

Pelabelan Rho-Topi (\hat{p}) dari Subgraf Graf Kaki Seribu $L_4 \odot \bar{K}_r$

Dina Eka Nurvazly^{1*}, Pandri Ferdias¹, dan Siti Laelatul Chasanah¹

¹Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung
Jl. Prof. Dr. Soemantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung

*Email korespondensi: dina.eka@fmipa.unila.ac.id

Abstrak

Pelabelan rho-topi (\hat{p}) merupakan salah satu variasi dari pelabelan graceful. Pada tahun 2012 Haryono menggunakan notasi graf $L_n \odot \bar{K}_r$ sebagai graf hasil modifikasi dari graf tangga dengan menambahkan sebanyak r graf lintasan yang memiliki panjang satu di setiap simpul dari graf tangga tersebut sehingga graf yang dihasilkan menyerupai hewan kaki seribu. Karena bentuk graf $L_n \odot \bar{K}_r$ menyerupai hewan kaki seribu, maka graf $L_n \odot \bar{K}_r$ juga disebut sebagai graf kaki seribu. Pada artikel ini akan ditunjukkan bahwa graf $L_4 \odot \bar{K}_r$ memiliki pelabelan rho-topi (\hat{p}).

Kata kunci: Pelabelan rho-topi, graf kaki seribu.

Abstract

Rho-hat labeling (\hat{p}) is a variation of graceful labeling. In 2012 Haryono used graph notation $L_n \odot \bar{K}_r$ as a modified graph of the ladder graph by adding r path graphs that have a length of one at each vertex of the ladder graph so that the resulting graph resembles a millipede animal. Because the shape of the graph $L_n \odot \bar{K}_r$ resembles a millipede, then the graph $L_n \odot \bar{K}_r$ is also called a millipede graph. In this article we will show that the graph $L_4 \odot \bar{K}_r$ has a rho-cap labeling (\hat{p}).

Keywords: Rho-hat labeling, a millipede graph.

1. Pendahuluan

Pelabelan graf atau biasa juga disebut sebagai pemberian nilai pada graf merupakan suatu pemetaan elemen-elemen pada graf yaitu simpul, sisi, atau bahkan keduanya (simpul dan sisi) ke suatu bilangan bulat positif. Bilangan bulat positif ini kemudian disebut sebagai label yang memenuhi beberapa syarat tergantung dari jenis pelabelan yang dilakukan [1]

Alex Rosa pertama kali memperkenalkan teori mengenai pelabelan pada tahun 1967. Alex Rosa memperkenalkan pelabelan β yang kemudian oleh Golomb disebut sebagai pelabelan *graceful*. Variasi dari pelabelan *graceful* salah satunya yaitu pelabelan rho-topi (\hat{p}) yang merupakan modifikasi dari pelabelan *graceful*. Suatu graf dengan banyaknya sisi $|E|$ memiliki pelabelan \hat{p} jika $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, |E| + 1\}$ merupakan fungsi injektif dan menginduksi fungsi bijektif dari pelabelan sisi $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E|\}$ atau $f^*: V(E) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E| - 1, |E| + 1\}$ dimana untuk setiap sisi $ab \in E$ dengan simpul $a, b \in V$ berlaku $f^* = |f(a) - f(b)|$ [2].

Haryono pada tahun 2012 mengkonstruksi graf kaki seribu. Graf kaki seribu merupakan modifikasi dari graf tangga L_n sehingga graf yang dihasilkan menyerupai hewan kaki seribu. Graf kaki seribu $L_n \odot \bar{K}_r$ merupakan graf modifikasi dari graf tangga dengan menambahkan sebanyak r graf lintasan dengan panjang satu di setiap simpul pada graf tangga tersebut [3].

Beberapa penelitian mengenai pelabelan *graceful* dan berbagai variasinya telah banyak dilakukan. Penelitian mengenai pelabelan *graceful* pada graf hasil modifikasi graf tangga telah dilakukan oleh Ramachandran, Sekar, & Nadu pada tahun 2014 dan diperoleh bahwa graf *supersubdivision* dari graf tangga memiliki pelabelan *graceful* [4]. Penelitian yang dilakukan oleh Amri & Harahap pada tahun 2017 diperoleh bahwa graf 8-bintang dengan C_3 untuk n genap memiliki pelabelan \hat{p} [5]. Penelitian yang dilakukan oleh Amri & Sugeng pada tahun 2020 memperoleh bahwa graf ilalang memiliki pelabelan \hat{p} [6]. Penelitian yang dilakukan oleh Amri, Irvan, Maryanti, & Sumardi, pada tahun 2021 memperoleh bahwa graf ilalang dan variasinya memiliki pelabelan *graceful* ganjil [7]. Penelitian yang dilakukan oleh Giyarti, Sugeng, & Firmansah, pada tahun 2021 memperoleh bahwa graf W yang merupakan hasil modifikasi dari dua graf tangga dan satu graf C_3 memiliki pelabelan *graceful* [8]. Penelitian yang dilakukan oleh Jesintha, Subashini, & Beula, pada tahun 2019 memperoleh bahwa hasil modifikasi dari graf bintang dan dua graf tangga memiliki pelabelan *graceful* [9].

Penelitian mengenai pelabelan $\hat{\rho}$ pada subgraf graf kaki seribu telah dilakukan sebelumnya oleh Nurvazly, Chasanah, & Wiranto pada tahun 2021. Nurvazly, Chasanah, & Wiranto mengkonstruksi pelabelan $\hat{\rho}$ pada subgraph graf kaki seribu $L_2 \odot \bar{K}_r$ dan $L_3 \odot \bar{K}_r$. Dari penelitian yang telah dilakukan oleh Nurvazly, Chasanah, & Wiranto pada tahun 2021 diperoleh bahwa graf $L_2 \odot \bar{K}_r$ dan $L_3 \odot \bar{K}_r$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$ [10].

Dari pengkajian pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf $L_2 \odot \bar{K}_r$ dan $L_3 \odot \bar{K}_r$ timbul motivasi untuk mengkonstruksi pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf $L_4 \odot \bar{K}_r$. Sehingga pada artikel ini akan dicari pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf $L_4 \odot \bar{K}_r$.

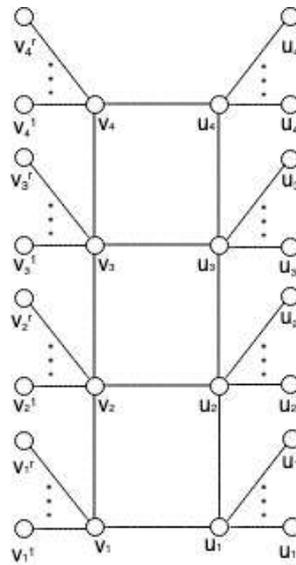
2. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan diberikan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf $L_4 \odot \bar{K}_r$ yaitu graf modifikasi dari graf tangga L_4 dengan menambahkan sebanyak r graf lintasan dengan panjang satu pada setiap simpul graf tangga L_4 dengan cara mengkonstruksi pelabelan secara umum.

Teorema Graf $L_4 \odot \bar{K}_r$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$.

Bukti.

Misalkan notasi simpul pada graf $L_4 \odot \bar{K}_r$, diberikan seperti pada Gambar 3.1 di bawah ini.



Gambar 1. Notasi Simpul Graf $L_4 \odot \bar{K}_r$

Dari notasi simpul pada Gambar 1, diperoleh himpunan simpul $V(L_4 \odot \bar{K}_r) = \{v_1, \dots, v_4, u_1, \dots, u_4, v_1^1, \dots, v_1^r, v_2^1, \dots, v_2^r, \dots, v_4^1, \dots, v_4^r, u_1^1, \dots, u_1^r, u_2^1, \dots, u_2^r, \dots, u_4^1, u_4^2, \dots, u_4^r\}$ dan himpunan sisi $E(L_4 \odot \bar{K}_r) = \{v_1 v_1^1, \dots, v_4 v_4^r, u_1 u_1^1, \dots, u_4 u_4^r, v_1 u_1, \dots, v_4 u_4, v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, u_1 u_2, u_2 u_3, u_3 u_4\}$, sehingga banyaknya simpul $|V| = 8r + 8$ dan banyaknya sisi $|E| = 8r + 10$ dimana r merupakan banyaknya graf lintasan dengan panjang 1 yang menempel di setiap simpul pada graf tangga L_4 .

Didefinisikan pelabelan f pada himpunan simpul graf $L_4 \odot \bar{K}_r$ sebagai berikut.

$$f(v_1) = 1 \quad (1)$$

$$f(v_2) = 3r + 6 \quad (2)$$

$$f(v_3) = 4r + 7 \quad (3)$$

$$f(v_4) = 5r + 9 \quad (4)$$

$$f(u_1) = 7r + 11 \quad (5)$$

$$f(u_2) = r + 2 \quad (6)$$

$$f(u_3) = 6r + 10 \quad (7)$$

$$f(u_4) = 2r + 3 \quad (8)$$

$$f(v_1^i) = 7r + 11 + i; i = 1, 2, \dots, r \quad (9)$$

$$f(v_2^i) = 4r + 8 + i; i = 1, 2, \dots, r \quad (10)$$

$$f(v_3^i) = 3r + 6 + i; i = 1, 2, \dots, r \quad (11)$$

$$f(v_4^i) = 2r + 4 + i; i = 1, 2, \dots, r \quad (12)$$

$$f(u_1^i) = r + 2 - i; i = 1, 2, \dots, r \quad (13)$$

$$f(u_2^i) = 6r + 10 + i; i = 1, 2, \dots, r \tag{14}$$

$$f(u_3^i) = 2r + 3 - i; i = 1, 2, \dots, r \tag{15}$$

$$f(u_4^i) = 5r + 9 + i; i = 1, 2, \dots, r \tag{16}$$

Dari persamaan (1) – (16) terlihat bahwa label simpul yang diperoleh memiliki label yang berbeda dan diperoleh $f(V(L_4 \odot \bar{K}_r)) = \{1, 2, 3, 4, \dots, |E| + 1\}$. Karena setiap simpulnya memiliki label yang berbeda maka pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (1) – (16) merupakan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, \dots, |E| + 1\}$.

Dari label simpul yang telah diperoleh pada persamaan (1) – (16) diperoleh label sisi graf $L_4 \odot \bar{K}_r$ yang diinduksi oleh pelabelan f' dimana $f'(ab) = |f(a) - f(b)|$. Pelabelan pada sisi graf $L_4 \odot \bar{K}_r$ yaitu sebagai berikut.

$$f'(v_1u_1) = |1 - (7r + 11)| = 7r + 10 \tag{17}$$

$$f'(v_1v_2) = |1 - (3r + 6)| = 3r + 5 \tag{18}$$

$$f'(v_2u_2) = |(3r + 6) - (r + 2)| = 2r + 4 \tag{19}$$

$$f'(v_2v_3) = |(3r + 6) - (4r + 7)| = r + 1 \tag{20}$$

$$f'(v_3u_3) = |(4r + 7) - (6r + 10)| = 2r + 3 \tag{21}$$

$$f'(v_3v_4) = |(4r + 7) - (5r + 9)| = r + 2 \tag{22}$$

$$f'(v_4u_4) = |(5r + 9) - (2r + 3)| = 3r + 6 \tag{23}$$

$$f'(u_1u_2) = |(7r + 11) - (r + 2)| = 6r + 9 \tag{24}$$

$$f'(u_2u_3) = |(r + 2) - (6r + 10)| = 5r + 8 \tag{25}$$

$$f'(u_3u_4) = |(6r + 10) - (2r + 3)| = 4r + 7 \tag{26}$$

$$f'(v_1v_1^i) = |1 - (7r + 11 + i)| = 7r + 10 + i; i = 1, 2, \dots, r \tag{27}$$

$$f'(v_2v_2^i) = |(3r + 6) - (4r + 8 + i)| = r + 2 + i; i = 1, 2, \dots, r \tag{28}$$

$$f'(v_3v_3^i) = |(4r + 7) - (3r + 6 + i)| = r + 1 + i; i = 1, 2, \dots, r \tag{29}$$

$$f'(v_4v_4^i) = |(5r + 9) - (2r + 4 + i)| = 3r + 5 + i; i = 1, 2, \dots, r \tag{30}$$

$$f'(u_1u_1^i) = |(7r + 11) - (r + 2 - i)| = 6r + 9 + i; i = 1, 2, \dots, r \tag{31}$$

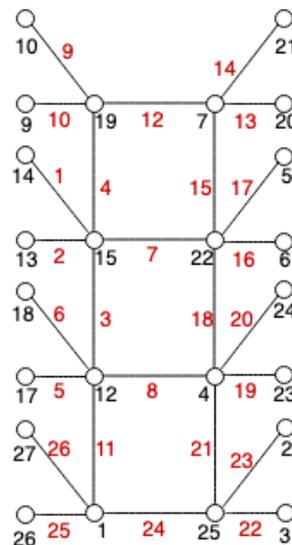
$$f'(u_2u_2^i) = |(r + 2) - (6r + 10 + i)| = 5r + 8 + i; i = 1, 2, \dots, r \tag{32}$$

$$f'(u_3u_3^i) = |(6r + 10) - (2r + 3 - i)| = 4r + 7 + i; i = 1, 2, \dots, r \tag{33}$$

$$f'(u_4u_4^i) = |(2r + 3) - (5r + 9 + i)| = 3r + 6 + i; i = 1, 2, \dots, r \tag{34}$$

Dari persamaan (17) – (34) diperoleh $\{f'(ab) | ab \in E(L_4 \odot \bar{K}_r)\} = \{1, 2, 3, |E|\}$ dan terlihat bahwa pelabelan f' yang diinduksi oleh pelabelan simpul f memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing sisi yang membentuk himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, |E|\}$ sehingga graf $L_4 \odot \bar{K}_r$ memiliki label yang berbeda untuk setiap sisinya. Terbukti bahwa f membentuk pelabelan $\hat{\rho}$ untuk graf $L_4 \odot \bar{K}_r$. ■

Pada Gambar 2 diberikan contoh pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf $L_4 \odot \bar{K}_2$.



Gambar 2. Pelabelan $\hat{\rho}$ pada Graf $L_4 \odot \bar{K}_2$

3. Kesimpulan

Graf $L_4 \odot \bar{K}_r$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$.

Daftar Pustaka:

- [1] Lopez, S.C. & Muntaner-Batle, F.A. 2016. Graceful, Harmonious and Magic Type Labelings Relations and Techniques. Spain : Springer.
- [2] Gallian, J. A. 2017. A Dynamic Survey of Graph Labelling. The Electronic Journal of Combinatorics. #DS6 pp.5
- [3] Haryono, M. 2012. Tesis: Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Tangga, Gabungan Graf Tangga, dan Graf Kaki Seribu. Tesis. Depok: Program Studi Magister Matematika FMIPA UI
- [4] Ramachandran, V., Sekar, C., & Nadu, T. 2014. Graceful labelling of supersubdivision of ladder. Internat. J. Math. Appl, 2(2), 29-36.
- [5] Amri, Z., & Harahap, T. H. 2017. Pelabelan Graceful dan Pelabelan Rho Topi Pada Graf 8-Bintang dengan C3 untuk n Genap. EduTech: Jurnal Ilmu Pendidikan dan Ilmu Sosial, 3(2)
- [6] Amri, Z., & Sugeng, K. A. 2020. Pelabelan Graceful, Skolem Graceful Dan Pelabelan Rho Topi Pada Graf Ilalang. *Indonesian Journal of Education and Mathematical Science/ Vol, 1(1)*
- [7] Amri, Z., Irvan, I., Maryanti, I., & Sumardi, H. 2021. Odd graceful labeling on the Ilalang graph ($S_n, 3$) it's variation. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1731, No. 1, p. 012030). IOP Publishing.
- [8] Giyarti, W., Sugeng, K. A., & Firmansah, F. 2021. The Graceful Labeling on W Graph. *Journal of Hunan University Natural Sciences, 48(9)*.
- [9] Jesintha, J. J., Subashini, K., & Beula, J. R. 2019. Graceful labeling of some new graphs. *Bull. Pure Appl. Sci. Sect. E Math. Stat. 38E(Special Issue)(2S)*, 60–64
- [10] Nurvazly, D.E., Chasanah, S.L., Wiranto, Ahmad. 2022. *Variations of Graceful Labelling of Subgraph of Millipede Graph*. [Online] Available at: http://repository.lppm.unila.ac.id/34787/1/17_FP_Revisi.pdf/ [Diakses pada 15 Februari 2022].