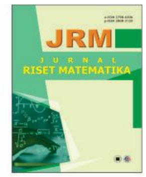
Jurnal Riset Matematika (JRM)
e-ISSN 2798-6306 | p-ISSN 2808-313X
https://journals.unisba.ac.id/index.php/JRM

Tersedia secara online di
Unisba Press
https://publikasi.unisba.ac.id/



Membangun Fungsi *Green* untuk Persamaan Diferensial Linear Non Homogen Orde-2 Koefesien Konstan

Herlangga Jaka Pratama, Yani Ramdani*

Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Indonesia.

A R T I C L E   I N F O

Article history :
Received : 16/4/2022
Revised : 6/7/2022
Published : 9/7/2022

Volume : 2
No. : 1
Halaman : 50 - 58
Terbitan : **Juli 2022**

A B S T R A K

Persamaan diferensial linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan dapat diselesaikan dengan metode koefisien tak tentu. Namun metode ini strategi penyelesaian selalu berubah-ubah mengikuti bentuk non homogen dari suatu persamaan diferensial, serta pada praktiknya tidak berlaku untuk semua persaman diferensial non homogen. Selain metode koefesien tak tentu, untuk menyelesaikan persamaan diferensial non homogen orde-2 koefesien konstan dapat digunakan metode variasi parameter, metode ini lebih umum daripada metode koefesien konstan akan tetapi pada metode variasi parameter tidak disebutkan mengenai syarat-syarat untuk masalah batas atau masalah nilai awal dari suatu persamaan diferensial. Berdasarkan permasalahan dua metode tersebut maka munculah penyelesaian persamaan diferensial non homogen orde-2 koefesien konstan dengan menggunakan fungsi *Green*. Hasil dari penelitian ini adalah fungsi *Green* yang dibangun menggunakan bantuan metode variasi parameter dapat digunakan sebagai metode untuk mencari solusi dari persamaan diferensial pada masalah nilai batas dan nilai awal, di mana memiliki bentuk solusi $\boldsymbol{y(x) = \int_a^b G(x,t)\, f(t)\, dt}$

Kata Kunci : persamaan diferensial orde-2; fungsi Green; variasi parameter.

A B S T R A C T

Second order linear Non-homogeneous differential equations with constant coefficients can be solved by the method of indeterminate coefficients. However, this method of solution strategy always changes following the non-homogeneous form of a differential equation, and in practice it does not apply to all non-homogeneous differential equations. In addition to the method of indeterminate coefficients, to solve Second order linear Non-homogeneous differential equations with constant can be used variation of parameter method, this method is more general than the constant coefficient method but the parameter variation method does not mention the conditions for boundary problems or initial value problems of a differential equation. Based on the problem of the two methods, the solution Second order linear Non-homogeneous differential equations with constant using the *Green* function. The result of this research is that the *Green* function built using the parameter variation method can be used as a method to find a solution to the differential equation on the boundary value and initial value problem, which has the solution form $\boldsymbol{y(x) = \int_a^b G(x,t)\, f(t)\, dt}$

Keywords : second order differential equations; Green functions; variation of parameter.

Corresponding Author : Email : yaniramdani66@gmail.com
Indexed : Garuda, Crossref, Google Scholar
DOI : https://doi.org/10.29313/jrm.v2i1.1016

A. Pendahuluan

Fungsi *Green* adalah kernel dari suatu persamaan integral yang dibangun sebagai penyelesaian non homogen dari persamaan diferensial dengan masalah nilai batas atau masalah nilai awal. Fungsi *Green* dinamai untuk menghormati matematikawan dan fisikawan Inggris George *Green*[1].

Persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung turunan, baik turunan biasa maupun turunan parsial. Dengan melibatkan banyaknya variabel bebas, maka ada dua bentuk persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa yaitu persamaan yang hanya melibatkan satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial yaitu persamaan yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas [2][3].

Persamaan diferensial linear orde-2 non homogen dengan koefisien konstan dapat diselesaikan dengan metode koefisien tak tentu. Namun metode tidak umum strategi penyelesaian bergantung pada bentuk non homogen dari suatu persamaan diferensial, serta pada praktiknya tidak berlaku untuk semua persaman diferensial non homogen. Selain metode koefesien tak tentu, untuk menyelesaikan persamaan diferensial non homogen orde-2 koefesien konstan dapat digunakan metode variasi parameter, metode ini lebih umum daripada metode koefesien konstan akan tetapi pada metode variasi parameter tidak disebutkan mengenai syarat-syarat untuk masalah batas atau masalah nilai awal dari suatu persamaan diferensial [2]. Berdasarkan pemasalahan dua metode tersebut maka munculah penyelesian persamaan diferensial non homogen orde-2 koefesien konstan dengan menggunakan fungsi *Green*. Selain metode-metode tersebut juga terdapat metode lainnya [4].

B. Metode Penelitian

Persamaan Diferensial Linear Homogen Orde-2 Koefesien Konstan

Persamaan diferensial linear homogen orde-2 dengan koefesien kostan memiliki bentuk umum sebagai berikut [2]:

$Ly = y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$	(1)

Misal $y = e^{rx}$ adalah solusi dari (2.1) maka

$$(e^{rx})'' + a_1(e^{rx})' + a_0 e^{rx} = 0$$
$$r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0$$
$$e^{rx}(r^2 + a_1 r + a_0) = 0$$

Karena $e^{rx} \neq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$ maka $r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ disebut persamaan karakteristik dari (2.1). akar dari persamaan karakteristik memiliki 3 kemungkinan solusi penyelesaian :

Bila akar-akarnya real dan berlainan maka penyelesaiannya yaitu :

$y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$	(2)

Bila akar-akarnya real dan sama, maka penyelesaiannya yaitu :

$y_h(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$	(3)

Bila akar-akarnya kompleks, maka penyelesaiannya yaitu :

$y_h(x) = c_1 e^{\alpha} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha} \sin \beta x$	(4)

Persamaan Diferensial Linear non Homogen Orde-2 Koefesien Konstan

Persamaan Diferensial Linear non Homogen dengan koefesien konstan memiliki bentuk umum sebagai berikut : [2]

$Ly = y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$	(5)

Solusi dari persamaan diferensial non homogen disebut sebagai solusi partikular atau biasa dinotasikan sebagai y_p, sehingga solusi umum dari persamaan non homogen tersebut ialah solusi homogen ditambah solusi partikular atau biasa dinotasikan sebagai

$y = y_h + y_p$	(6)

Metode Variasi Parameter

Metode variasi parameter untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial linier orde ke-2 non homogen memiliki bentuk umum [2] :

$Ly = y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$	(7)

Penyelesaian umum dari persamaan (2.2) adalah $y = y_h + y_p$

Misalkan y_1, y_2 adalah solusi dari suatu persamaan diferensial homogen, maka solusi umum dari persamaan diferensial homogen adalah :

$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$	(8)

Misalkan u_1, u_2 adalah suatu fungsi dalam membentuk solusi khusus dari suatu persamaan diferensial maka solusi khusus tersebut memiliki bentuk

$y_p = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$	(9)

Dengan

$u_1(x) = \int_{x_1}^{x} -\frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}\, dt$ dan $u_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}\, dt$	(10)

Masalah Nilai Batas

Jika syarat bantu pada persamaan diferensial yang diketahui berhubungan dengan dua atau lebih nilai x, syarat tersebut disebut syarat batas atau nilai batas.

Bentuk umum :

$Ly = y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)\,;\ a \le x \le b$	(11)

Dengan kondisi batas

$$A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0$$
$$B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0$$

Di mana A_1, A_2, B_1, B_2 adalah konstanta. A_1, A_2 tidak keduanya nol dan B_1, B_2 tidak keduanya nol.

Masalah Nilai Awal

Jika syarat bantu pada persamaan diferensial yang diketahui berhubungan dengan sebuah x, syarat tersebut disebut syarat awal atau nilai awal.

Bentuk umum:

$Ly = y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)\,;\ a \le x \le b$	(12)

Misalkan x_0 sebuah titik pada [a,b] maka ada suatu penyelesaian $y(x)$ dari persamaan diferensial tersebut yang memenuhi syarat nilai awal $y(x_0) = y_0$ dan $y'(x_0) = y_0{}'$.

Fungsi *Green*

Pandang persamaan diferensial non homogen orde-2 memiliki bentuk umum :

$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \ \ a \le x \le b$	(13)

Dengan $f(x)$ merupakan suatu fungsi yang kontinu. $y_p(x) = \int_a^b G(x,t)\, f(t)\, dt$ merupakan solusi partikular dari persamaan diferensial tersebut dan fungsi $G(x,t)$ disebut sebagai fungsi Green [5].

C. Hasil dan Pembahasan

Fungsi *Green* pada Masalah Nilai Batas

$Ly = y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)\,;\ a \le x \le b$	(14)

Dengan batas

$$A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0$$
$$B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0$$

Solusi umum dari persamaan diferensial (14) :

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$	(15)

Solusi homogennya adalah

$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$	(16)

Sedangkan solusi partikular dari persamaan diferensial (14) :

$y_p(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$	(17)

Dengan menggunakan metode variasi parameter maka didapatkan :

$u_1(x) = \int_{x_1}^{x} -\frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}\, dt$	(18)

$u_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt$	(19)

Dengan mensubstitukan (18) dan (19) pada (15) maka diperoleh

$$y_p(x) = \int_{x_1}^{x} -\frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)} y_1(x)\,dt + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)} y_2(x)\,dt \quad (17)$$

$$y_p(x) = \int_{x_1}^{x} -\frac{y_2(t)y_1(x)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt \quad (17)$$

Maka solusi umum dari persamaan diferensial (14)

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \int_{x_1}^{x} -\frac{y_2(t)y_1(x)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt \quad (15)$$

Jika diambil x_1 dan x_0 sesuai dengan kondisi batas maka $x_1 = b$ dan $x_0 = a$

$$y_p(x) = \int_{b}^{x} -\frac{y_2(t)y_1(x)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt + \int_{a}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt$$

$$y_p(x) = -\int_{b}^{x} \frac{y_2(t)y_1(x)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt + \int_{a}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt$$

$$y_p(x) = \int_{x}^{b} \frac{y_2(t)y_1(x)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt + \int_{a}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt$$

$$y_p(x) = \int_{a}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt + \int_{x}^{b} \frac{y_2(t)y_1(x)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt$$

$$y_p(x) = \int_{a}^{x} G(x,t)f(t)\,dt + \int_{x}^{b} G(x,t)\,f(t)dt$$

$$y_p(x) = \int_{a}^{b} G(x,t)\,f(t)\,dt$$

Dimana

$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(x)}{W[y_1,y_2](t)}, & a \le t < x \\ \dfrac{y_2(t)y_1(x)}{W[y_1,y_2](t)}, & x < t \le b \end{cases}$	(20)

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa

$y(x) = \int_{a}^{b} G(x,t)\,f(t)\,dt$	(21)

Merupakan solusi dari persamaan diferensial (14) dengan batas (15) dan (16)

$$y(x) = \int_{a}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt + \int_{x}^{b} \frac{y_2(t)y_1(x)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt$$

Maka

$$y(a) = \int_{a}^{a} \frac{y_1(t)y_2(a)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt + \int_{a}^{b} \frac{y_2(t)y_1(a)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt$$

$$y(a) = \int_{a}^{b} \frac{y_2(t)y_1(a)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt$$

$$y(b) = \int_{a}^{b} \frac{y_1(t)y_2(b)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt + \int_{b}^{b} \frac{y_2(t)y_1(b)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt$$

$$y(b) = \int_{a}^{b} \frac{y_1(t)y_2(b)}{W[y_1,y_2](t)} f(t)\,dt$$

$y(x)$ akan didiferensialkan sehingga diperoleh

$$y'(x) = y_2'(x)\int_{a}^{x} \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt + \frac{y_2(x)y_1(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)} + y_1{}'(x)\int_{x}^{b} \frac{y_2(t)y_1(x)}{W[y_1,y_2](t)} - \frac{y_2(x)y_1(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}$$

$$y'(x) = y_2'(x)\int_a^x \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt + y_1'(x)\int_x^b \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt$$

Terdiferensialkan untuk $a \le x \le b$

Akibatnya,

$$y'(a) = y_2'(a)\int_a^a \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt + y_1'(a)\int_a^b \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt$$

$$y'(a) = y_1'(a)\int_a^b \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt$$

$$y'(b) = y_2'(b)\int_a^b \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt + y_1'(b)\int_b^b \frac{y_2(t)y_1(x)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt$$

$$y'(b) = y_2'(b)\int_a^b \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt$$

Akan ditunjukan memenuhi syarat batas (15) dan (16)

$$A_1y(a) + A_2y'(a) = A_1\left(y_1(a)\int_a^b \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt\right) +$$

$$A_2\left(y_1'(a)\int_a^b \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt\right) = 0$$

$$B_1y(b) + B_2y'(b) = B_1\left(y_2(b)\int_a^b \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt\right) +$$

$$B_2\left(y_2'(b)\int_a^b \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt\right) = 0$$

$y'(x)$ akan didiferensialkan diperoleh

$$y''(x) = y_2''(x)\int_a^x \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt + \frac{y_2'(x)y_1(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)} + y_1''(x)\int_x^b \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt - \frac{y_1'(x)y_2(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}$$

$$y''(x) = y_2''(x)\int_a^x \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt + y_1''(x)\int_x^b \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt + \frac{f(x)\big(y_2'(x)y_1(x) - y_1'(x)y_2(x)\big)}{W[y_1,y_2](x)}$$

Karena $W[y_1,y_2](x) = y_2'(x)y_1(x) - y_1'(x)y_2(x)$ dan $Ly_1 = Ly_2 = 0$ maka

$$Ly = Ly_2\int_a^x \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt + Ly_1\int_x^b \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt + f(x)$$

$$Ly = f(x)$$

Terbukti bahwa

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)\,f(t)\,dt \tag{21}$$

Dengan

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(x)}{W[y_1,y_2](t)}, & a \le t < x \\ \dfrac{y_2(t)y_1(x)}{W[y_1,y_2](t)}, & x < t \le b \end{cases} \tag{20}$$

Merupakan solusi dari persamaan diferensial (14) dengan batas (15) dan (16)

Fungsi *Green* Pada Masalah Nilai Awal

$y'' + a_1y' + a_0y = f(x) \;\; a \le x \le b$	(22)
$y(a) = \alpha \;, y'(a) = \beta$	(23)

Untuk mempermudah penyelesaian bagi kedalam dua kondisi :

$$y_h'' + a_1y_h' + a_0y_h = 0\,;\; y_h(a) = \alpha \;, y_h'(a) = \beta$$

$$y_p'' + a_1y_p' + a_0y_p = f(x);\; y_p(a) = 0 \;, y_p'(a) = 0$$

Solusi umum dari persamaan diferensial tersebut :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Solusi homogennya adalah

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Sedangkan solusi partikular dari persamaan diferensial tersebut :

$$y_p(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$$

Dengan menggunakan metode variasi parameter maka didapatkan :

$$u_1(x) = \int_{x_1}^{x} -\frac{y_2(t) f(t)}{W[y_1, y_2](t)}\, dt$$

$$u_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t) f(t)}{W[y_1, y_2](t)}\, dt$$

Berdasarkan kondisi di atas diketahui bahwa $y_p(a) = 0$ dan $y_p{}'(a) = 0$ maka didapatkan

$$u_1(a) y_1(a) + u_2(a) y_2(a) = 0$$

$$u_1(a) y_1{}'(a) + u_2(a) y_2{}'(a) = 0$$

Dari dua persamaan tersebut diperoleh

$$u_1(a) = u_2(a) = 0$$

Sehingga didapatkan $x_1 = x_0 = a$ maka

$$u_1(x) = \int_{a}^{x} -\frac{y_2(t) f(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt$$

$$u_2(x) = \int_{a}^{x} \frac{y_1(t) f(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt$$

Sehingga

$$y_p(x) = -\int_{a}^{x} \frac{y_2(t) f(t)}{W[y_1, y_2](t)} y_1(x) dt + \int_{a}^{x} \frac{y_1(t) f(t)}{W[y_1, y_2](t)} y_2(x) dt$$

$$y_p(x) = \int_{a}^{x} \frac{y_1(t) y_2(x) - y_2(t) y_1(x)}{W[y_1, y_2](t)} f(t)\, dt$$

$$y_p(x) = \int_{a}^{x} G(x,t) f(t)\, dt$$

$$y_p(x) = \int_{a}^{b} G(x,t) f(t)\, dt$$

Di mana

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t) y_2(x) - y_2(t) y_1(x)}{W[y_1, y_2](t)}, & a \le t < x \\ 0, & x < t \le b \end{cases}$$

Berdasarkan uraian di atas didapatkanlah solusi umum :

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_{a}^{b} G(x,t)\, f(t)\, dt$	(24)

Untuk suatu masalah nilai awal.

Langkah-Langkah Membangun Fungsi *Green*

Langkah-langkah membangun fungsi *Green*: (1) Tentukan solusi homogen dari persamaan diferensial sehingga didapatkan y_1 dan y_2; (2) Hitung Wronskian $W[y_1, y_2]$; (3) Tulis solusi tunggal

$y_p(x) = \int_{a}^{b} G(x,t)\, f(t)\, dt$	(25)

Di mana

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t) y_2(x)}{W[y_1, y_2](t)}, & a \le t < x \\ \dfrac{y_2(t) y_1(x)}{W[y_1, y_2](t)}, & x < t \le b \end{cases} \qquad (20)$$

Untuk masalah nilai batas

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{W[y_1,y_2](t)}, & a \le t < x \\ 0, & x < t \le b \end{cases}$$

Untuk masalah nilai awal.

Penerapan Hasil

Sebagai gambaran dari uraian di atas, akan diberikan contoh persamaan diferensial untuk masalah nilai batas dan nilai awal. Gambaran ini menunjukan bahwa fungsi *Green* dapat digunakan untuk mencari solusi dari suatu persamaan diferensial non homogen orde-2 koefesien konstan.

Contoh 1 (masalah nilai awal)

$$y'' + 4y = 1\,;\ y(\pi) = 0\ , y'(\pi) = 1$$

Penyelesaian :

Persamaan homogen

$$y'' + 4y = 0$$

Sehingga didapatkanlah persamaan karakteristiknya

$$m^2 + 4 = 0$$
$$m = \pm 2i$$
$$y_1(x) = \cos 2x, y_2(x) = \sin 2x$$

Jadi solusi homogen dari persamaan diferensial tersebut :

$$y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

Untuk memperoleh nilai $c_1$dan c_2 substitusi nilai awal pada solusi homogen sehingga

$$y_h(\pi) = c_1 \cos 2\pi + c_2 \sin 2\pi = 0 \leftrightarrow c_1 + 0 = 0 \leftrightarrow c_1 = 0$$
$$y_h'(x) = -2\, c_1 \sin 2x + 2\, c_2 \cos 2x \text{ karena } c_1 = 0 \text{ maka}$$
$$y_h'(x) = 2\, c_2 \cos 2x$$
$$y_h'(\pi) = 2\, c_2 \cos 2\pi = 1 \leftrightarrow c_2 = \tfrac{1}{2}$$

Jadi solusi homogen dari persamaan diferensial tersebut setelah disubstitusikan nilai awal didapatkan

$$y_h(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Setelah mendapatkan solusi homogen selanjutnya akan dicari solusi partikular

$$W[y_1,y_2](t) = \begin{vmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix}$$
$$W[y_1,y_2](t) = 2\cos^2 2t + 2\sin^2 2t$$
$$W[y_1,y_2](t) = 2(\cos^2 2t + \sin^2 2t)$$
$$W[y_1,y_2](t) = 2$$
$$y_p(x) = \int_a^b G(x,t)\, f(t)\, dt$$
$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{W[y_1,y_2](t)}, & a \le t < x \\ 0, & x < t \le b \end{cases}$$
$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\cos 2t \sin 2x - \sin 2t \cos 2x}{2}, & \pi \le t < x \\ 0, & x < t \le b \end{cases}$$
$$y_p(x) = \int_\pi^x G(x,t)\, f(t)\, dt$$
$$y_p(x) = \int_\pi^x \frac{\cos 2t \sin 2x - \sin 2t \cos 2x}{W(t)}\, dt$$
$$y_p(x) = \int_\pi^x \frac{\cos 2t \sin 2x - \sin 2t \cos 2x}{2}\, dt$$
$$y_p(x) = \frac{1}{2}\int_\pi^x \sin 2(x-t)\, dt$$
$$y_p(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right)$$

$$y_p(x) = \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{4}$$

Jadi solusi umumnya adalah

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$	(26)
$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{4}$	(27)

Sedangkan solusi khususnya adalah

$y(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{4}$	(28)

Contoh 2 (masalah nilai batas)

$$y'' + y = -2 \sin x \,;\, y(0) = 0, y'(\pi) = 0$$

Penyelesaian : Persamaan homogen

$$y'' + y = 0$$

Sehingga didapatkan persamaan karakteristik

$$m^2 + 1 = 0$$
$$m = \pm i$$
$$y_1(x) = \sin x \,, y_2(x) = \cos x$$

Jadi solusi homogen dari persamaan diferensial tersebut

$$y_h(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Untuk memperoleh nilai $c_1$dan c_2 substitusi nilai batas pada solusi homogen sehingga

$$y_h(0) = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 0$$
$$c_2 = 0$$
$$y_h'(x) = c_1 \cos x - c_2 \sin x$$
$$y_h'(\pi) = c_1 \cos \pi = 0$$
$$c_1 = 0$$

Setelah didapatkan nilai $c_1$dan c_2 substitusikan kembali pada solusi homogen maka

$$y_h(x) = 0$$

Setelah mendapatkan solusi homogen selanjutnya akan dicari solusi partikular

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix}$$
$$W[y_1, y_2](t) = -1$$
$$y_p = \int_a^b G(x,t)\, f(t)\ dt$$
$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t) y_2(x)}{W[y_1, y_2](t)}, & a \le t < x \\ \dfrac{y_2(t) y_1(x)}{W[y_1, y_2](t)}, & x < t \le b \end{cases}$$
$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t \cos x}{-1}, & 0 \le t < x \\ \dfrac{\cos t \sin x}{-1}, & x < t \le \pi \end{cases}$$
$$G(x,t) = \begin{cases} -\sin t \cos x\,, & 0 \le t < x \\ -\cos t \sin x\,, & x < t \le \pi \end{cases}$$
$$y_p = \int_a^b G(x,t)\, f(t)\ dt$$
$$y_p(x) = \int_0^\pi G(x,t) f(t)\, dt$$
$$y_p(x) = \int_0^\pi G(x,t) \cdot -2 \sin t\ dt$$
$$y_p(x) = \int_0^x G(x,t) \cdot -2 \sin t\ dt + \int_x^\pi G(x,t) \cdot -2 \sin t\ dt$$

$$y_p(x) = \int_0^x -\sin t \cos x \cdot -2\sin t \; dt + \int_x^\pi -\cos t \sin x \cdot -2\sin t \; dt$$
$$y_p(x) = 2\cos x \int_0^x \sin t \; \sin t \; dt + 2\sin x \int_x^\pi \cos t \; \sin t \; dt$$
$$y_p(x) = 2\cos x \left(\frac{-\sin(2x) + 2x}{4}\right) + 2\sin x \left(\frac{\cos^2 x - 1}{2}\right)$$
$$y_p(x) = -\frac{2}{4}\cos x \sin 2x + \frac{2}{4} 2\mathrm{x} \cos x - \sin x \; \sin^2 x$$
$$y_p(x) = -\frac{2}{4}\cos x \; 2\sin x \cos x \; + \mathrm{x} \cos x - \sin x \; \sin^2 x$$
$$y_p(x) = -\sin x \cos^2 x + \mathrm{x} \cos x - \sin x \; \sin^2 x$$
$$y_p(x) = -\sin x \; (\cos^2 x + \sin^2 x) + x \cos \; x$$
$$y_p(x) = -\sin x + x \cos x$$

Jadi solusi khususnya adalah

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$	(29)
$y(x) = -\sin x + x \cos x$	(30)

D. Kesimpulan

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa fungsi *Green* dapat dibentuk menggunakan bantuan metode variasi parameter dan fungsi *Green* dapat digunakan untuk mencari solusi dari persamaan diferensial non homogen orde-2 koefesien konstan, dengan bentuk solusi sebagai berikut :

$y(x) = \int_a^b G(x,t)\, f(t)\, dt$	(31)

Dimana

$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(x)}{W[y_1,y_2](t)}, & a \le t < x \\ \dfrac{y_2(t)y_1(x)}{W[y_1,y_2](t)}, & x < t \le b \end{cases}$	(32)

Untuk masalah nilai batas, Dan

$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{W[y_1,y_2](t)}, & a \le t < x \\ 0, & x < t \le b \end{cases}$	(33)

Untuk masalah nilai awal. Kelebihan menggunakan fungsi *Green* sebagai penyelesaian persamaan diferensial, bentuk non homogen tidak berpengaruh terhadap strategi penyelesaian, syarat batas dan syarat nilai awal secara umum sudah diberikan. Sedangkan kelemahannya terjadi pengintegralan yang cukup rumit.

Daftar Pustaka

[1] D. G. Duffy, *Green's function and applications*. London: Chapman & Hall/CRC, 2011.

[2] W. . Boyce and R. . DiPrima, *Elementary Differential Equations And Boundary Value Problems*. New York: John Wiley & Sons, 2001.

[3] R. Y. Indriani, "Penggunaan Metode Nadir Compromise Programming dalam Menyelesaikan Permasalahan Multi Objektif," *J. Ris. Mat.*, vol. 1, no. 2, pp. 82–90, Dec. 2021, doi: 10.29313/jrm.v1i2.364.

[4] G. Gunawan, "Penerapan Konvolusi Pada Persamaan Diferensial Linier Orde Dua Tak Homogen Koefisien Konstan," *BAREKENG J. Ilmu Mat. dan Terap.*, vol. 15, no. 3, pp. 409–416, 2021, doi: 10.30598/barekengvol15iss3pp409-416.

[5] Raisinghania, *Integral equation and boundry value problems*. New Delhi : S.Chand & Company, 2008.