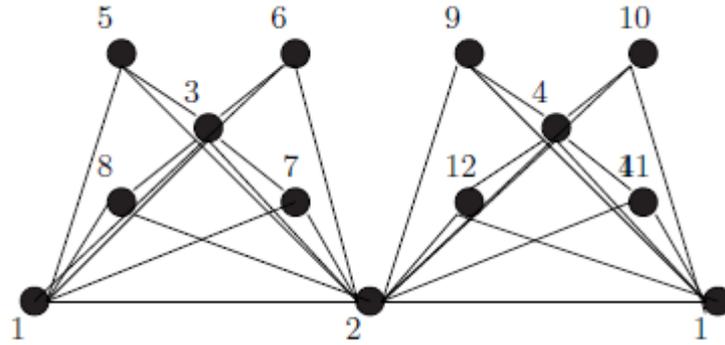


Figure 8: Ilustrasi Pewarnaan Titik 11-Dinamis untuk $(P_3 \diamond S_4)$

akan ditentukan batas atas dengan $c_2 : V(P_n \diamond S_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$, dimana $n \geq 3$ $m \geq 1$ adalah sebagai berikut :

$$c_3(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2; & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_3(y_i) = \begin{cases} 3; & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 4; & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_3(z_j^i) = \begin{cases} 4 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil} \\ m + 4 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ genap} \end{cases}$$

Dengan mudah dipahami bahwa c_3 adalah pemetaan : $V(P_n \diamond S_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2m + 4\}$. Didapat $2m+4$ merupakan warna terbesar dalam pewarnaan titik $r = 2m + 3$ -dinamis graf $(P_n \diamond S_m)$. Sehingga, untuk $r = 2m + 3$ diperoleh $\chi_{(r=2m+3)}(P_n \diamond S_m) \leq 2m + 4$. Karena $\chi_{(r=2m+3)}(P_n \diamond S_m) \geq 2m + 4$ dan $\chi_{(r=2m+3)}(P_n \diamond S_m) \leq 2m + 4$, Jadi dapat disimpulkan bahwa $\chi_{(r=2m+3)}(P_n \diamond S_m) = 2m + 4$.

Sebagai contoh diberikan ilustrasi gambar untuk pewarnaan titik 11-dinamis untuk $(P_3 \diamond S_4)$ pada Gambar 8.

Kasus 4. Untuk $r \geq 2m + 4$, berdasarkan Observasi 2. batas bawahnya adalah $\chi_r \geq \min\{\Delta(G), r\} + 1 = \min\{2m + 4, r\} + 1 = r + 1 = 2m + 4 + 1 = 2m + 5$. Selanjutnya akan ditentukan batas atas dengan $c_4 : V(P_n \diamond S_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$, dimana $n \geq 3$ $m \geq 1$ adalah sebagai berikut :

$$c_4(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3} \\ 2; & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3} \\ 3; & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$$c_4(y_i) = \begin{cases} 4; & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 5; & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_4(z_j^i) = \begin{cases} 5 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil} \\ m + 5 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ genap} \end{cases}$$

Dengan mudah dipahami bahwa c_4 adalah pemetaan : $V(P_n \diamond S_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2m + 5\}$. Didapat $2m+5$ merupakan warna terbesar dalam pewarnaan titik $r \geq 2m + 4$ -dinamis graf $(P_n \diamond S_m)$. Sehingga, untuk $r \geq 2m + 4$ diperoleh $\chi_{(r \geq 2m+4)}(P_n \diamond S_m) \leq 2m + 5$.

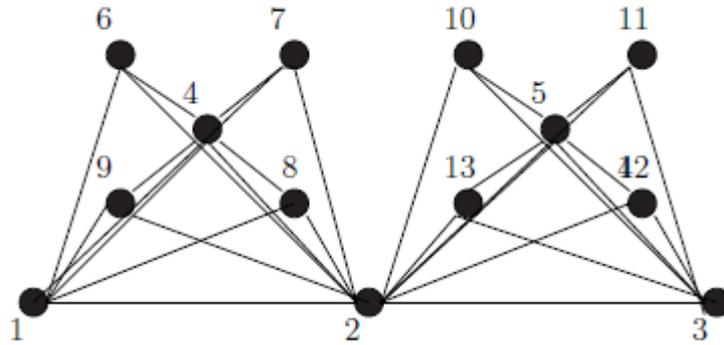


Figure 9: Ilustrasi Pewarnaan Titik 10-Dinamis untuk $(P_3 \diamond S_4)$

Karena $\chi_{(r \geq 2m+4)}(P_n \diamond S_m) \geq 2m + 5$ dan $\chi_{(r \geq 2m+4)}(P_n \diamond S_m) \leq 2m + 5$, Jadi dapat disimpulkan bahwa $\chi_{(r \geq 2m+4)}(P_n \diamond S_m) = 2m + 5$.

Sebagai contoh diberikan ilustrasi gambar untuk pewarnaan titik 12-dinamis untuk $(P_3 \diamond S_4)$ pada Gambar 9.

Misalkan $P_n \diamond P_m$ merupakan graf hasil operasi edge corona antara P_n dan P_m untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 1$. Bilangan kromatik pewarnaan titik r -dinamis pada graf $P_n \diamond P_m$ adalah :

$$\chi(P_n \diamond P_m) = \begin{cases} 4; & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ r + 1; & \text{untuk } 4 \leq r \leq 2m + 1 \\ 2m + 3; & \text{untuk } r \geq 2m + 2 \end{cases}$$

Bukti. Graf $P_n \diamond P_m$ adalah graf terhubung dengan memiliki himpunan titik $V(P_n \diamond P_m) = \{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j^i, 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \diamond P_m) = \{x_i x_{(i+1)}, 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_i y_j^i, 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{(i+1)} y_j^i, 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_j^i y_{j+1}^i, 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\}$. Banyaknya titik dari graf $P_n \diamond P_m$ adalah $|V(P_n \diamond P_m)| = n + m(n - 1)$ dan banyaknya sisi dari graf $P_n \diamond P_m$ adalah $|E(P_n \diamond P_m)| = 2mn + n - m - 2$. Dengan demikian, $\Delta(P_n \diamond P_m) = 2m + 2$.

Berdasarkan Observasi 2., $\chi(P_n \diamond P_m) \geq \min\{r, \Delta(P_n \diamond P_m)\} + 1 = \min\{r, 2m + 2\} + 1$. Untuk menentukan batas bawah maka akan dijelaskan dalam beberapa kasus berikut: **Kasus 1.** Untuk $1 \leq r \leq 3$, berdasarkan Observasi 2. $\chi_r \geq \min\{\Delta(G), r\} + 1 = \min\{2m + 4, r\} + 1 = r + 1 = 3 + 1 = 4$. Didefinisikan pewarnaan $c_1 : V(P_n \diamond P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$, dimana $n \geq 3$ $m \geq 1$ adalah sebagai berikut :

$$c_1(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2; & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_1(y_j^i) = \begin{cases} 3; & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ 4; & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

Dengan mudah dipahami bahwa c_1 adalah pemetaan : $V(P_n \diamond P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$. Didapat 4 merupakan warna terbesar sehingga, untuk $1 \leq r \leq 3$ diperoleh $\chi_{(1 \leq r \leq 3)}(P_n \diamond P_m) \leq 4$. Karena $\chi_{(1 \leq r \leq 4)}(P_n \diamond P_m) \geq 4$ dan $\chi_{(1 \leq r \leq 4)}(P_n \diamond P_m) \leq 4$, Jadi dapat disimpulkan bahwa $\chi_{(1 \leq r \leq 3)}(P_n \diamond P_m) = 4$.

Sebagai contoh diberikan ilustrasi gambar untuk pewarnaan titik 3-dinamis untuk $(P_3 \diamond P_4)$ pada Gambar 10.

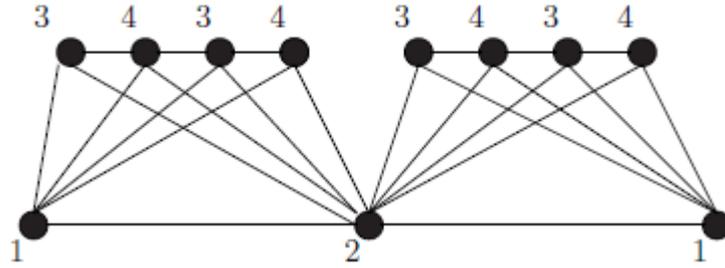


Figure 10: Ilustrasi Pewarnaan Titik 3-Dinamis untuk $(P_3 \diamond P_4)$

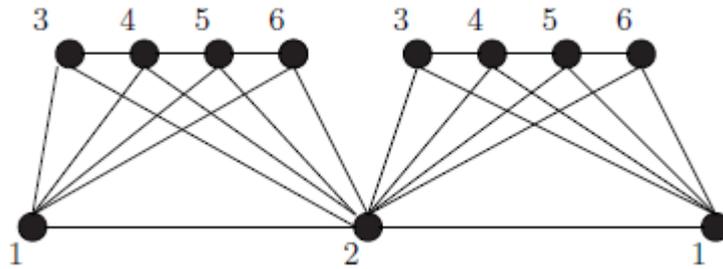


Figure 11: Ilustrasi Pewarnaan Titik 9-Dinamis untuk $(P_3 \diamond P_4)$

Kasus 2. Untuk $4 \leq r \leq 2m + 1$, berdasarkan Observasi 2. $\chi_r \geq \min\{\Delta(G), r\} + 1 = \min\{2m + 4, r\} + 1 = r + 1 = 2m + 1 + 1 = 2m + 2$. Didefinisikan pewarnaan $c_1 : V(P_n \diamond P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$, dimana $n \geq 3m \geq 1$ adalah sebagai berikut :

$$c_2(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2; & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_2(y_j^i) = \begin{cases} 2 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil} \\ m + 2 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ genap} \end{cases}$$

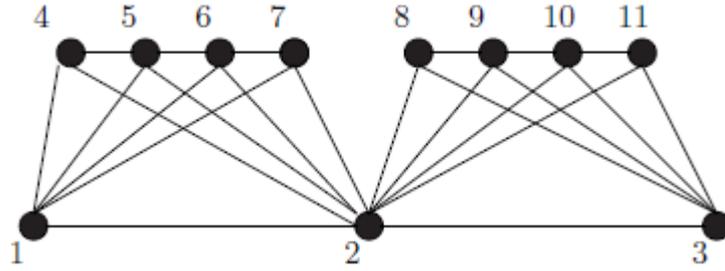
Dengan mudah dipahami bahwa c_2 adalah pemetaan : $V(P_n \diamond P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2m + 2\}$. Didapat $2m + 2$ merupakan warna terbesar sehingga, untuk $4 \leq r \leq 2m + 1$ diperoleh $\chi_{(4 \leq r \leq 2m + 1)}(P_n \diamond P_m) \leq 2m + 2$. Karena $\chi_{(4 \leq r \leq 2m + 1)}(P_n \diamond P_m) \geq 2m + 2$ dan $\chi_{(4 \leq r \leq 2m + 1)}(P_n \diamond P_m) \leq 2m + 2$, Jadi dapat disimpulkan bahwa $\chi_{(4 \leq r \leq 2m + 1)}(P_n \diamond P_m) = 2m + 2$.

Sebagai contoh diberikan ilustrasi gambar untuk pewarnaan titik 9-dinamis untuk $(P_3 \diamond P_4)$ pada Gambar 11.

Kasus 3. Untuk $r \geq 2m + 2$, berdasarkan Observasi 2. $\chi_r \geq \min\{\Delta(G), r\} + 1 = \min\{2m + 4, r\} + 1 = r + 1 = 2m + 2 + 1 = 2m + 3$. Didefinisikan pewarnaan $c_3 : V(P_n \diamond P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$, dimana $n \geq 3m \geq 1$ adalah sebagai berikut :

$$c_3(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3} \\ 2; & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3} \\ 3; & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$$c_3(y_j^i) = \begin{cases} 3 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil} \\ m + 3 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ genap} \end{cases}$$


 Figure 12: Ilustrasi Pewarnaan Titik 10-Dinamis untuk $(P_3 \diamond P_4)$

Dengan mudah dipahami bahwa c_3 adalah pemetaan : $V(P_n \diamond P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2m+3\}$. Didapat $2m+3$ merupakan warna terbesar sehingga, untuk $r \geq 2m+2$ diperoleh $\chi_{(r \geq 2m+2)}(P_n \diamond P_m) \leq 2m+3$. Karena $\chi_{(r \geq 2m+2)}(P_n \diamond P_m) \geq 2m+3$ dan $\chi_{(r \geq 2m+2)}(P_n \diamond P_m) \leq 2m+3$, Jadi dapat disimpulkan bahwa $\chi_{(r \geq 2m+2)}(P_n \diamond P_m) = 2m+3$.

Sebagai contoh diberikan ilustrasi gambar untuk pewarnaan titik 10-dinamis untuk $(P_3 \diamond P_4)$ pada Gambar 12.

Misalkan $P_n \diamond B_{m,k}$ merupakan graf hasil operasi edge corona antara P_n dan $B_{m,k}$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 5$, dan $k \geq 2$. Bilangan kromatik pewarnaan titik r -dinamis pada graf $P_n \diamond B_{m,k}$ adalah :

$$\chi(S_n \diamond P_m) = \begin{cases} 4; & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ r+1; & \text{untuk } 4 \leq r \leq 2m+1 \\ 2m+3; & \text{untuk } r \geq 2m+2 \end{cases}$$

Bukti. Graf $P_n \diamond B_{m,k}$ adalah graf terhubung dengan memiliki himpunan titik $V(P_n \diamond B_{m,k}) = \{x_i, i = 1\} \cup \{y_j^i, 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \diamond B_{m,k}) = \{x_i x_{(i+1)}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_j^i, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{(i+1)} y_j^i, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_j^i y_{j+1}^i, 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq k\} \cup \{y_j^i y_{j+1}^i, 1 \leq i \leq n-1, j = k\}$. Banyaknya titik dari graf $P_n \diamond B_{m,k}$ adalah $|V(P_n \diamond B_{m,k})| = mn - m + n$ dan banyaknya sisi dari graf $P_n \diamond B_{m,k}$ adalah $|E(P_n \diamond B_{m,k})| = (n-1)(m+n-1)$. Dengan demikian, $\Delta(P_n \diamond B_{m,k}) = 2m+2$.

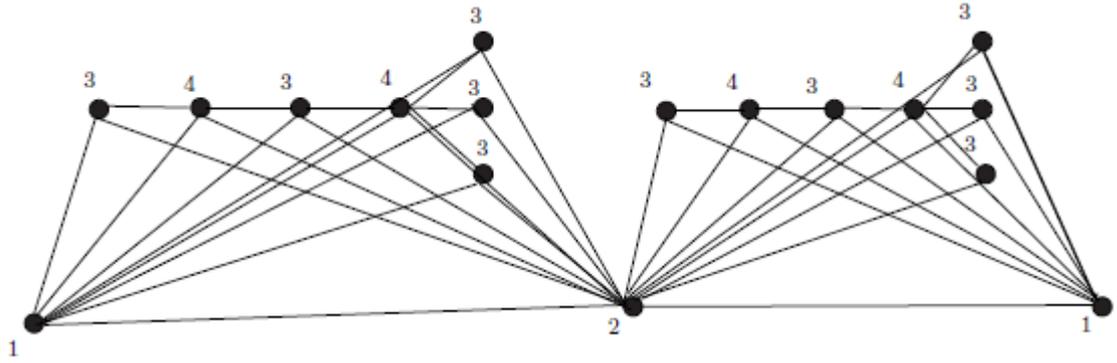
Berdasarkan Observasi 2., $\chi(P_n \diamond B_{m,k}) \geq \min\{r, \Delta(P_n \diamond B_{m,k})\} + 1 = \min\{r, n+mn\} + 1$. Untuk menentukan batas bawah maka akan dijelaskan dalam beberapa kasus berikut:

Kasus 1. Untuk $1 \leq r \leq 3$, berdasarkan Observasi 2. $\chi_r \geq \min\{\Delta(G), r\} + 1 = \min\{2m+4, r\} + 1 = r+1 = 3+1 = 4$. Didefinisikan pewarnaan $c_1 : V(P_n \diamond B_{m,k}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$, dimana $n \geq 3$ $m \geq 1$ adalah sebagai berikut :

$$c_1(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2; & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_1(y_j^i) = \begin{cases} 3; & \text{untuk } j \text{ ganjil}, 1 \leq j \leq k \\ 4; & \text{untuk } j \text{ genap}, 1 \leq j \leq k \\ 3; & \text{untuk } k \text{ genap}, 1 \leq j \leq (m-k) \\ 4; & \text{untuk } k \text{ ganjil}, 1 \leq j \leq k \end{cases}$$

Dengan mudah dipahami bahwa c_1 adalah pemetaan : $V(P_n \diamond B_{m,k}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$. Didapat 4 merupakan warna terbesar sehingga, untuk $1 \leq r \leq 3$ diperoleh $\chi_{(1 \leq r \leq 3)}(P_n \diamond$


 Figure 13: Ilustrasi Pewarnaan Titik 3-Dinamis untuk $(P_3 \diamond B_{7,4})$

$B_{m,k} \leq 4$. Karena $\chi_{(1 \leq r \leq 4)}(P_n \diamond B_{m,k}) \geq 4$ dan $\chi_{(1 \leq r \leq 4)}(P_n \diamond B_{m,k}) \leq 4$, Jadi dapat disimpulkan bahwa $\chi_{(1 \leq r \leq 3)}(P_n \diamond B_{m,k}) = 4$.

Sebagai contoh diberikan ilustrasi gambar untuk pewarnaan titik 3-dinamis untuk $(P_3 \diamond B_{7,4})$ pada Gambar 13.

Kasus 2. Untuk $4 \leq r \leq 2m + 1$, berdasarkan Observasi 2. $\chi_r \geq \min\{\Delta(G), r\} + 1 = \min\{2m + 4, r\} + 1 = r + 1 = 2m + 1 + 1 = 2m + 2$. Didefinisikan pewarnaan $c_1 : V(P_n \diamond B_{m,k}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$, dimana $n \geq 3$, $m \geq 5$, dan $k \geq 2$ adalah sebagai berikut :

$$c_2(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2; & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_2(y_j^i) = \begin{cases} 2 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil} \\ m + 2 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ genap} \end{cases}$$

Dengan mudah dipahami bahwa c_2 adalah pemetaan : $V(P_n \diamond B_{m,k}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2m + 2\}$. Didapat $2m + 2$ merupakan warna terbesar sehingga, untuk $4 \leq r \leq 2m + 1$ diperoleh $\chi_{(4 \leq r \leq 2m + 1)}(P_n \diamond B_{m,k}) \leq 2m + 2$. Karena $\chi_{(4 \leq r \leq 2m + 1)}(P_n \diamond B_{m,k}) \geq 2m + 2$ dan $\chi_{(4 \leq r \leq 2m + 1)}(P_n \diamond B_{m,k}) \leq 2m + 2$, Jadi dapat disimpulkan bahwa $\chi_{(4 \leq r \leq 2m + 1)}(P_n \diamond B_{m,k}) = 2m + 2$.

Sebagai contoh diberikan ilustrasi gambar untuk pewarnaan titik 15-dinamis untuk $(P_3 \diamond B_{7,4})$ pada Gambar 14.

Kasus 3. Untuk $r \geq 2m + 2$, berdasarkan Observasi 2. $\chi_r \geq \min\{\Delta(G), r\} + 1 = \min\{2m + 4, r\} + 1 = r + 1 = 2m + 2 + 1 = 2m + 3$. Didefinisikan pewarnaan $c_3 : V(P_n \diamond B_{m,k}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$, dimana $n \geq 3$, $m \geq 5$, dan $k \geq 2$ adalah sebagai berikut :

$$c_3(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3} \\ 2; & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3} \\ 3; & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$$c_3(y_j^i) = \begin{cases} 3 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil} \\ m + 3 + j; & \text{untuk } 1 \leq j \leq m, i \text{ genap} \end{cases}$$

Dengan mudah dipahami bahwa c_3 adalah pemetaan : $V(P_n \diamond B_{m,k}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2m + 3\}$. Didapat $2m + 3$ merupakan warna terbesar sehingga, untuk $r \geq 2m + 2$ diperoleh

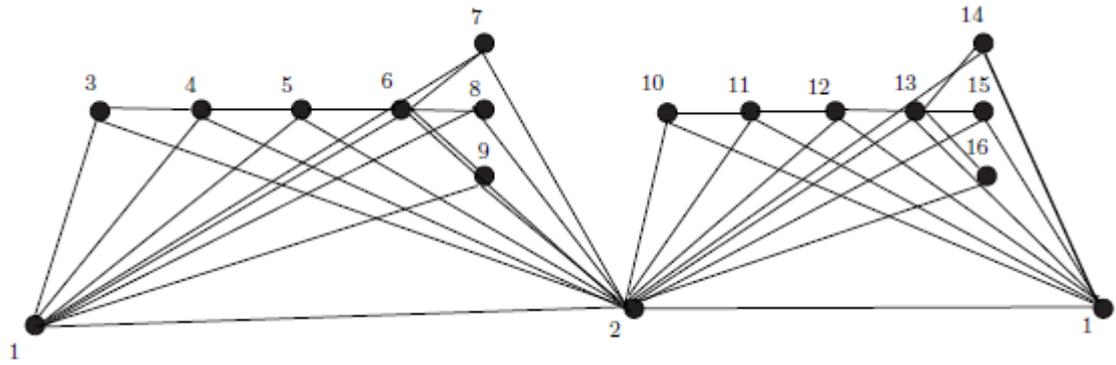


Figure 14: Ilustrasi Pewarnaan Titik 15-Dinamis untuk $(P_3 \diamond B_{7,4})$

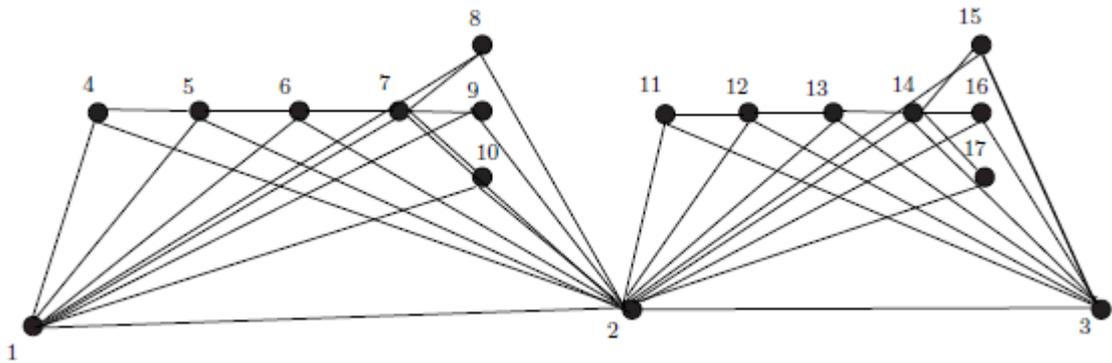


Figure 15: Ilustrasi Pewarnaan Titik 16-Dinamis untuk $(P_3 \diamond B_{7,4})$

$\chi_{(r \geq 2m+2)}(P_n \diamond B_{m,k}) \leq 2m + 3$. Karena $\chi_{(r \geq 2m+2)}(P_n \diamond B_{m,k}) \geq 2m + 3$ dan $\chi_{(r \geq 2m+2)}(P_n \diamond B_{m,k}) \leq 2m + 3$, Jadi dapat disimpulkan bahwa $\chi_{(r \geq 2m+2)}(P_n \diamond B_{m,k}) = 2m + 3$.

Sebagai contoh diberikan ilustrasi gambar untuk pewarnaan titik 10-dinamis untuk $(P_3 \diamond B_{7,4})$ pada Gambar 15.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diatas menghasilkan empat buah teorema untuk bilangan kromatik pada pewarnaan titik r -dinamis *edge corona* untuk $P_n \diamond K_m$, $P_n \diamond S_m$, $P_n \diamond P_m$, dan $P_n \diamond B_{(m,k)}$. Dari hasil keempat teorema tersebut didapat hasil yang unik untuk pewarnaan graf hasil operasi $P_n \diamond K_m$, $P_n \diamond S_m$, $P_n \diamond P_m$, dan $P_n \diamond B_{m,k}$ dengan graf P_n sebagai graf pertama sedemikian hingga graf S_m , K_m , P_m , dan $B_{m,k}$ disalin sebanyak sisi pada graf P_n . Bilangan kromatik yang dihasilkan akan bernilai 4 untuk $1 \leq r \leq 3$ pada graf hasil operasi $P_n \diamond S_m$, $P_n \diamond P_m$, dan $P_n \diamond B_{m,k}$ dengan pewarnaan titik klasik minimum pada graf P_n , S_n , dan $B_{m,k}$. Berbeda dengan graf hasil operasi $P_n \diamond K_m$ memiliki bilangan kromatik $m+2$ untuk $1 \leq r \leq m + 1$ karena pewarnaan titik klasik untuk graf K_m sendiri memiliki warna berbeda di semua titiknya. Kemudian bilangan kromatik pada keempat graf hasil operasi ini akan menambah satu warna secara konstan seiring bertambahnya nilai r nya sampai batas tertinggi dari nilai r tersebut sama dengan derajat terbesar pada keempat graf hasil operasi

ini.

References

- [1] A. I. Kristiana, D. Dafik, M. I. Utoyo, and I. H. Agustin, *On r -Dynamic Chromatic Number of the Coronation of Path and Several Graphs*, Int. J. Adv. Eng. Res. Sci., vol. 4, no. 4, pp. 096-101, 2017.
- [2] A. I. Kristiana, M. I. Utoyo, and D. Dafik, *On the r -dynamic chromatic number of the coronation by complete graph*,” J. Phys. Conf. Ser., vol. 1008, no. 1, 2018.
- [3] A. I. Kristiana, M. I. Utoyo, Dafik, I. H. Agustin, and R. Alfarisi, *Local antimagic r -dynamic coloring of graphs*,” IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci., vol. 243, p. 12077, 2019.
- [4] B. J. Septory, Dafik, A. I. Kristiana, I. H. Agustin, and D. A. R. Wardani, *On r -dynamic chromatic number of coronation of order two of any graphs with path graph*,” IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci., vol. 243, p. 12113, 2019.
- [5] I. H. Agustin, D. Dafik, and A. Y. Harsya, *On r -dynamic coloring of some graph operations*,” Indones. J. Comb., vol. 1, no. 1, p. 22, 2017.
- [6] Lai, H. J., dan B. Montgomery. 2002. *Dynamic Coloring of Graphs*. West Virginia University, Morgantown
- [7] S.Akbari, M.Ghanbari, S.Jahanbekam. 2014 *On The Dynamic Coloring of Cartesian Product Graph*, *Ars Combinatoria* 114,161-167.
- [8] Y. N. Yeh, I. Gutman, *On the sum of all distancess in composite graphs*, *dicrete math.* 135,1994.
- [9] Yaoping H. dan Wai-Chee S.2010.*The Spectrum of The Edge Corona*.Electronic Journal of Linier Algebra.Vol.20,pp.568-594.