# Bilangan Kromatik Lokasi Subdivisi Operasi Barbel Tertentu Graf Origami $B^s_{O_3}$, $B^s_{O_4}$, $B^s_{O_5}$, $B^s_{O_6}$

**Agus Irawan[1,2*], Asmiati[2], La Zakaria[2], Kurnia Muludi[3] dan Bernadhita Herindri Samodra Utami[1]**

[1]Sistem Informasi, STMIK Pringsewu
Jl. Wisma Rini No.09 Pringsewu, Lampung, Indonesia

[2]Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Lampung
Jl. Prof. Dr. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung

[3]Ilmu Komputer, Fakultas MIPA, Universitas Lampung
Jl. Prof. Dr. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung

*Email korespondensi: agusirawan814@gmail.com

**Abstrak**

**Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan $c$ suatu pewarnaan $k$-sejati dari $G$. Misalkan pula $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ merupakan partisi dari $V(G)$ yang diinduksi oleh pewarnaan $c$. code warna $c_\Pi(v)$ dari $v$ adalah $k$-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2),...,d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i)$ = min $\{d(v, x)|x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika semua titik di $G$ mempunyai kode warna berbeda, maka $c$ disebut pewarnaan-$k$ lokasi dari $G$. Bilangan kromatik lokasi dari $G$, dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$, adalah bilangan terkecil $k$ sehingga $G$ mempunyai pewarnaan-$k$ lokasi. Subdivisi operasi barbell tertentu graf origami graf yang disubdivisi, $s \geq 1$, adalah graph dengan $V(B^s_{O_n}) = \{u_i, u_{n+i}, v_i, v_{n+i}, w_i, w_{n+i}|1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i|1 \leq i \leq s\}$ dan $E(B^s_{O_n}) = \{u_iw_i, u_iv_i, v_iw_i, u_iu_{i+1}, w_iu_{i+1}|1 \leq i \leq n\} \cup \{u_{n+i}w_{n+i}, u_{n+i}v_{n+i}, v_{n+i}w_{n+i}, u_{n+i}u_{n+i+1}, w_{n+i}u_{n+i+1}|1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_nx_1, x_nu_{n+1}\} \cup \{x_ix_{i+1}|1 \leq i \leq s-1\}$. Pada penelitian ini akan dibahas bilangan kromatik lokasi subdivisi operasi barbell tertentu graf origami $B^s_{O_3}$, $B^s_{O_4}$, $B^s_{O_5}$dan $B^s_{O_6}$.**

**Kata kunci : bilangan kromatik lokasi, barbell graf origami, subdivisi.**

**Abstract**

**Let $G = (V, E)$ be a connected graph and $c$ be a proper $k$-coloring of $G$ with color $1, 2, \dots, k$. Let $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ be a partition of $V(G)$ which is induced by coloring $c$. The color code $c_\Pi(v)$ of $v$ is the ordered $k$-tuple $(d(v, C_1), d(v, C_2),...,d(v, C_k))$ where $d(v, C_i)$ = min $\{d(v, x)|x \in C_i\}$ for any $i$. If all distinct vertices of $G$ have distinct color codes, then $c$ is called $k$-locating coloring of $G$. The locating-chromatic number, denoted by $\chi_L(G)$, is the smallest $k$ such that $G$ has a locating $k$-coloring. Subdivision certain barbell origami graphs, for $s \geq 1$, is a graph with $V(B^s_{O_n}) = \{u_i, u_{n+i}, v_i, v_{n+i}, w_i, w_{n+i}|1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i|1 \leq i \leq s\}$ and $E(B^s_{O_n}) = \{u_iw_i, u_iv_i, v_iw_i, u_iu_{i+1}, w_iu_{i+1}|1 \leq i \leq n\} \cup \{u_{n+i}w_{n+i}, u_{n+i}v_{n+i}, v_{n+i}w_{n+i}, u_{n+i}u_{n+i+1}, w_{n+i}u_{n+i+1}|1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_nx_1, x_nu_{n+1}\} \cup \{x_ix_{i+1}|1 \leq i \leq s-1\}$. In this paper, we will determined the locating-chromatic number of subdivision certain barbell origami graphs $B^s_{O_3}$, $B^s_{O_4}$, $B^s_{O_5}$ and $B^s_{O_6}$.**

**Keywords: locating-chromatic number, barbell origami graph, subdivision.**

## 1. Pendahuluan

Bilangan kromatik lokasi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. [1]. Konsep ini ialah perpaduan konsep pewarnaan titik sesuatu graf serta konsep dimensi partisi sesuatu graf. Pewarnaan titik sesuatu graf merupakan pemberian warna kesemua titik- titik pada sesuatu graf dengan syarat tiap titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan titik pada sesuatu graf disebut bilangan kromatik lokasi, yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Misalkan $c$ merupakan suatu pewarnaan titik pada graf $G$ dengan $c(u) \neq c(v)$, untuk $u$ dan $v$ yang bertetangga di $G$. Misalkan $C_i$ merupakan himpunan titik yang diberi warnai, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ merupakan himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $C_\Pi(v)$ dari $v$ adalah $k$-pasang terurut $(d(v,C_1), d(v,C_2),\cdots, d(v,C_k))$ dimana $d(v,C_i) = min\{d(v,x)|x \in Ci\}$, untuk $1 \le i \le k$. Selanjutnya pada tahun 2003 Chartrand dkk. [2] juga telah menunjukan bahwa terdapat pohon berorde $n \ge 5$ yang mempunyai bilangan kromatik lokasi $k$ jika dan hanya jika $k \in (3, 4, \dots, n-2, n)$.

Asmiati [3] telah mengkarakterisasi semua pohon berbilangan kromatik lokasi 3. Bilangan kromatik lokasi perkalian join dari dua graf, graf kipas, graf roda, dan graf persahabatan diperkenalkan oleh Behtoei dan Anbarloei [4]. Purwasih dkk. [5] telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi subdivisi graf pada satu sisi. Syofyan dkk. [6] juga telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi pada graf lobster homogen. Selanjutnya Welyyanti dkk. [7] telah menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf pohon lengkap. Syofyan dkk. [8] juga telah berhasil menemukan bilangan kromatik lokasi pada graf pohon tertentu. Kemudian Syofyan dkk. [9] mendapatkan bilangan kromatik lokasi dari graf pohon grid 2 dimensi.

Pada operasi barbell, Asmiati dkk. [10] telah menentukan bilangan kromatik lokasi barbell graf tertentu pada graf lengkap dan graf Petersen diperumum $P(n,1)$. Pada graf origami $O_n$, Nabila dan Salman. [11] telah menentukan bilangan terhubung pelangi pada graf origami $O_n$. Misalkan $n \in \mathbb{N}$, dengan $n \ge 3$. Graf origami $O_n$ di titik $3n$ adalah graf dengan $V(O_n) = \{u_i, v_i, w_i : i \in \{1,\dots,n\}\}$ dan $E(O_n) = \{u_iw_i, u_iv_i, v_iw_i, u_i, u_{i+1}, w_iu_{i+1} : i \in \{1,\dots,n-1\}\} \cup \{u_nu_1, w_nu_1\}$. Pada tahun 2021 Irawan dkk.[12] telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi graf origami dan subdivisi graf origami pada sisi luar. Selanjutnya, Irawan dkk. [13] telah menentukan bilangan kromatik lokasi pada operasi barbell tertentu graf origami. Pada makalah ini akan dibahas bilangan kromatik lokasi barbel graf origami $B_{O_n}$ (untuk $n = 3,4,5,6$) yang disubdivisi sebanyak $s \ge 1$ titik $x_i$, $1 \le i \le s$ pada lintasan $u_nu_{n+1}$ dilambangkan dengan $B^s_{O_3}$, $B^s_{O_4}$, $B^s_{O_5}$dan $B^s_{O_6}$.

Teorema dasar bilangan kromatik lokasi suatu graf telah diberikan oleh Chartrand dkk. [1]. Definisikan $N(v)$ sebagai himpunan yang berisi semua titik yang menjadi tetangga $v$.

**Teorema 1.1** [1] *Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung $G$. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di $G$ sedemikian sehingga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u,v\}$, maka $c(u) \ne c(v)$. Secara khusus, jika $u$ dan $v$ titik titik yang tidak bertetangga di $G$ sedemikian sehingga $N(u) \ne N(v)$, maka $c(u) \ne c(v)$.*

**Teorema 1.2** [13] *Bilangan kromatik lokasi barbel tertentu graf origami adalah 5.*

## 2. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, akan didiskusikan tentang bilangan kromatik lokasi barbel tertentu graf origami yang disubdivisi $B^s_{O_3}$, $B^s_{O_4}$, $B^s_{O_5}$dan $B^s_{O_6}$.

**Teorema 2.1** *Bilangan kromatik lokasi dari $B^s_{O_3}$ adalah,* $\chi_L(B^s_{O_3}) = 5$

**Bukti.** Misalkan $B^s_{O_3}$ subdivisi operasi barbell tertentu graf origami, $s \ge 1$, dengan $V(B^s_{O_3}) = \{u_i, u_{3+i}, v_i, v_{3+i}, w_i, w_{3+i} | i = 1,2,3\} \cup \{x_i | 1 \le i \le s\}$ dan $E(B^s_{O_3}) = \{u_iw_i, u_iv_i, v_iw_i, u_iu_{i+1}, w_iu_{i+1}; i = 1,2,3\} \cup \{u_{3+i}w_{3+i}, u_{3+i}v_{3+i}, v_{3+i}w_{3+i}, u_{3+i}u_{3+i+1}, w_{3+i}u_{3+i+1}; i = 1,2\} \cup \{u_3x_1, x_su_4\} \cup \{x_ix_{i+1} : i = 1,\dots,s-1\}$. Pertama, akan ditentukan batas bawah dari $B^s_{O_3}$. Karena subdivisi dari operasi barbell tertentu graf origami $B^s_{O_3}$ memuat barbell graf origami $B_{O_3}$, maka berdasarkan Teorema 1.2. $\chi_L(B^s_{O_3}) \ge 5$.

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas dari $B^s_{O_3}$, untuk menunjukan bahwa $\chi_L(B^s_{O_3}) \le 5$, pandang pewarnaan-5 pada $B^s_{O_3}$ sebagai berikut:

$C_1 = \{u_1, w_2, u_6, v_5\}$;
$C_2 = \{u_4, v_3, w_5\}$;
$C_3 = \{u_3, v_2, w_4, w_6\} \cup \{x_i | \text{untuk } i \text{ genap}, i \ge 1\}$;
$C_4 = \{u_2, v_1, w_3, u_5, v_4, v_6\} \cup \{x_i | \text{untuk } i \text{ ganjil}, i \ge 2\}$;
$C_5 = \{w_1\}$.

Pewarnaan $c$ akan membangun suatu partisi $\Pi$ pada $V(B^s_{O_3})$. Akan ditunjukan bahwa kode warna dari semua titik di $B^s_{O_3}$ berbeda. Diperoleh $c_\Pi(u_1) = (0,2,1,1,1)$; $c_\Pi(u_2) = (1,1,0,1,2)$; $c_\Pi(u_3) = (1,2,1,0,1)$; $c_\Pi(u_4) = (1,0,1,1,s+3)$; $c_\Pi(u_5) = (1,1,1,0,s+4)$; $c_\Pi(u_6) = (0,1,1,1,s+4)$; $c_\Pi(v_1) = (1,3,2,0,1)$; $c_\Pi(v_2) =$

$(1,3,0,1,2)$; $c_\Pi(v_3) = (2,0,1,1,3)$; $c_\Pi(v_4) = (2,1,1,0,s+4)$; $c_\Pi(v_5) = (0,1,2,1,s+5)$; $c_\Pi(v_6) = (1,2,1,0,s+5)$; $c_\Pi(w_1) = (1,3,2,1,0)$; $c_\Pi(w_2) = (0,2,1,1,2)$; $c_\Pi(w_3) = (1,1,1,0,2)$; $c_\Pi(w_4) = (2,1,0,1,s+4)$; $c_\Pi(w_5) = (1,0,2,1,s+5)$; $c_\Pi(w_6) = (1,1,0,1,s+4)$; Untuk $s = 1$, diperoleh $c_\Pi(x_1) = (i+1,1,1,0,i+2)$. Untuk $i$ ganjil, $i \le \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \ge 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (i+1,i+1,1,0,i+2)$. Untuk $i$ genap, $i \le \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \ge 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (i+1,i+1,0,1,i+2)$. Untuk $i$ ganjil, $i > \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \ge 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (s-i+2,s-i+1,1,0,i+2)$. Untuk $i$ genap, $i > \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \ge 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (s-i+2,s-i+1,0,1,i+2)$.

Karena kode warna pada semua titik berbeda, maka $c$ adalah pewarnaan lokasi pada operasi barbell tertentu graf origami $B_{O_3}$. Jadi $\chi_L(B_{O_3}) \le 5$. □

**Teorema 2.2** *Bilangan kromatik lokasi dari $B_{O_4}^s$ adalah,* $\chi_L(B_{O_4}^s) = 5$

**Bukti.** Misalkan $B_{O_4}^s$ subdivisi operasi barbell tertentu graf origami, $s \ge 1$, dengan $V(B_{O_4}^s) = \{u_i, u_{4+i}, v_i, v_{4+i}, w_i, w_{4+i} | i = 1,2,3,4\} \cup \{x_i | 1 \le i \le s\}$ dan $E(B_{O_4}^s) = \{u_iw_i, u_iv_i, v_iw_i, u_iu_{i+1}, w_iu_{i+1}; i = 1,2,3,4\} \cup \{u_{4+i}w_{4+i}, u_{4+i}v_{4+i}, v_{4+i}w_{4+i}, u_{4+i}u_{4+i+1}, w_{4+i}u_{4+i+1}; i = 1,2,3\} \cup \{u_{4+i}x_1, x_su_5\} \cup \{x_ix_{i+1}: i = 1,\dots,s-1\}$. Pertama, akan ditentukan batas bawah dari $B_{O_4}^s$. Karena subdivisi dari operasi barbell tertentu graf origami $B_{O_4}^s$ memuat barbell graf origami $B_{O_4}$, maka berdasarkan Teorema 1.2. $\chi_L(B_{O_4}^s) \ge 5$.

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas dari $B_{O_4}^s$, untuk menunjukan bahwa $\chi_L(B_{O_4}^s) \le 5$, pandang pewarnaan-5 pada $B_{O_4}^s$ sebagai berikut :

$C_1 = \{w_1, w_2, w_4, u_6, w_7\}$;
$C_2 = \{u_3, u_5, v_2, v_4, v_8, w_6\}$;
$C_3 = \{u_2, u_4, u_7, v_1, v_3, v_6, w_5, w_8\} \cup \{x_i | \text{untuk } i \text{ genap}, i \ge 2\}$;
$C_4 = \{u_1, u_8, v_5, v_7\} \cup \{x_i | \text{untuk } i \text{ ganjil}, i \ge 1\}$;
$C_5 = \{w_3\}$.

Pewarnaan $c$ akan membangun suatu partisi $\Pi$ pada $V(B_{O_4}^s)$. Akan ditunjukan bahwa kode warna dari semua titik di $B_{O_4}^s$ berbeda. Diperoleh $c_\Pi(u_1) = (1,2,1,0,2)$; $c_\Pi(u_2) = (1,1,0,1,2)$; $c_\Pi(u_3) = (1,0,1,2,1)$; $c_\Pi(u_4) = (1,1,0,1,1)$; $c_\Pi(u_5) = (1,0,1,1,s+2)$; $c_\Pi(u_6) = (0,1,1,2,s+3)$; $c_\Pi(u_7) = (1,2,0,1,s+4)$; $c_\Pi(u_8) = (1,1,1,0,s+3)$; $c_\Pi(v_1) = (1,3,0,1,3)$; $c_\Pi(v_2) = (1,0,1,2,3)$; $c_\Pi(v_3) = (2,1,0,3,1)$; $c_\Pi(v_4) = (1,0,1,2,2)$; $c_\Pi(v_5) = (2,1,1,0,s+3)$; $c_\Pi(v_6) = (1,1,0,3,s+4)$; $c_\Pi(v_7) = (1,2,1,0,s+5)$; $c_\Pi(v_8) = (2,0,1,1,s+4)$; $c_\Pi(w_1) = (0,2,1,1,3)$; $c_\Pi(w_2) = (0,1,1,2,2)$; $c_\Pi(w_3) = (2,1,1,2,1)$; $c_\Pi(w_4) = (0,1,1,1,2)$; $c_\Pi(w_5) = (1,1,0,1,s+3)$; $c_\Pi(w_6) = (1,0,1,2,s+4)$; $c_\Pi(w_7) = (0,2,1,1,s+4)$; $c_\Pi(w_8) = (2,1,0,1,s+3)$. Untuk $s = 1$, diperoleh $c_\Pi(x_1) = (2,1,1,0,2)$. Untuk $i$ ganjil, $i \le \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \ge 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (i+1,i+1,1,0,i+1)$. Untuk $i$ genap, $i \le \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \ge 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (i+1,i+1,0,1,i+1)$. Untuk $i$ ganjil, $i > \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \ge 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (s-i+2,s-i+1,1,0,i+1)$. Untuk $i$ genap, $i > \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \ge 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (s-i+2,s-i+1,0,1,i+1)$.

Karena kode warna pada semua titik berbeda, maka $c$ adalah pewarnaan lokasi pada operasi barbell tertentu graf origami $B_{O_4}$. Jadi $\chi_L(B_{O_4}) \le 5$. □

**Teorema 2.3** *Bilangan kromatik lokasi dari $B_{O_5}^s$ adalah,* $\chi_L(B_{O_5}^s) = 5$

**Bukti.** Misalkan $B_{O_5}^s$ subdivisi operasi barbell tertentu graf origami, $s \ge 1$, dengan $V(B_{O_5}^s) = \{u_i, u_{5+i}, v_i, v_{5+i}, w_i, w_{5+i} | i = 1,2,3,4,5\} \cup \{x_i | 1 \le i \le s\}$ dan $E(B_{O_5}^s) = \{u_iw_i, u_iv_i, v_iw_i, u_iu_{i+1}, w_iu_{i+1}; i = 1,2,3,4,5\} \cup \{u_{5+i}w_{5+i}, u_{5+i}v_{5+i}, v_{5+i}w_{5+i}, u_{5+i}u_{5+i+1}, w_{5+i}u_{5+i+1}; i = 1,2,3,4\} \cup \{u_5x_1, x_su_6\} \cup \{x_ix_{i+1}: i = 1,\dots,s-1\}$. Pertama, akan ditentukan batas bawah dari $B_{O_5}^s$. Karena subdivisi dari operasi barbell tertentu graf origami $B_{O_5}^s$ memuat barbell graf origami $B_{O_5}$, maka berdasarkan Teorema 1.2. $\chi_L(B_{O_5}^s) \ge 5$.

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas dari $B_{O_5}^s$, untuk menunjukan bahwa $\chi_L(B_{O_5}^s) \le 5$, pandang pewarnaan-5 pada $B_{O_5}^s$ sebagai berikut:

$C_1 = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, u_1\}$;

$C_2 = \{u_2, u_5, u_{10}, v_2, v_4, v_7, v_9\} \cup \{x_i|\text{untuk } i \text{ genap}, i \geq 2\}$;
$C_3 = \{u_2, u_4, u_7, u_9, v_1, v_3, v_5, v_6, v_8, v_{10}\}$;
$C_4 = \{u_1, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}\} \cup \{x_i|\text{untuk } i \text{ ganjil}, i \geq 1\}$;
$C_5 = \{u_4, u_8\}$.

Pewarnaan $c$ akan membangun suatu partisi $\Pi$ pada $V(B^s_{O_5})$. Akan ditunjukan bahwa kode warna dari semua titik di $B^s_{O_5}$ berbeda. Diperoleh $c_\Pi(u_1) = (1,1,1,0,2)$; $c_\Pi(u_2) = (1,1,0,1,2)$; $c_\Pi(u_3) = (1,0,1,2,1)$; $c_\Pi(u_4) = (1,1,2,2,0)$; $c_\Pi(u_5) = (1,0,1,1,1)$; $c_\Pi(u_6) = (0,1,1,1,2)$; $c_\Pi(u_7) = (1,1,0,1,1)$; $c_\Pi(u_8) = (2,2,1,1,0)$; $c_\Pi(u_9) = (2,1,0,1,1)$; $c_\Pi(u_{10}) = (1,0,1,1,2)$; $c_\Pi(v_1) = (1,2,0,1,3)$; $c_\Pi(v_2) = (1,0,1,2,3)$; $c_\Pi(v_3) = (1,1,0,3,2)$; $c_\Pi(v_4) = (1,0,3,3,1)$; $c_\Pi(v_5) = (1,1,0,2,2)$; $c_\Pi(v_6) = (1,2,0,1,3)$; $c_\Pi(v_7) = (2,0,1,1,2)$; $c_\Pi(v_8) = (3,3,0,1,1)$; $c_\Pi(v_9) = (3,0,1,1,2)$; $c_\Pi(v_{10}) = (2,1,0,1,3)$; $c_\Pi(w_1) = (0,2,1,1,3)$; $c_\Pi(w_2) = (0,1,1,2,2)$; $c_\Pi(w_3) = (0,1,1,3,1)$; $c_\Pi(w_4) = (0,1,2,2,1)$; $c_\Pi(w_5) = (0,1,1,1,2)$; $c_\Pi(w_6) = (1,2,1,0,2)$; $c_\Pi(w_7) = (2,1,1,0,1)$; $c_\Pi(w_8) = (3,2,1,0,1)$; $c_\Pi(w_9) = (2,1,1,0,2)$; $c_\Pi(w_{10}) = (1,1,1,0,3)$. Untuk $s = 1$, diperoleh $c_\Pi(x_1) = (1,1,2,0,2)$. Untuk $i$ ganjil, $i \leq \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \geq 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (i+1, 1, i+1, 0, i+1)$. Untuk $i$ genap, $i \leq \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \geq 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (i+1, 0, i+1, 1, i+1)$. Untuk $i$ ganjil, $i > \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \geq 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (s-i+1, 1, s-i+2, 0, s-i+3)$. Untuk $i$ genap, $i > \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \geq 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (s-i+1, 0, s-i+2, 1, s-i+3)$.

Karena kode warna pada semua titik berbeda, maka $c$ adalah pewarnaan lokasi pada operasi barbell tertentu graf origami $B_{O_5}$. Jadi $\chi_L(B_{O_5}) \leq 5$. □

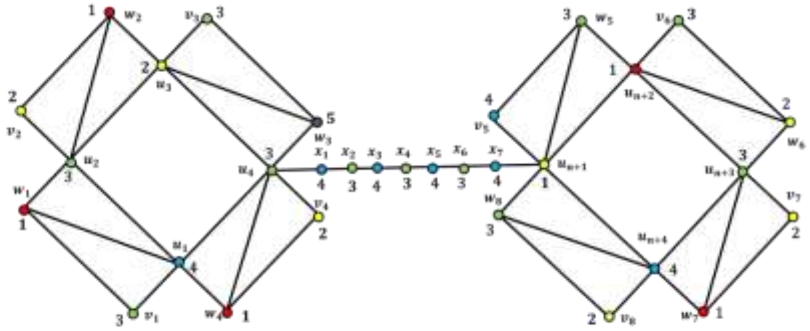
**Teorema 2.4** *Bilangan kromatik lokasi dari* $B^s_{O_6}$ *adalah,* $\chi_L(B^s_{O_6}) = 5$

**Bukti.** Misalkan $B^s_{O_6}$ subdivisi operasi barbell tertentu graf origami, $s \geq 1$, dengan $V(B^s_{O_6}) = \{u_i, u_{6+i}, v_i, v_{6+i}, w_i, w_{6+i}|i = 1,2,3,4,5,6\} \cup \{x_i|1 \leq i \leq s\}$ dan $E(B^s_{O_6}) = \{u_iw_i, u_iv_i, v_iw_i, u_iu_{i+1}, w_iu_{i+1}; i = 1,2,3,4,5,6\} \cup \{u_{6+i}w_{6+i}, u_{6+i}v_{6+i}, v_{6+i}w_{6+i}, u_{6+i}u_{6+i+1}, w_{6+i}u_{6+i+1}; i = 1,2,3,4,5\} \cup \{u_6x_1, x_su_7\} \cup \{x_ix_{i+1}: i = 1, \ldots, s-1\}$. Pertama, akan ditentukan batas bawah dari $B^s_{O_6}$. Karena subdivisi dari operasi barbell tertentu graf origami $B^s_{O_6}$ memuat barbell graf origami $B_{O_6}$, maka berdasarkan Teorema 1.2. $\chi_L(B^s_{O_6}) \geq 5$.

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas dari $B^s_{O_6}$, untuk menunjukan bahwa $\chi_L(B^s_{O_6}) \leq 5$, pandang pewarnaan-5 pada $B^s_{O_6}$ sebagai berikut:
$C_1 = \{w_1, w_2, w_4, w_5, w_6, u_7\}$;
$C_2 = \{u_3, u_5, u_8, u_{10}, u_{12}, v_2, v_4, v_6, v_7, v_9, v_{11}\}$;
$C_3 = \{u_2, u_4, u_6, u_9, u_{11}, v_1, v_3, v_5, v_8, v_{10}, v_{12}\} \cup \{x_i|\text{untuk } i \text{ genap}, i \geq 2\}$;
$C_4 = \{u_1, w_7, w_8, w_{10}, w_{11}, w_{12}\} \cup \{x_i|\text{untuk } i \text{ ganjil}, i \geq 1\}$;
$C_5 = \{w_3, w_9\}$.

Pewarnaan $c$ akan membangun suatu partisi $\Pi$ pada $V(B^s_{O_6})$. Akan ditunjukan bahwa kode warna dari semua titik di $B^s_{O_3}$ berbeda. Diperoleh $c_\Pi(u_1) = (1,2,1,0,3)$; $c_\Pi(u_2) = (1,1,0,1,2)$; $c_\Pi(u_3) = (1,0,1,2,1)$; $c_\Pi(u_4) = (1,1,0,3,1)$; $c_\Pi(u_5) = (1,0,1,2,2)$; $c_\Pi(u_6) = (1,1,0,1,3)$; $c_\Pi(u_7) = (0,1,2,1,3)$; $c_\Pi(u_8) = (1,0,1,1,2)$; $c_\Pi(u_9) = (2,1,0,1,1)$; $c_\Pi(u_{10}) = (3,0,1,1,1)$; $c_\Pi(u_{11}) = (2,1,0,1,2)$; $c_\Pi(u_{12}) = (1,0,1,1,3)$; $c_\Pi(v_1) = (1,3,0,1,4)$; $c_\Pi(v_2) = (1,0,1,2,3)$; $c_\Pi(v_3) = (2,1,0,3,1)$; $c_\Pi(v_4) = (1,0,1,4,2)$; $c_\Pi(v_5) = (1,1,0,3,3)$; $c_\Pi(v_6) = (1,0,1,2,4)$; $c_\Pi(v_7) = (1,0,3,1,4)$; $c_\Pi(v_8) = (2,1,0,1,3)$; $c_\Pi(v_9) = (3,0,1,2,1)$; $c_\Pi(v_{10}) = (4,1,0,1,2)$; $c_\Pi(v_{11}) = (3,0,1,1,3)$; $c_\Pi(v_{12}) = (2,1,0,1,4)$; $c_\Pi(w_1) = (0,2,1,1,3)$; $c_\Pi(w_2) = (0,1,1,2,2)$; $c_\Pi(w_3) = (2,1,1,3,0)$; $c_\Pi(w_4) = (0,1,1,3,2)$; $c_\Pi(w_5) = (0,1,1,2,3)$; $c_\Pi(w_6) = (0,1,1,1,4)$; $c_\Pi(w_7) = (1,1,2,0,3)$; $c_\Pi(w_8) = (2,1,1,0,2)$; $c_\Pi(w_9) = (3,1,1,2,0)$; $c_\Pi(w_{10}) = (3,1,1,0,2)$; $c_\Pi(w_{11}) = (2,1,1,0,3)$; $c_\Pi(w_{12}) = (1,1,1,0,4)$. Untuk $s = 1$, diperoleh $c_\Pi(x_1) = (1,2,1,0,4$. Untuk $i$ ganjil, $i \leq \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \geq 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (i+1, i+1, 1, 0, i+3)$. Untuk $i$ genap, $i \leq \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \geq 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (i+1, i+1, 0, 1, i+3)$. Untuk $i$ ganjil, $i > \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \geq 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (s-i+1, s-i+2, 1, 0, s-i+4)$. Untuk $i$ genap, $i > \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$, $s \geq 2$ diperoleh $c_\Pi(x_i) = (s-i+1, s-i+2, 0, 1, s-i+4)$.

Karena kode warna pada semua titik berbeda, maka *c* adalah pewarnaan lokasi pada operasi barbel tertentu graf origami $B_{O_6}$. Jadi $\chi_L(B_{O_6}) \leq 5$. □



**Gambar 1. Contoh pewarnaan minimum pada $B^7_{O_4}$**

## 3. Kesimpulan

Pada makalah ini, penulis mengkaji bilangan kromatik lokasi untuk operasi tertentu barbell graf origami yang di subdivisi $B^s_{O_n}$ untuk $n = 3, 4, 5, 6$ dimana diperoleh hasil sebagai berikut :

- $\chi_L(B^s_{O_3}) = 5$
- $\chi_L(B^s_{O_4}) = 5$
- $\chi_L(B^s_{O_5}) = 5$
- $\chi_L(B^s_{O_6}) = 5$

**Ucapan Terima Kasih**

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Direktorat Riset Pengabdian Masyarakat (DPRM) Dikti 2021 dan STMIK Pringsewu.

**Daftar Pustaka:**

[1] Chartrand G, Erwin D, Henning M A, Slater P J, dan Zhang P. 2002. The locating-chromatic number of a graphs. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*. **36**, 89-101.

[2] Chartrand G, Erwin D, Henning M A, Slater P J, dan Zhang P. 2003. Graf of order n with locating-chromatic number $n - 1$. *Discrate Mathematics*. **269:1-3**, 65 – 79.

[3] Asmiati, Yana I K G, and Yulianti L. 2018. On The Locating Chromatic Number of Certain Barbell Graphs. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 1-5.

[4] Behtoei A, and Anbarloei M. 2014. The locating chromatic number of the join of graphs. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*. **40:6**, 1491-1504.

[5] Purwasih I A, Baskoro E T, Assiyatun H, Suprijanto D. 2015. The bounds on the locating-chromatic number for a subdivision of a graph on one edge. *Procedia Computer Science*. **74**, 84 – 88.

[6] Syofyan D K, Baskoro E T, and Assiyatun H.2013. On the locating-chromatic number of homogeneous lobsters. *AKCE Int. J. Graphs Comb.* **10:3**, 245–252.

[7] Welyyanti D, Baskoro E T, Simanjuntak R, and Uttunggadewa S. 2013. On locating-chromatic number of complete n -ary tree. *AKCE Int. J. Graphs Comb*. **3:3**, 309–315.

[8] Syofyan D K, Baskoro E T, and Assiyatun H. 2016. Trees with certain locating-chromatic number. *J.Math.Fundam. Sci.* **48:1**, 39–47.

[9] Syofyan D K, Baskoro E T, and Assiyatun H. 2016. The locating-chromatic number of trees embedded in 2-dimensional grid. *AIP Conference Proceedings*. **1707**, 1–7.

[10] Asmiati, Yana I K G, and Yulianti L. 2018. On The Locating Chromatic Number of Certain Barbell Graphs. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 1-5.

[11] Nabila S, and Salman A N M. 2015. The Rainbow Conection Number of Origami Graphs and Pizza Graphs. *Procedia Computer Science*. **74**, 162-167.

[12] Irawan A, Asmiati, Zakaria L, Muludi K. 2021. The locating-chromatic number of origami graphs, *Algorithms*. **14:167**, 1-15.

[13] Irawan A, Asmiati, Suharsono S, Muludi K. 2021. The Locating-Chromatic Number of Certain Barbell Origami Graphs. *Journal of Physics: Conference Series*. **1750**, 1-13.