Jurnal Hasi Penelitian Dan Pengkajian Ilmiah Eksakta

JPPIE

Vol.01 No.01(2022) **e-issn :**
http://jurnal.unidha.ac.id/index.php/jppie https://doi.org/10.47233/jppie.v4i1.379

KONSEP SOLUSI LEMAH PADA HUKUM KEKEKALAN SKALAR NONLINEAR

Maya Sari Syahrul[1)], Dwi Sulistiowati[2)]
[12]Universitas Dharma Andalas, Jl. Sawahan no 103 Simpang Haru Padang
email: maya@unidha.ac.id, dwi.s@unidha.ac.id

The conservation law states that the cumulative of a quantity in a closed system will stay remain unless there is an inflow or outflow that goes through the boundary area of the system. The law models a consevative phenomena from variety physical quantity that exist in nature. This study is an analysis of descriptive studies on the discontinuities propagation that arise in the nonlinear scalar conservation law with discontinuation initial value problem, also known as the Riemann problem, which is done using characteristic methods. As discontinuity shows, discontinue solution concept from conservation law is introduced , which is referred to as a weak solution.

Keywords : *Conservation law, riemann problem, characteristic methods, weak solution*

Abstract

Hukum kekekalan menyatakan bahwa kumulatif dari suatu kuantitas yang berada dalam suatu sistem tertutup akan kekal kecuali adanya aliran masuk atau keluar yang melalui daerah batas sistem. Hukum kekekalan memodelkan berbagai fenomena kekekalan dari kuantitas fisik yang ada di alam. Penelitian ini merupakan analisis studi deskriptif mengenai perambatan diskontinuitas yang muncul pada hukum kekekalan skalar nonlinear dengan masalah nilai awal diskontinu, atau yang dikenal juga dengan istilah masalah Riemann, yang dilakukan dengan menggunakan metode karakteristik. Dengan terjadinya perambatan diskontinuitas tersebut, maka dikenalkan konsep solusi tak kontinu dari hukum kekekalan, yang disebut sebagai solusi lemah.

Kata kunci: Hukum kekekalan, masalah riemann, metode karakteristik, solusi lemah

PENDAHULUAN

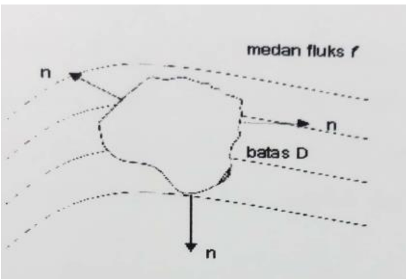
Banyak fenomena fisis di alam yang dimodelkan berdasarkan asumsi kekekalan, misalnya kekekalan energi, kekekalan massa, dan kekekalan momentum. Secara sederhana, hukum kekekalan menyatakan kuantitas dalam sebuah sistem tertutup tidak mengalami peluruhan atau pertumbuhan. Perubahan kumulatif hanya terjadi jika sistem tak tertutup, dimana terjadi aliran kuantitas yang melalui batas sistem tersebut[1,4].

Artikel ini membahas hukum kekekalan skalar dengaan kuantitas yang diamati bernilai real. Untuk kasus persamaan hukum kekekalan dengan laju perubahan bernilai konstan, maka persamaan ini disebut persamaan hukum kekekalan skalar linear. Lebih lanjut apabila laju perubahan bernilai tak konstan, maka persamaan ini menjadi persamaan hukum kekekalan skalar linear[2].

Solusi persamaan ini dapat diamati dengan menggunakan metode karateristik. Kurva karakteristik berupa garis dan solusi untuk masalah persamaan hukum kekekalan linear akan konstan sepanjang karakteristik dan akan diperoleh garis karakteristik yang sejajar. Sedangkan untuk kasus nonlinear, garis karakteristik tidak akan saling sejajar, sehingga akan muncul berbagai macam kondisi garis karakteristik. Ada kemungkinan garis karakteristik saling berpotongan dan kemungkinan lainnya adalah terdapat daerah yang tidak dilalui garis karakteristik[5]. Fenomena garis karakteristik saling berpotongan akan mengakibatkan peritiwa katastrofi gradien, yang merupakan waktu patah saat robohnya solusi[3]. Metode karakteristik hanya bisa mengkonstruksi solusi dari hukum kekekalan sebelum terjadinya waktu patah. Akibatnya solusi akan diperluas dengan mengizinkan solusi menjadi fungsi diskontinu yang mulus bagian demi bagian. Sehingga dalam hal ini dikenalkan konsep solusi tak kontinu dari hukum kekekalan yang disebut sebagai solusi lemah[6].

METODE PENELITIAN

Hukum kekekalan menyatakan bahwa laju perubahan kumulatif suatu kuantitas dalam system tertutup bergantung pada fluks (*F*) keluar atau masuk melalui batas daerah *D* dalam arah normal. Dalam notasi matematika hukum kekekalan dinyatakan sebagai berikut:



Jika u bernilai real, fenomena ini disebut hukum kekekalan skalar**.** Misalkan suatu daerah tertutup di $\mathbb{R}^n$ (biasanya *n=2* atau *n=3*) berada pada suatu medan fluks *f*. Misalkan *u* menyatakan kerapatan suatu kuantitas yang termuat di dalam daerah tersebut. Dengan mengasumsikan daerah tersebut memiliki batas yang mulus, diperoleh persamaan hukum kekekalan

$$u + div\, f(u) = 0.$$

Jika u bernilai real, fenomena ini disebut hukum kekekalan skalar. Dengan aturan rantai maka persamaan (1) bisa dituliskan sebagai berikut

$$u_t + f'(u)(u)_x = 0, \qquad (1)$$

yang disebut juga sebagai hukum kekekalan skalar.

Hukum Kekekalan Skalar Linear

Pandang hukum kekekalan satu dimensi dengan nilai awal berikut:

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

yang dapat ditulis sebagai $u_t + f'(u)u_x = 0$. Jika $f'(u) = c$, dengan c suatu konstanta, maka diperoleh hukum kekekalan linear

$$u_t + cu_x = 0. \qquad (2)$$

Solusi dari masalah linear ini adalah

$$u(x,t) = u_0(x - ct), \qquad (3)$$

artinya profil awal $u_0(x)$ merambat ke kanan dengan kecepatan *c* tanpa berubah bentuk. Solusi tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan metode karakteristik. Garis karakteristik adalah kurva di bidang *xt* yang merupakan solusi dari persamaan dierensial $\frac{dx}{dt} = f'(u)$. Kurva di bidang xt dimulai dari titik, dengan laju perubahan nilai *u(x(t),t)* terhadap waktu adalah *d/dt u(x(t),t)*.

Lebih lanjut dengan menggunakan aturan rantai maka diperoleh:

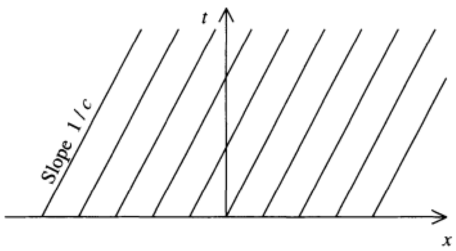
$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_t + u_x \frac{d}{dt}x$$

Perhatikan bahwa jika *dx/dt=c*, maka diperoleh

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_t + cu_x$$

$$= 0$$

Hal ini menyatakan bahwa nilai u(x,t) konstan sepanjang kurva tesebut, yang mengakibatkan nilai u di setiap titik di kurva memiliki nilai yang sama dengan nilai pada titik awal (x0,0) yaitu $u(x,0) = u_0(x)$. Dengan memperhatikan bahwa kurva x(t) ditentukan oleh dx/dt=c dan titik x(0)=x0, sehingga diperoleh persamaan kurva x(t)= ct+x0 yang merupakan persamaan kurva karakteristik atau disebut juga sebagai karakteristik dari hukum kekekalan linear.



Gambar 1.Garis karakteristik sejajar

Hukum Kekekalan Skalar Nonlinear

Misalkan *f'(u)=c(u)* pada persamaan (1), dimana kecepatan dari karakteristik, yaitu *c*, bergantung kepada nilai *u(x,t)*. Maka persamaan tersebut menjadi persamaan hukum kekekalan nonlinear:

$$u_t + c(u)u_x = 0, -\infty < x < \infty, t > 0.$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

Serupa dengan hukum kekekalan linear, kurva karakteristik dari permasalahan nonlinear diperoleh dengan menyelesaikan persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{c(u(x,t))}\,, \mathrm{x}(0) = x_0.$$

Nilai u(x,t) pada persamaan ini juga konstan sepanjang karakteristik, yaitu:

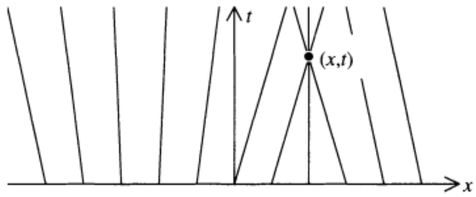
$$\frac{d}{dt}\mathrm{u(x(t),t)} = \mathrm{u_t}(x(t),t) + \frac{dx}{dt}\mathrm{u_x}(x(t),t)$$

$$= \mathrm{u_t}(x(t),t)c(\mathrm{u(x,t)},t)\mathrm{u_x}(x(t),t)$$

=0

nilai *u* pada tiap titik di sepanjang kurva akan sama dengan nilai *u* di titik *x(0)=x0*. Dengan mensubstitusikan nilai awal pada persamaan maka diperoleh

$$u(x,t) = u(x_0,0) = u_0(x_0)$$



Gambar 2.Garis karakteristik saling berpotongan

Serupa dengan persamaan linear, kurva karakteristik pada permasalahan nonlinear juga berupa garis. Namun kemiringan setiap garis bergantung kepada *u_0 (x_0)*, sehingga memiliki kemiringan berbeda-beda. Ada 2 kemungkinan kasus yg terjadi pada permasalahan nonlinear, pertama kemungkinan adanya 2 atau lebih garis karakteristik yang berpotongan. Kasus selanjutnya aka ada daerah yang tidak memiliki garis karakteristik. Pada kasus karakteristik yang berpotongan, hal ini akan menimbulkan terjadinya perambatan diskontinu pada hukum kekekalan skalar nonlinear sehingga dikenalkan konsep solusi lemah

HASIL DAN PEMBAHASAN

Solusi Lemah dari Hukum Kekekalan Skalar Nonlinear

Solusi sebuah persamaan diferensial orde *n* adalah fungsi yang memiliki turunan orde *n* yang kontinu. Oleh karena itu gelombang kejut tidak dapat menjadi solusi persamaan diferensial disebabkan ketakkontinuannya. Akibatnya diperlukan bentuk alternatif lain dari hukum kekekalan, yaitu mengalikannya dengan suatu fungsi dan melakukan integral parsial. Misalkan u memenuhi hukum kekekalan di daerah $[a,b]\times[0,T]$. Misalkan C_0^1 adalah koleksi fungsi yang memiliki turunan pertama yang kontinu pada persegi panjang dan bernilai nol pada suatu lingkungan dari sisi-sisi persegi panjang, yaitu $x=a$, $x=b$ *dan* $t=T$. Dengan mengalikan persamaan hukum kekekalan dengan dan kemudian mengintegrasikannya, maka diperoleh:

$$\int_a^b \int_0^T (u_t + f_x)\varphi \, dtdx$$

$$= \int_0^T \int_a^{\Gamma} (u_t + f_x)\, \varphi \, dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_{\Gamma}^{b} (u_t + f_x)\, \varphi \, dxdt = 0.$$

Dengan melakukan integral parsial, maka integral pada suku pertama dan kedua berturut-turut menjadi:

$$\int_0^T \int_a^{\Gamma} (u_t + f_x)\varphi \, dxdt$$

$$= -\int_a^{\Gamma} u_0 \varphi \, dx$$

$$- \int_0^T \int_a^{\Gamma} (u\varphi_t$$

$$+ f(u)\varphi_x)\, dxdt$$

Dengan demikian diperoleh

$$\int \int_{t\geq 0} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x)\, dxdt$$

$$+ \int_{t=0} u_0 \, \varphi \, dx = 0.$$

Persamaan di atas disebut bentuk lemah dari hukum kekekalan. Suatu fungsi $u(x,t)$ dikatakan solusi lemah dari hukum kekekalan jika memenuhi persamaan untuk sebarang fungsi uji $\phi \in C_0^1$.

SIMPULAN

Dengan adanya konsep solusi lemah dari hukum kekekalan scalar nonlinear, maka solusi u(x,t) dapat dieproleh pada saat terjadinya perambatan diskontinuitas khususnya pada kasus dimana terjadinya perpotongan garis karakteristik. Oleh karena itu penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menyelesaikan permasalahan diskontinuitas yang terjadi, yang nantinya akan memperoleh solusi gelombang kejut.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada LPPM Universitas Dharma Andalas atas pendanaan yang diberikan selama penelitian ini berlangsung. Tak lupa penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Yudi Soeharyadi atas bantuan dan bimbingan selama penulis mengerjakan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1]Chorin, A.J, Marsden, J.E. (1990). A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer-Verla.

[2]Leveque, R.J. (1992). Numerical Methods for Conservation Laws, Birkuser-Verlag.

[3]Knobel, R. (2000). An Introduction to Mathematical Theory of Waves, Student Mathematical Library.

[4]Strauss,W.A. (1992). Partial Differrential Equations: An Introduction, John Wiley-Son,1992.

[5]Soeharyadi,Y. (2004). Regulalaritas Masalah Hiperbolik Orde Satu Tak Linear, Pros. Konferensi Nasional Matematika XII; 62-75

[6]Syahrul, M.S. 2019. Perambatan Diskontinuitas pada Hukum Kekekalan Skalar. SEMANDIK. 5 Oktober 2019, Padang, Indonesia. 46-53.