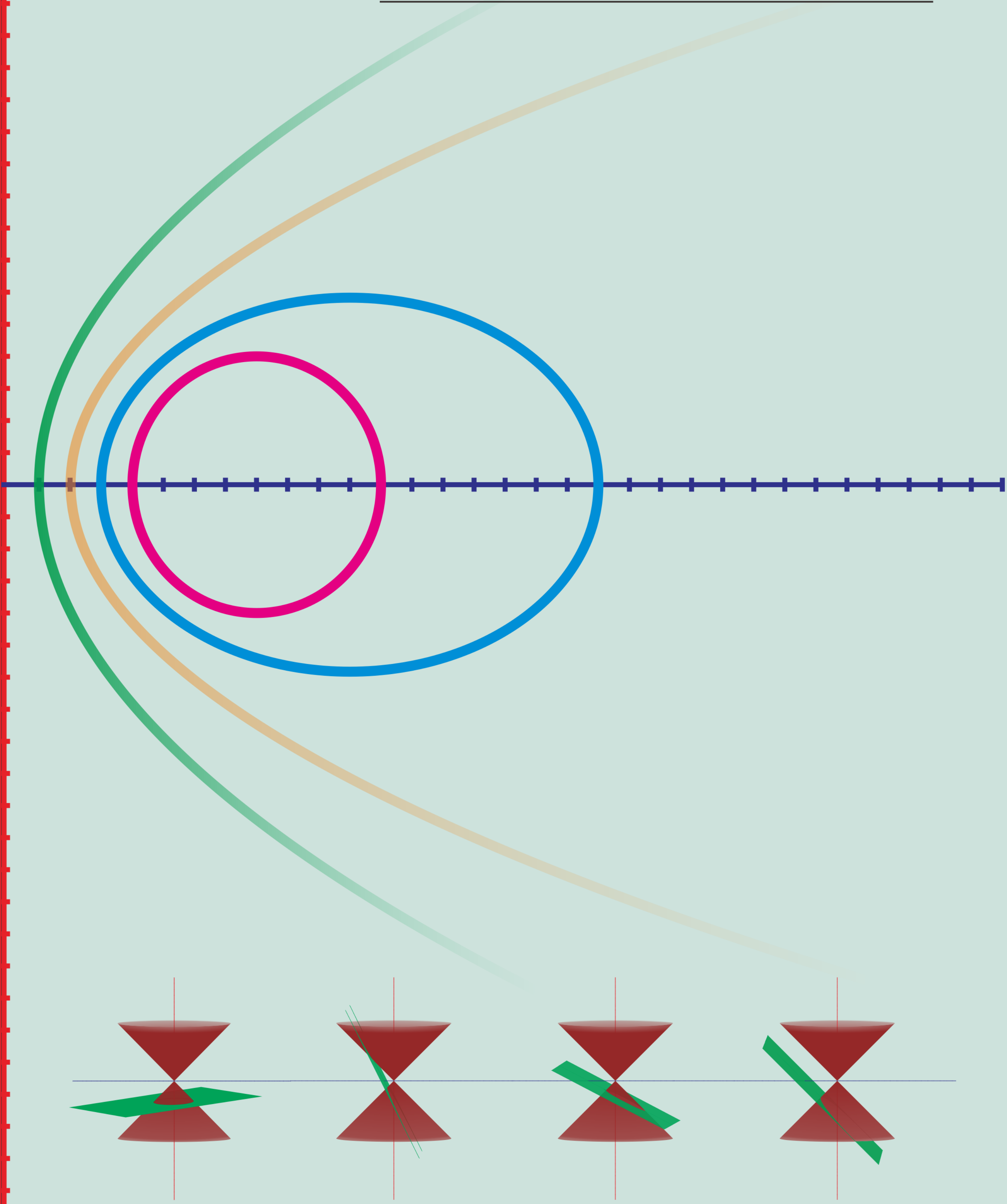
RAHAYU MALINI P.

IDRIS HARTA

IRISAN KERUCUT

PENGAYAAN MATEMATIKA SMA



RAHAYU MALINI P.

IRISAN KERUCUT - PENGAYAAN MATEMATIKA SMA

KATA PENGANTAR

Peruntukan buku.

Penilaian dalam proses pembelajaran menggunakan acuan kriteria yaitu penilaian yang membandingkan capaian peserta didik dengan kriteria kompetensi yang ditetapkan. Kompetensi yang ditetapkan merupakan ketuntasan belajar minimal yang disebut dengan kriteria ketuntasan minimal (KKM) dan ditentukan oleh satuan pendidikan. Berdasarkan Permendikbud No. 23 Tahun 2016 tentang Standar Penilaian dikatakan bahwa peserta didik yang belum mencapai KKM harus mengikuti pembelajaran remidi. Selain itu dalam panduan penilaian Sekolah Menengah Atas tahun 2017 dikatakan bahwa tindak lanjut hasil penilaian berupa program remidial bagi peserta didik dengan pencapaian kompetensi di bawah ketuntasan dan program pengayaan bagi peserta didik yang telah memenuhi ketuntasan.

Program pengayaan merupakan pendalaman atau perluasan dari kompetensi yang dipelajari. Buku pengayaan matematika ini digunakan sebagai materi pengayaan dari Kompetensi Dasar No. 3.3 dan 3.4 tentang lingkaran yang dipelajari di sekolah (Permendikbud No. 24 Tahun 2016). Sampai saat ini buku yang dikhususkan untuk program pengayaan masih kurang sehingga buku pengayaan materi irisan kerucut ini dapat dijadikan salah satu buku pengayaan bagi peserta didik dan memfasilitasi terlaksananya program pengayaan.

Ruang lingkup materi

Materi yang disajikan dalam buku pengayaan ini yaitu kurva hasil irisan kerucut terdiri dari parabola, elips, dan hiperbola. Materi ini disajikan untuk memberikan pengayaan atau tambahan pengetahuan kepada peserta didik yang telah atau sedang mempelajari materi lingkaran sehingga materi lingkaran yang merupakan salah satu kurva hasil irisan kerucut tidak dibahas lebih lanjut pada buku ini. Setiap bab memuat tentang pengertian dan cara melukis kurva, unsur-unsur, persamaan umum, dan aplikasi materi dalam kehidupan.

Fitur-fitur Buku

Buku ini disusun dengan menyajikan beberapa kegiatan yang dapat dilakukan oleh siswa. Salah satu tujuan dari beberapa fitur dalam buku diantaranya untuk mendorong siswa lebih berperan aktif dalam proses pembelajaran. Beberapa fitur dalam buku pengayaan ini membutuhkan bimbingan dan arahan dari guru untuk mengkonfirmasi hasil kegiatan dan analisis yang dilakukan oleh siswa.

Berikut beberapa fitur yang dapat ditemukan dalam buku pengayaan dan tujuan yang diharapkan dengan tersedianya fitur tersebut.

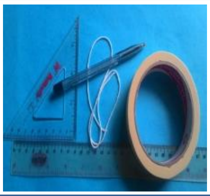
Advance Organizer

Aplikasi materi dalam kehidupan yang dapat dijumpai atau sudah diketahui oleh siswa disajikan pada setiap awal bab untuk memberikan gambaran tentang materi yang akan dipelajari.

Geogebra

Aplikasi geogebra digunakan untuk mempermudah siswa mengetahui dan memahami berbagai kedudukan bidang dalam irisan ketucut serta hasil yang diperolehnya.

Kegiatan Siswa



Kegiatan-kegiatan yang bisa dilakukan oleh siswa disajikan untuk mendorong siswa lebih berperan aktif dalam proses pembelajaran.

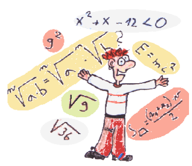
Diskusi

Kegiatan diskusi difasilitasi sebagai sarana bagi siswa saling bertukar pendapat tentang materi atau kegiatan yang telah dilakukan.

Aplikasi

Beberapa aplikasi materi dalam kehidupan disajikan sebagai tambahan pengetahuan bagi siswa. Aplikasi diantaranya dalam bidang kesehatan, astronomi, olahraga, arsitek, dan lainnya.

Latihan



Latihan berupa soal pemahaman, penalaran, dan penerapan. Soal pemahaman digunakan untuk melatih pengetahuan siswa terhadap materi. Soal penerapan untuk melatih dalam menggunakan prinsip, rumus, atau metode yang diketahuinya pada situasi nyata. Soal penalaran untuk melatih siswa dalam menganalisis suatu permasalahan.

Rangkuman

Rangkuman menyajikan poin-poin penting tentang materi yang dipelajari.

Jurnal Belajar

Jurnal belajar siswa disediakan sebagai sarana bagi siswa menilai sejauh mana pemahaman yang diperolehnya, mengutarakan subbab yang mudah dan sulit untuk

Evaluasi

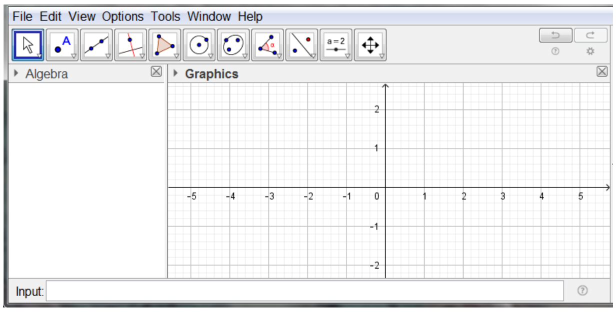
Soal evaluasi pada akhir tiap bab disajikan dengan dilengkapi beberapa soal UN, OSN, SBMPTN, dan UM.

Tutorial Geogebra (Irisan Kerucut)

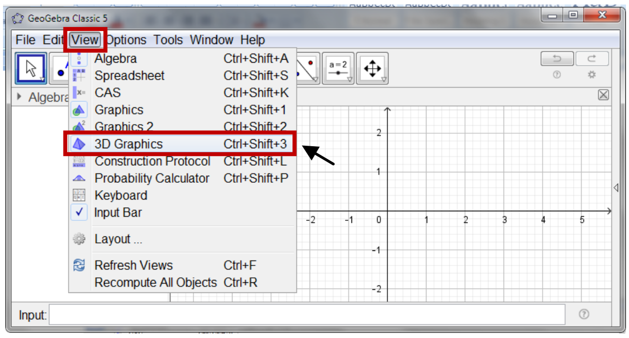
Geogebra yang merupakan singkatan dari *geometry* (geometri) dan *algebra* (aljabar) adalah salah satu aplikasi yang dapat digunakan oleh guru untuk menunjang proses pembelajaran. Geogebra dapat digunakan pada berbagai materi yang berkaitan dengan geometri dan aljabar. Melalui geogebra kita dapat mengkonstruksi titik, ruas garis, garis, lingkaran, irisan kerucut, dan lainnya. Selain itu dapat juga digunakan sebagai alat untuk membuktikan suatu ide atau definisi. Aplikasi geogebra dapat diunduh secara bebas di www.geogebra.org.

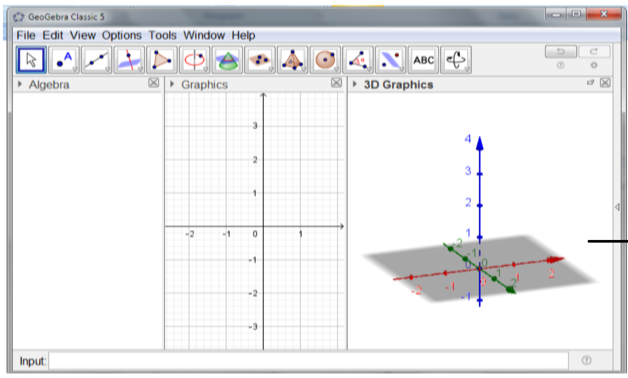
Berikut merupakan cara mengkonstruksi irisan kerucut dan mengetahui beberapa hasil irisan kerucut menggunakan aplikasi Geogebra.

1. Buka aplikasi Geogebra sehingga menyajikan tampilan awal seperti berikut.



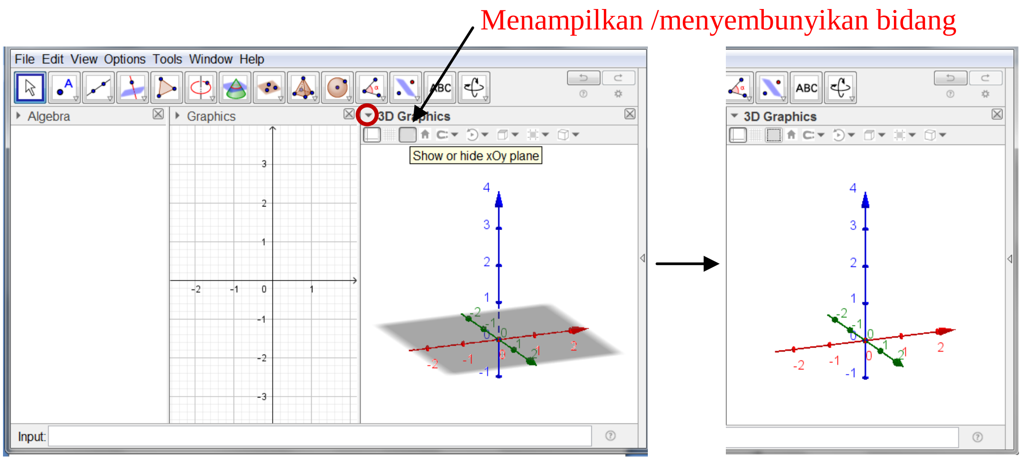
2. Pilih menu "*View*" → "*3D Graphics*" untuk tampilan 3 dimensi.



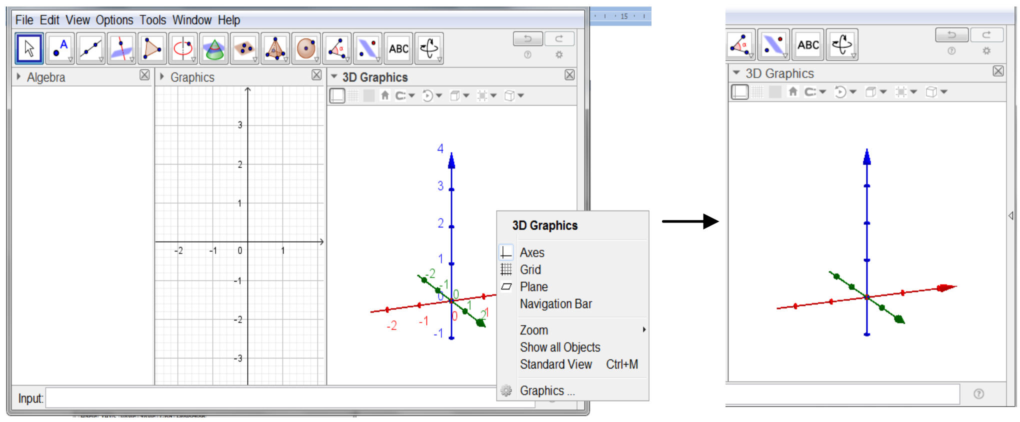


Grafik 3 dimensi

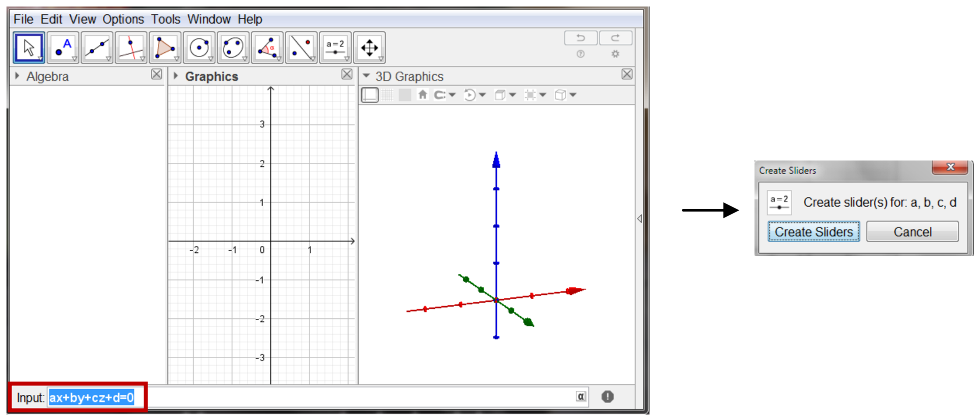
Pilih panah di samping tulisan "*3D Graphics*" untuk menampilkan beberapa pilihan menu.

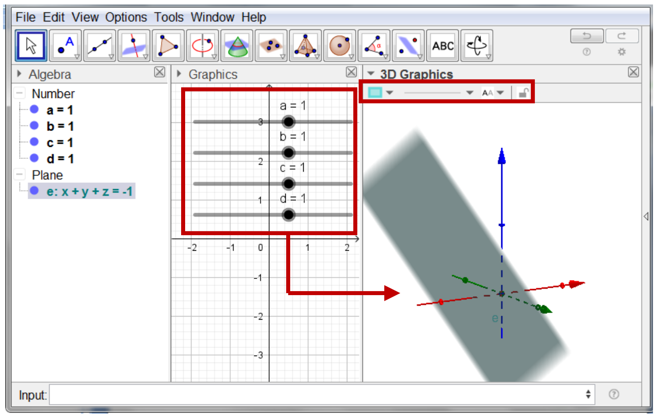


Klik kanan pada kotak "*3D Graphics*" sehingga muncul kotak dialog yang terdapat beberapa menu pilihan. Pilih "*graphics*" untuk menyembunyikan angka pada sumbu x, y, dan z.



3. Pada menu input ketik $ax + by + cz + d = 0$ maka akan muncul kotak "*create slider*". Pilih "*create slider*" sehingga muncul 4 buah slider.

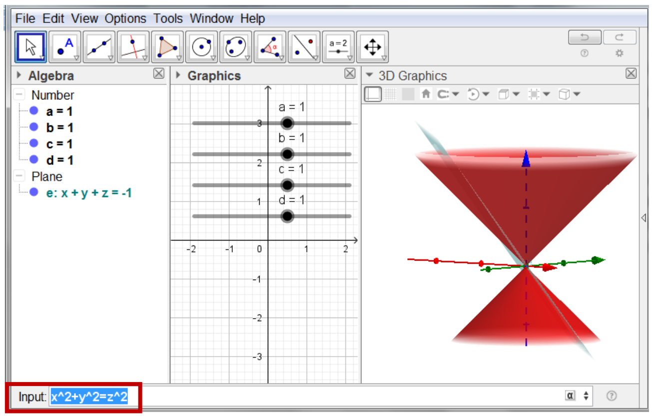




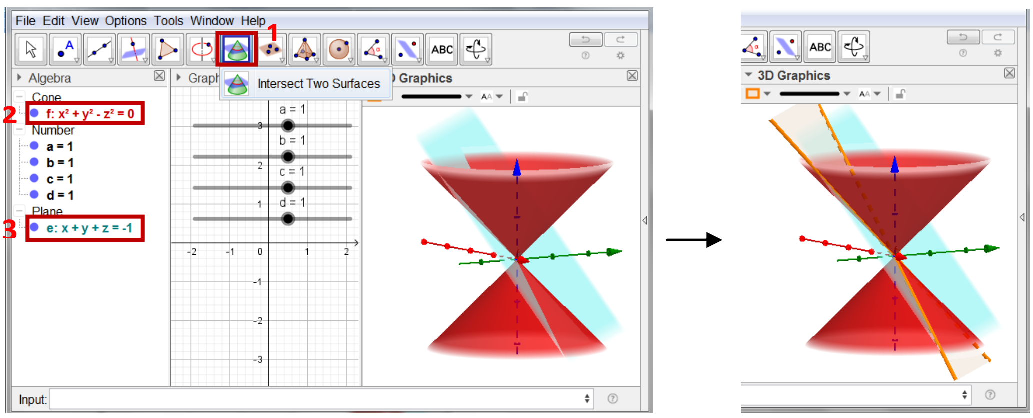
Slider digunakan untuk mengubah posisi bidang yang terlihat pada 3D Graphics.

Mengubah warna bidang dan lainnya dapat dilakukan dengan menklik bidang sehingga muncul beberapa menu pilihan.

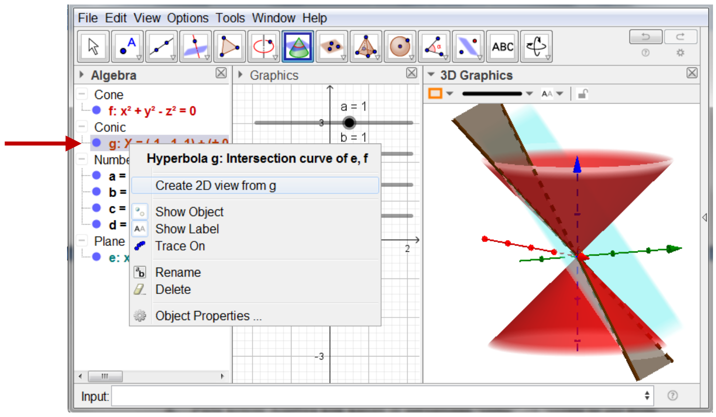
4. Pada menu input ketik persamaan umum kerucut yaitu $x^2 + y^2 = z^2$ sehingga pada tampilan "*3D Graphics*" terbentuk kerucut.

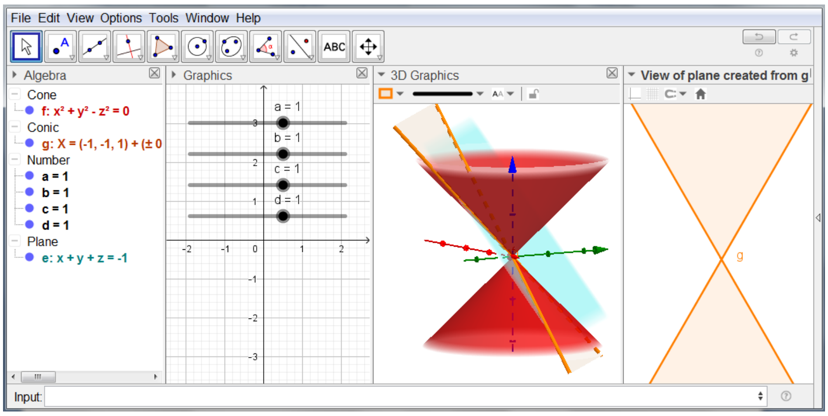


5. Melihat perpotongan antara bidang terhadap kerucut dapat dilakukan dengan memilih "*Intersect Two Surfaces*" pada kolom menu, dilanjutkan dengan mengklik persamaan "*cone*" dan "*plane*" pada kolom Algebra.

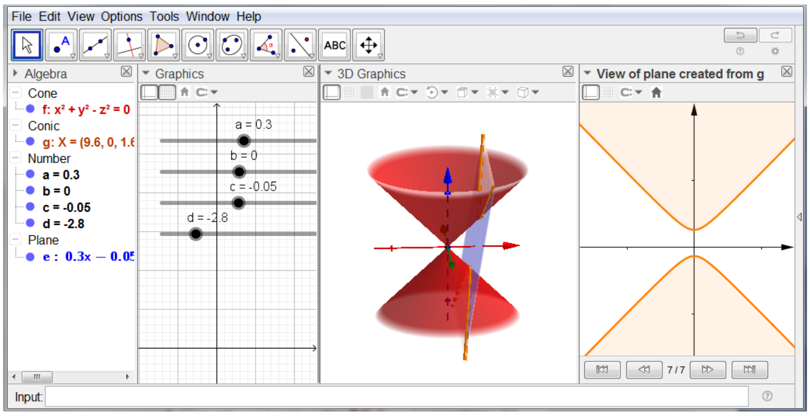


6. Pada kolom Algebra klik kanan di persamaan “*conic*” → “*create to 2D from g*” sehingga muncul hasil irisan kerucut dalam bentuk 2 dimensi.

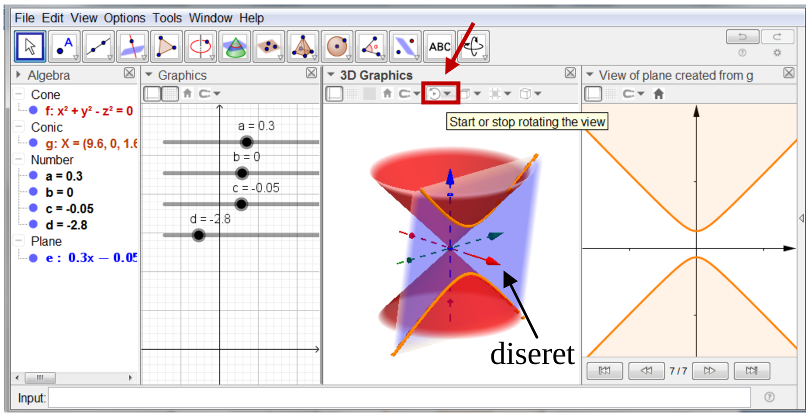


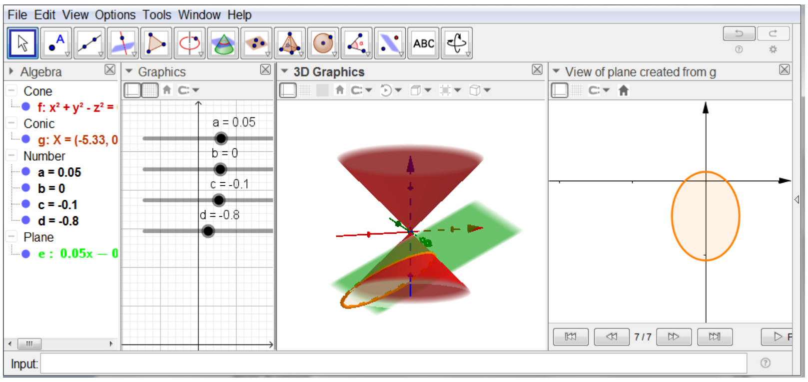


7. Mengubah posisi atau kedudukan bidang yang memotong kerucut yaitu dengan mengubah atau menggeser 4 buah slider sehingga posisi bidang sesuai dengan yang diinginkan.



Kerucut pada kolom "*3D Graphics*" dapat diputar dengan memilih menu "*start or stop rotating the view*" atau dengan menyeret sumbu kerucut.





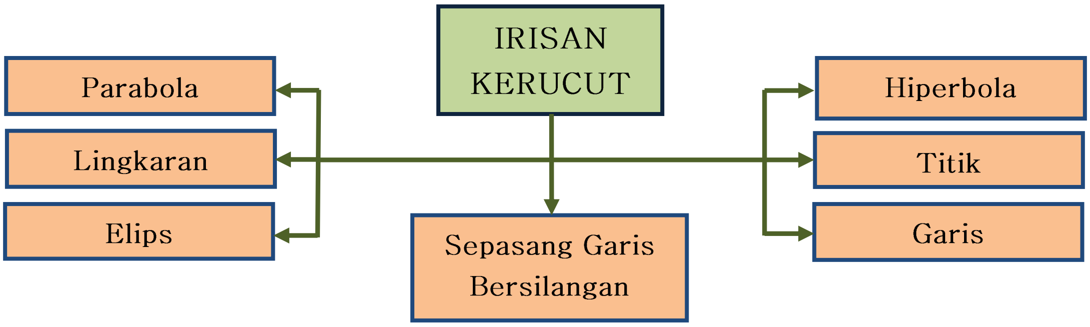
Demikian tutorial membuat irisan kerucut dengan menggunakan Geogebra. Tutorial yang disajikan merupakan langkah-langkah utama yang diperlukan dalam membuat irisan kerucut. Masih banyak fungsi-fungsi menu lainnya pada Geogebra yang tidak dijelaskan secara rinci. Dibutuhkan banyak latihan untuk lebih memahami lebih banyak tentang fungsi menu-menu yang terdapat pada Geogebra.

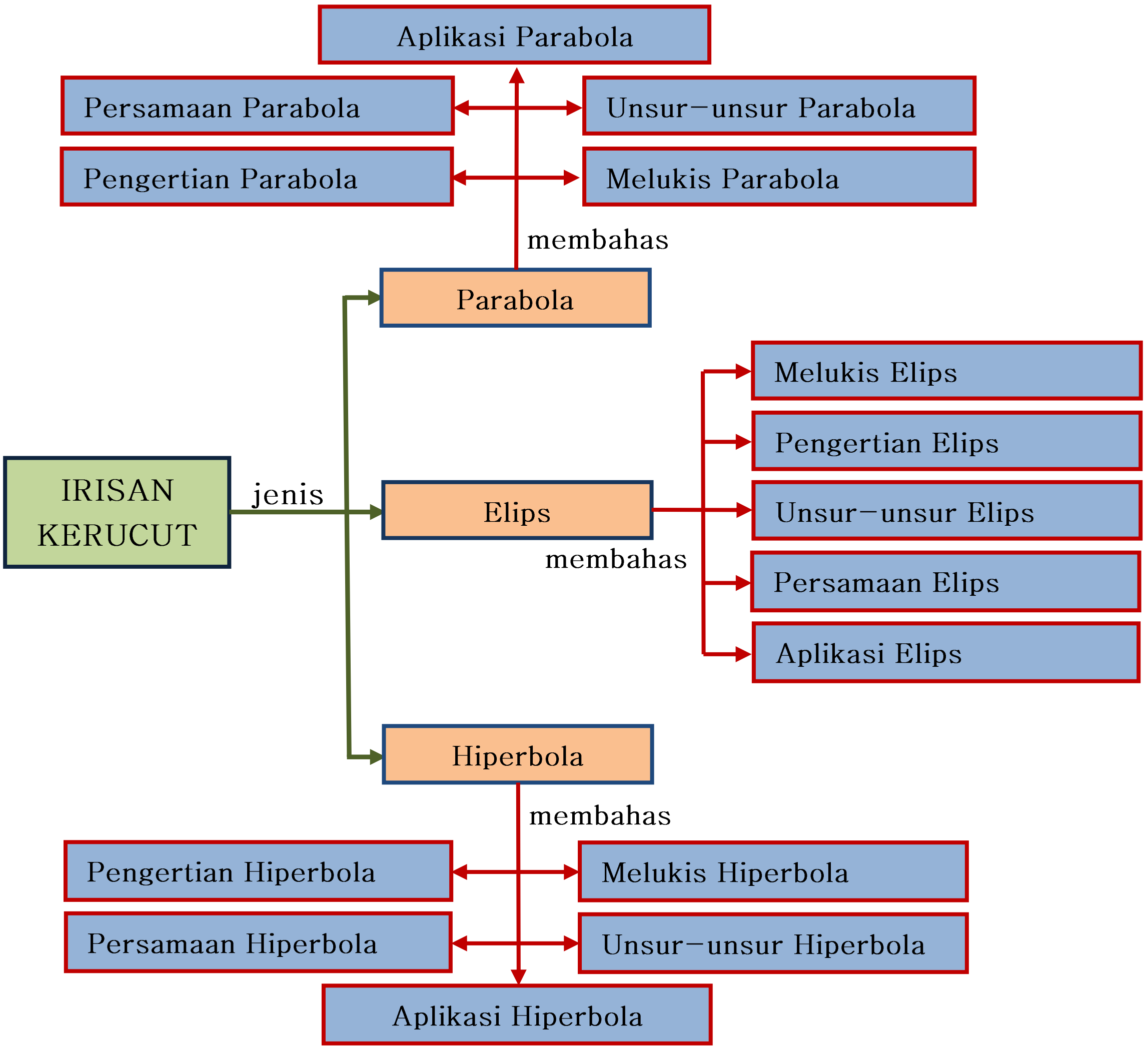
DAFTAR ISI

Penjabaran KD Materi Irisan Kerucut
Matematika SMA Peminatan IPA
(Berdasarkan Permendikbud No. 59 Tahun 2013)

<table>
<tr><th colspan="2">Kompetensi Dasar</th><th>Indikator</th></tr>
<tr><td>3.3</td><td>Menganalisis konsep sifat-sifat irisan kerucut (parabola, hiperbola, dan elips) dan menerapkannya dalam pembuktian dan menyelesaikan masalah matematika.</td><td>▪ Menggambar kurva parabola, hiperbola, dan elips.
▪ Mengidentifikasi unsur-unsur pembentuk parabola, hiperbola, dan elips.
▪ Mengidentifikasi sifat-sifat parabola, hiperbola, dan elips.</td></tr>
<tr><td>3.4</td><td>Mendeskripsikan hubungan garis direktris, titik fokus, dan titik-titik pada kurva parabola, hiperbola, dan elips dan menerapkannya dalam pemecahan masalah.</td><td>▪ Mendeskripsikan sifat-sifat fokus dan direktriks pada parabola, hiperbola, dan elips.
▪ Merumuskan persamaan umum parabola, hiperbola, dan elips.</td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>Menganalisis data terkait unsur-unsur parabola, hiperbola, dan elips untuk menggambar kurva dan mengidentifikasi sifat-sifatnya.</td><td>▪ Mengidentifikasi unsur-unsur pembentuk parabola, hiperbola, dan elips berdasarkan data yang diberikan.
▪ Menggambar kurva parabola, hiperbola, dan elips berdasarkan data yang diberikan.</td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>Mengolah data dan menganalisis model matematika dengan melakukan manipulasi aljabar untuk menyelesaikan masalah nyata yang berkaitan dengan persamaan parabola atau hiperbola atau elips</td><td>▪ Mengolah data untuk menyelesaikan masalah nyata yang berkaitan dengan parabola, hiperbola, dan elips.
▪ Menganalisis data untuk menyelesaikan masalah nyata yang berkaitan dengan parabola, hiperbola, dan elips.</td></tr>
<tr><td>4.4</td><td>Menyajikan objek-objek nyata sebagai gambaran model parabola, hiperbola, dan elips dan merancang masalah serta menyelesaikannya dengan menerapkan konsep dan sifat-sifat irisan kerucut yang telah dibuktikan kebenarannya.</td><td>▪ Menyajikan objek-objek nyata parabola, hiperbola, dan elips dalam kehidupan sehari-hari.
▪ Menyajikan aplikasi konsep parabola, hiperbola, dan elips dalam kehidupan sehari-hari.
▪ Menyesaikan masalah dengan menerapkan konsep dan sifat parabola, hiperbola, dan elips.</td></tr>
</table>

PETA KONSEP


IRISAN KERUCUT
Parabola
Lingkaran
Elips
Sepasang Garis Bersilangan
Hiperbola
Titik
Garis


Aplikasi Parabola
Persamaan Parabola
Unsur−unsur Parabola
Pengertian Parabola
Melukis Parabola
membahas
Parabola
IRISAN KERUCUT
jenis
Elips
membahas
Melukis Elips
Pengertian Elips
Unsur−unsur Elips
Persamaan Elips
Aplikasi Elips
Hiperbola
membahas
Pengertian Hiperbola
Melukis Hiperbola
Persamaan Hiperbola
Unsur−unsur Hiperbola
Aplikasi Hiperbola

1 PARABOLA

Pembahasan materi parabola diantaranya:

- ✓ Melukis parabola
- ✓ Definisi parabola
- ✓ Unsur-unsur parabola
- ✓ Persamaan parabola berpuncak di $(0,0)$
- ✓ Persamaan parabola berpuncak di (h, k)

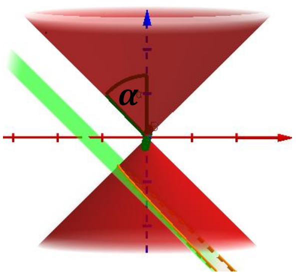
Dalam kehidupan sehari-hari, parabola merujuk kepada sebuah antena yang sering digunakan sebagai alat untuk menerima siaran televisi. Antena parabola digunakan untuk mentransmisikan berbagai macam data seperti sinyal telepon, radio, televisi, dan beragam data lainnya melalui gelombang elektromagnetik. Masyarakat umumnya lebih mengenal antena parabola sebagai alat untuk menerima siaran televisi satelit. Selain kualitas gambar dan suara yang lebih baik daripada antena televisi biasa, antena parabola juga mampu menyiarkan acara televisi yang lebih beragam.

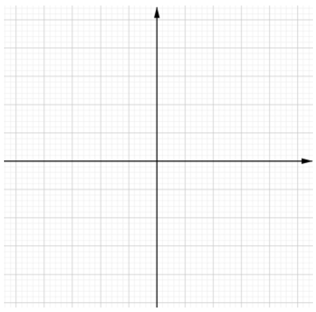
Mengapa antena tersebut disebut antena parabola? Mengapa bentuk antena didesain seperti piringan? Mengapa alat sederhana seperti tutup panci dan wajan bekas bisa dijadikan alternatif alat penangkap sinyal televisi? Beberapa pertanyaan tersebut akan terjawab dengan mempelajari pembahasan selanjutnya mengenai salah satu kurva hasil irisan kerucut yaitu kurva parabola.

Kerucut merupakan sebuah bangun ruang dengan sisi lengkung. Apabila sebuah bidang memotong kerucut dengan sudut perpotongan yang berbeda terhadap sumbu simetri kerucut maka hasil perpotongannya akan membentuk beberapa kurva. Beberapa kurva yang terbentuk disebut irisan kerucut (*conic sections*). Lakukan kegiatan berikut untuk mengetahui berbagai macam hasil perpotongan yang terbentuk berdasarkan perpotongan sebuah bidang dengan kerucut.

Kegiatan 1.1

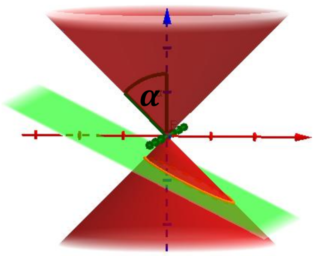
1. Menggunakan aplikasi Geogebra, perhatikan hasil perpotongan sebuah bidang dengan kerucut.
2. Potong kerucut menggunakan sebuah bidang dengan arah perpotongan yang berbeda dan buatlah sketsa hasil perpotongan.
   a. Bidang memotong sejajar garis pelukis atau kemiringan bidang terhadap sumbu simetri kerucut sebesar sudut α dan tanpa melalui titik puncak kerucut.

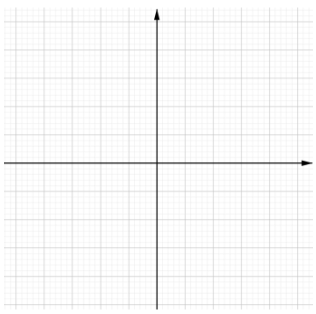




Gambar 1.1

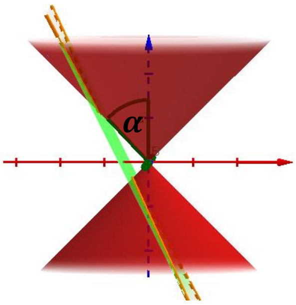
   b. Bidang memotong dengan kemiringan terhadap sumbu simetri kerucut lebih besar dari sudut α dan tanpa melalui titik puncak kerucut.

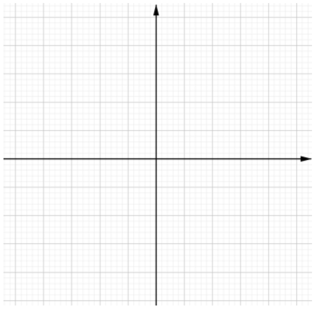




Gambar 1.2

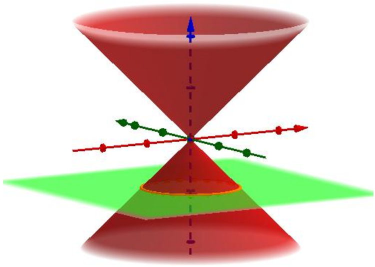
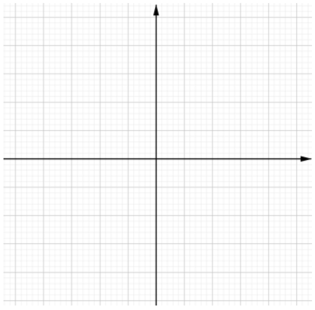
c. Bidang memotong dengan kemiringan terhadap sumbu simetri kerucut lebih kecil dari sudut α dan tanpa melalui titik puncak kerucut.





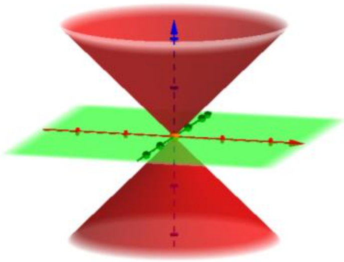
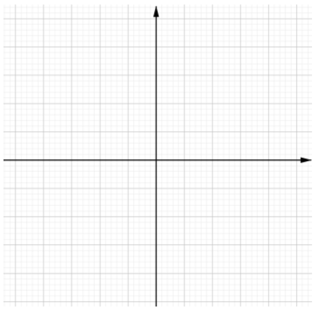
Gambar 1.3

d. Bidang memotong tegak lurus sumbu simetri dan tanpa melalui titik puncak kerucut.

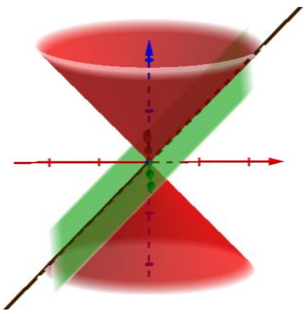
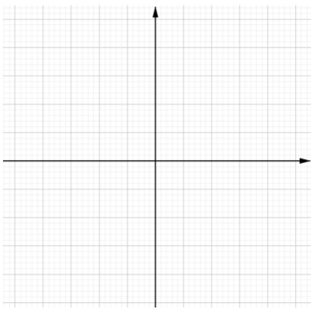
Gambar 1.4

e. Bidang memotong hanya di puncak kerucut.

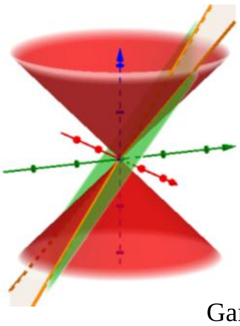
Gambar 1.5

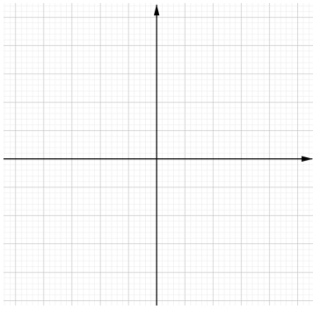
f. Bidang menyinggung kerucut .

Gambar 1.6

g. Bidang memotong dan melalui titik puncak kerucut.





Gambar 1.7

3. Selain menggunakan aplikasi geogebra, gunakan model kerucut untuk menggambarkan secara fisik berbagai jenis perpotongan pada kerucut.

Diskusikan

Berdasarkan kegiatan sebelumnya, tuliskan hasil perpotongan sebuah bidang dengan kerucut.

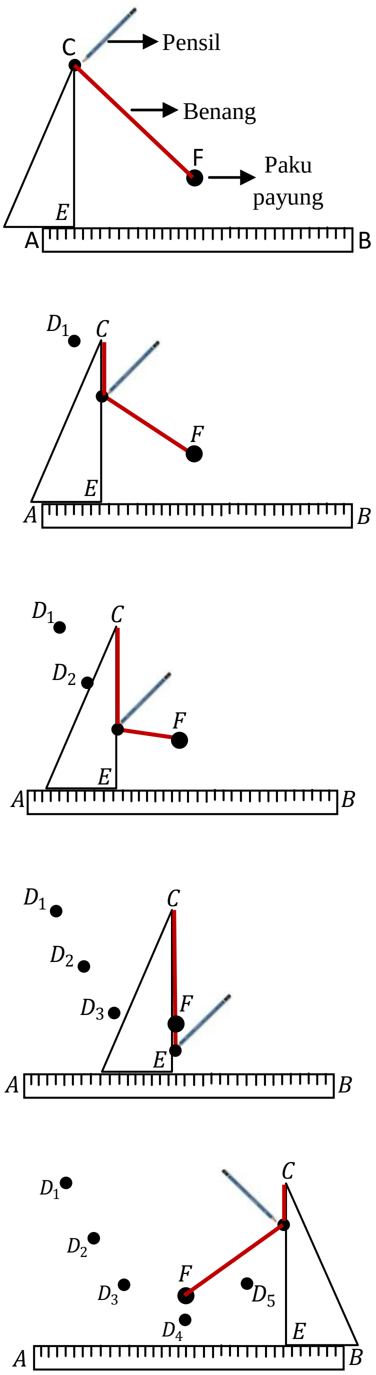
Tabel 1.1 Hasil perpotongan kerucut

Arah Perpotongan	Hasil Perpotongan
1. Bidang memotong sejajar garis pelukis dan tanpa melalui titik puncak kerucut	
2. Bidang memotong dengan kemiringan terhadap sumbu simetri kerucut lebih besar dari sudut α dan tanpa melalui titik puncak kerucut.	
3. Bidang memotong dengan kemiringan terhadap sumbu simetri kerucut lebih kecil dari sudut α dan tanpa melalui titik puncak kerucut.	
4. Bidang tegak lurus sumbu simetri dan tanpa melalui titik puncak kerucut.	
5. Bidang memotong hanya di puncak kerucut.	
6. Bidang menyinggung kerucut.	
7. Bidang memotong dan melalui titik puncak kerucut.	

Kurva yang terbentuk berdasarkan perpotongan kerucut oleh sebuah bidang akan dijelaskan pada pembahasan selanjutnya. Pembahasan meliputi parabola, elips, dan hiperbola. Salah satu kurva yaitu lingkaran tidak akan dibahas dengan asumsi telah banyak dibahas dalam berbagai buku wajib matematika.

a. Melukis dan Pengertian Parabola

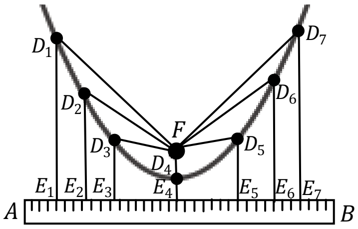
Parabola merupakan salah satu kurva yang terbentuk oleh perpotongan sebuah bidang terhadap kerucut. Kurva berbentuk parabola diperoleh ketika bidang memotong sejajar garis pelukis kerucut (Gambar 1.1). Ikuti langkah-langkah pada kegiatan berikut untuk mengetahui cara melukis parabola.



Kegiatan 1.2

Melukis sebuah parabola dapat dilakukan dengan menggunakan peralatan yang sederhana.

1. Sediakan 2 penggaris (lurus dan segitiga siku-siku), benang, paku payung, pensil, dan perekat.
2. Tentukan dua titik yaitu A dan B kemudian tarik garis antara kedua titik tersebut.
3. Letakkan penggaris di sepanjang garis AB dan rekatkan pada alas supaya penggaris tidak mudah bergeser.
4. Tancapkan paku payung di atas garis AB misalkan di F.
5. Letakkan salah satu sisi tegak penggaris segitiga siku-siku menempel pada penggaris.
6. Ikat salah satu ujung benang ke paku payung (F) dan rekatkan ujung lainnya pada sisi tegak segitiga siku-siku atau di C.
7. Panjang benang antara paku payung (F) dan ujung segitiga (C) adalah sepanjang (CE) atau $CF = CE$.
8. Geser penggaris segitiga siku-siku sepanjang penggaris panjang mendekati paku payung (F).
9. Gerakkan pensil mengikuti arah gerak segitiga siku-siku dengan merentangkan tali ke sisi tegak segitiga siku-siku dan jaga tali agar tetap kencang.
10. Lakukan seperti langkah sebelumnya dengan menempatkan segitiga siku-siku pada sisi yang berlawanan.



Gambar 1.8

Pergerakan pensil melalui titik-titik secara kontinu membentuk sebuah kurva yang dinamakan parabola. Perhatikan Gambar 1.8, berdasarkan titik-titik pada kurva jawablah pertanyaan berikut.

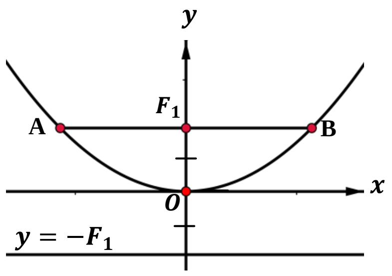
1. Apakah jarak E_1D_1 sama dengan jarak FD_1?
2. Apakah jarak E_2D_2 sama dengan jarak FD_2?
3. Apakah jarak E_3D_3 sama dengan jarak FD_3?
4. Apakah jarak E_4D_4 sama dengan jarak FD_4?
5. Apakah jarak E_5D_5 sama dengan jarak FD_5?
6. Apakah jarak E_6D_6 sama dengan jarak FD_6?
7. Apakah jarak E_7D_7 sama dengan jarak FD_7?

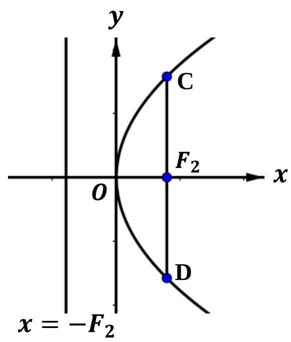
Diskusikan

Berdasarkan jawaban dari pertanyaan di atas dan informasi lainnya, tuliskan definisi parabola dengan menggunakan kata-kata sendiri.

b. Unsur-unsur Parabola

Parabola merupakan himpunan titik-titik pada bidang datar yang mempunyai jarak yang sama terhadap suatu titik tertentu dan terhadap suatu garis tertentu. Parabola memiliki beberapa unsur pembentuk. Untuk mengetahui unsur-unsur pembentuk parabola mari kita gambarkan kembali beberapa contoh parabola dengan posisi yang berbeda seperti pada Gambar 1.9.





Gambar 1.9

Berikut merupakan unsur-unsur parabola berdasarkan contoh di atas.

1. Titik F_1 dan F_2 masing-masing disebut titik fokus parabola.
2. Titik O pada masing-masing kurva merupakan titik puncak parabola.
3. Garis $y = -F_1$ dan garis $x = -F_2$ masing-masing merupakan persamaan garis direktriks parabola.
4. Sumbu-y dan sumbu-x masing-masing merupakan sumbu simetri parabola.
5. Ruas garis $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ masing-masing merupakan *latus rectum* parabola.

Diskusikan

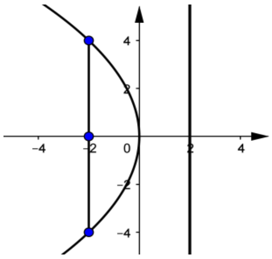
Berdasarkan informasi sebelumnya, tuliskan definisi unsur-unsur parabola pada tabel berikut.

Tabel 1.2 Unsur-unsur parabola

Unsur Parabola	Definisi
Titik fokus	
Titik puncak	
Garis direktriks	
Sumbu simetri	
Latus rectum	

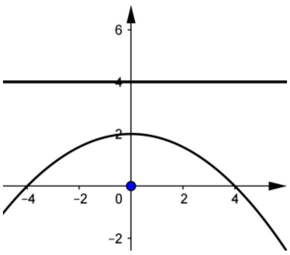
Contoh 1.1

1. Titik fokus parabola terletak pada koordinat $(-2,0)$ dan persamaan garis direktriks yaitu $x = 2$. Lukislah kurva parabola dan tentukan koordinat titik puncak dan sumbu simetri parabola tersebut.

   Jawab:
   - ✓ Kurva parabola yang terbentuk.
   - ✓ Titik puncak berada pada titik $(0,0)$
   - ✓ Sumbu simetri pada sumbu-*x* atau $y = 0$

2. Titik fokus parabola terletak pada titik $(0,0)$ dan puncak parabola pada titik $(0,2)$. Lukislah kurva parabola dan tentukan persamaan garis direktriks, sumbu simetri, dan panjang tali busur pada parabola tersebut.

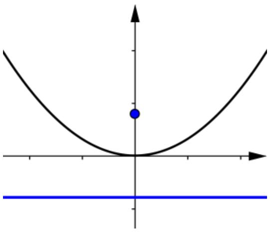
   

   Jawab:
   - ✓ Kurva parabola yang terbentuk.
   - ✓ Persamaan direktriks yaitu $y = 4$.
   - ✓ Sumbu simetri pada sumbu-*y* atau $x = 0$

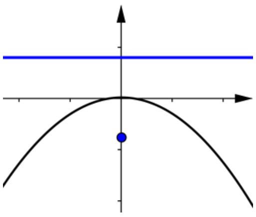
Latihan 1.1

A. Pemahaman

1. Lukislah kurva parabola berdasarkan koordinat titik fokus dan persamaan garis direktriks berikut.
   a. Titik fokus $(0, -4)$ dan persamaan garis direktriks $y = 4$
   b. Titik fokus $(2, 0)$ dan persamaan garis direktriks $x = -2$
2. Tentukan persamaan dan perbedaan kurva parabola di bawah berdasarkan unsur-unsur pembentuknya.

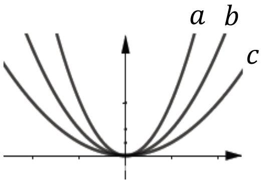


(a)



(b)

B. Penalaran



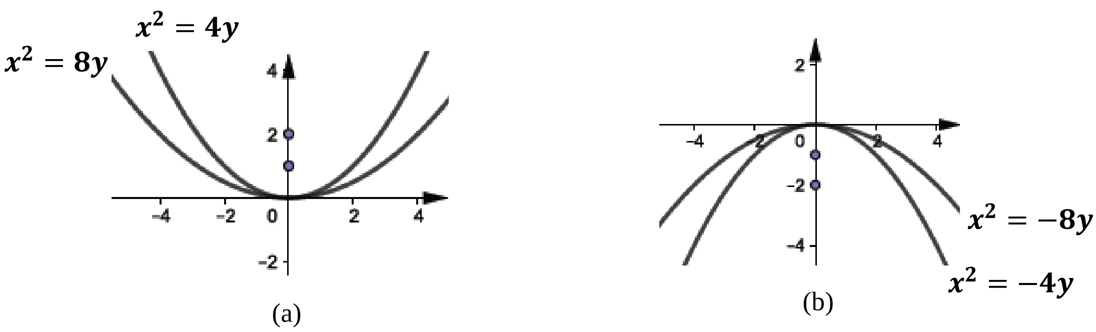
Gambar 1.10

1. Perhatikan ketiga kurva parabola pada Gambar 1.10 di samping. Kurva manakah yang jarak antara titik fokus dengan titik puncaknya paling dekat? Jelaskan.
2. Titik puncak parabola berada di $(0,0)$. Jika titik fokus pada koordinat $(0,4)$ maka panjang *latus rectum* adalah 16 satuan, titik fokus pada koordinat $(-2,0)$ maka panjang *latus rectum* yaitu 8 satuan, dan *latus rectum* sepanjang 24 satuan apabila titik fokus pada koordinat $(0,-6)$. Berikan kesimpulan cara menentukan panjang *latus rectum* parabola berdasarkan contoh tersebut.
3. Pernyataan manakah yang salah? Jelaskan.
   (i) Jika koordinat titik fokus di $(0,3)$ dan persamaan garis direktriks $y = -1$ maka titik puncak di $(0,1)$
   (ii) Jika koordinat titik puncak di $(3,0)$ dan titik fokus di $(4,0)$ maka persamaan garis direktriks adalah $x - 1 = 0$
   (iii) Jika koordinat titik puncak di $(0,-1)$ dan persamaan garis direktriks $y = 2$ maka titik fokus di $(-4,0)$

C. Persamaan Parabola Titik Puncak di $(0,0)$

1. Titik puncak $(0,0)$ dan sumbu simetri pada sumbu-*y*

Persamaan parabola dapat diketahui dengan mengaplikasikan definisi parabola. Kurva parabola dengan sumbu simetri pada sumbu-*y* dapat berupa kurva terbuka ke atas atau kurva terbuka ke bawah. Perhatikan contoh parabola berikut.

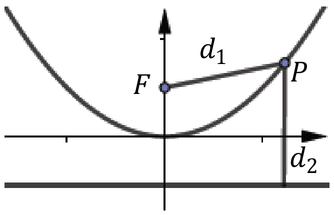


Gambar 1.11

Terdapat dua kurva parabola pada Gambar (a) yaitu parabola $x^2 = 8y$ dengan titik fokus berada di $(0, 2)$ dan parabola $x^2 = 4y$ dengan titik fokus berada di $(0,1)$. Pada Gambar (b) juga terdapat dua kurva parabola yaitu parabola $x^2 = -8y$ dengan titik fokus berada di $(0, -2)$ dan parabola $x^2 = -4y$ dengan titik fokus berada di $(0, -1)$.

Kegiatan 1.3

Parabola pada Gambar 1.12 berpuncak di $(0,0)$ dan sumbu simetri pada sumbu-*y*. Persamaan umum parabola yaitu $x^2 = 4py$. Ikuti langkah-langkah berikut untuk membuktikan persamaan parabola tersebut.



Gambar 1.12

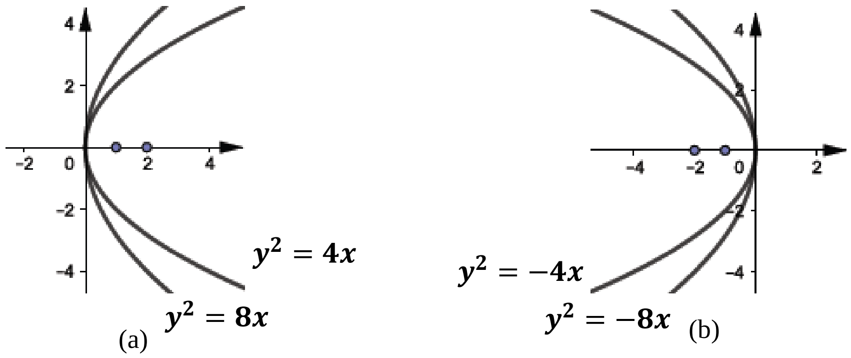
1. Misalkan titik fokus di $F(0, p)$ dan $P(x, y)$ adalah salah satu titik yang dilewati oleh kurva.
2. Jika d_1 merupakan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus, maka tentukan nilai d_1.
3. Jika d_2 merupakan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan garis direktriks, maka tentukan nilai d_2.
4. Berdasarkan definisi parabola, jarak antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus sama dengan jarak titik $P(x, y)$ dengan garis direktriks, maka tentukan persamaan yang memenuhi $d_1 = d_2$.

Ingat!

- ✓ Jarak antara dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$
  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- ✓ Jarak titik $A(x_0, y_0)$ terhadap garis $y = mx + b$
  $d = \dfrac{|mx_0 + b - y_0|}{\sqrt{1 + m^2}}$

2. Titik puncak $(0, 0)$ dan sumbu simetri pada sumbu-*x*

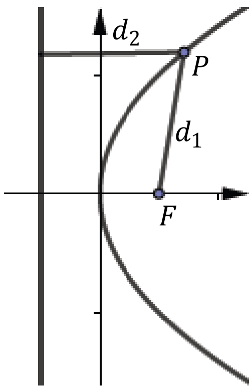
Parabola dengan titik puncak $(0,0)$ selain dapat bersumbu simetri di sumbu-*y*, dapat pula bersumbu simetri di sumbu-*x*. Parabola bersumbu simetri di sumbu-*x* dapat berupa kurva terbuka ke kanan atau ke kiri. Perhatikan contoh parabola pada Gambar 1.13 di bawah.



Gambar 1.13

Terdapat dua kurva parabola pada Gambar (a) yaitu parabola $y^2 = 8x$ dengan titik fokus berada di (2,0) dan parabola $y^2 = 4x$ dengan titik fokus berada di (1,0). Pada Gambar (b) juga terdapat dua kurva parabola yaitu parabola $y^2 = -8x$ dengan titik fokus berada di $(-2, 0)$ dan parabola $y^2 = -4x$ dengan titik fokus berada di $(-1, 0)$.

Kegiatan 1.4



Gambar 1.14

Ikuti langkah-langkah berikut untuk menentukan persamaan parabola dengan titik puncak di (0,0) dan sumbu simetri pada sumbu-*x*. Misalkan $F(p, 0)$ merupakan titik fokus parabola dan $P(x, y)$ merupakan salah satu titik yang dilewati parabola.

1. Jika d_1 merupakan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus, maka tentukan nilai d_1.
2. Jika d_2 merupakan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan garis direktriks, maka tentukan nilai d_2.
3. Berdasarkan definisi parabola, jarak antara titik $P(x, y)$ dengan fokus sama dengan jarak titik $P(x, y)$ dengan garis direktriks, maka tentukan persamaan yang memenuhi $d_1 = d_2$.

Persamaan parabola

....

 **Diskusikan**

Tuliskan persamaan dan perbedaan parabola berpuncak di (0,0) antara parabola sumbu simetri pada sumbu-x dan sumbu-y berdasarkan unsur-unsur pembentuknya.

Contoh 1.2

1. Tentukan koordinat titik fokus dan arah terbuka kurva apabila diketahui persamaan parabola yaitu $y^2 = 2x$.

   Jawab:

   - Diketahui persamaan umum parabola yaitu $y^2 = 4px$

     $y^2 = 4px \rightarrow y^2 = 2x$

     $\Leftrightarrow 4p = 2$

     $\Leftrightarrow p = \dfrac{1}{2}$

     $\therefore$ Titik fokus parabola adalah $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

   - Nilai $p = \frac{1}{2}$ (positif) maka kurva parabola terbuka ke kanan dengan titik fokus $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

   Jadi koordinat titik fokus parabola di $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ dan kurva terbuka ke kanan.

2. Tentukan persamaan parabola dengan titik fokus di (0,2) dan persamaan garis direktris $y = -2$!

   Jawab:

- Diketahui: Fokus = $(0,2)$ yang berarti bahwa $p = 2$

  Persamaan garis direktriks yaitu $y = -2$ yang berarti bahwa sumbu simetri pada sumbu-y sehingga persamaan umum parabola adalah $x^2 = 4py$.
- Persamaan parabola $x^2 = 4py$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4(2)y$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8y$$

Jadi persamaan parabolanya adalah $x^2 = 8y$.

Latihan 1.2

A. Pemahaman

1. Tentukan persamaan parabola jika.
   a. Titik fokus di $(4,0)$ dan persamaan direktriks $x + 4 = 0$.
   b. Titik fokus di $(-\frac{3}{2}, 0)$ dan persamaan direktriks $2x - 3 = 0$
   c. Titik puncak di $(0, 6)$ dan persamaan direktriks $y + 6 = 0$
2. Tentukan koordinat titik fokus, persamaan garis direktriks, dan panjang *latus rectum* dari masing-masing persamaan berikut.
   a. $x^2 = -24y$
   b. $y^2 - 16x = 0$
   c. $y^2 = -4x$
3. Sebuah parabola terbuka ke atas berpuncak di $(0,0)$ dan melalui titik $(-8, 4)$. Tentukan persamaan parabola tersebut dan unsur-unsurnya pembentuknya (titik fokus, persamaan garis direktriks, sumbu simetri, dan panjang *latus rectum*).

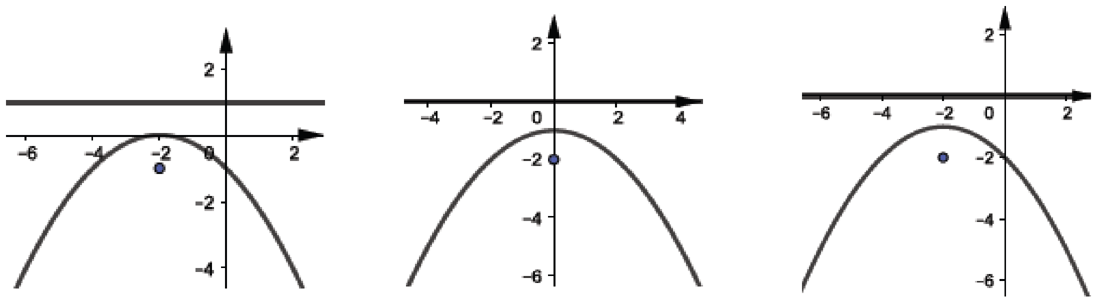
B. Penalaran

1. Buktikan bahwa puncak parabola adalah titik pada parabola yang letaknya paling dekat dengan titik fokus.
2. Tuliskan langkah-langkah untuk menentukan koordinat titik B dan panjang $\overline{AB}$ apabila terdapat sebuah titik $A(8,8)$ pada parabola $x^2 = 8y$ dan $\overline{AB}$ merupakan *latus rectum* parabola tersebut.

d. Persamaan Parabola Titik Puncak di (h, k)

1. Titik puncak (h, k) dan garis direktriks sejajar sumbu-*x*

Titik puncak parabola pada bidang kartesius tidak selalu terletak pada $(0,0)$. Titik puncak selain di $(0,0)$ dimisalkan di titik (h, k) dibagi menjadi dua yaitu kurva dengan garis direktriks sejajar sumbu-*x* dan sejajar sumbu-*y*. Berikut merupakan contoh parabola dengan titik puncak (h, k) dan garis direktriks sejajar sumbu-*x*.

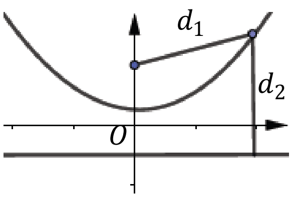


(a) **(b)** **(c)**

Gambar 1.15

Gambar (a) merupakan parabola dengan titik puncak di $(-2, 0)$ dan titik fokus di $(-2, -1)$. Persamaan parabola tersebut yaitu $(x+2)^2 = 4.-1y$ atau $x^2 + 4x + y + 4 = 0$. Gambar (b) merupakan parabola dengan titik puncak di $(0, -1)$ dan titik fokus di $(0, -2)$. Persamaan parabola tersebut yaitu $x^2 = 4.-1(y+1)$ atau $x^2 + 4y + 4 = 0$. Gambar (c) merupakan parabola dengan titik puncak di $(-2, -1)$ dan titik fokus di $(-2, -2)$. Persamaan parabola tersebut yaitu $(x+2)^2 = 4.-1(y+1)$ atau $x^2 + 4x + 4y + 8 = 0$.

Kegiatan 1.5



Gambar 1.16

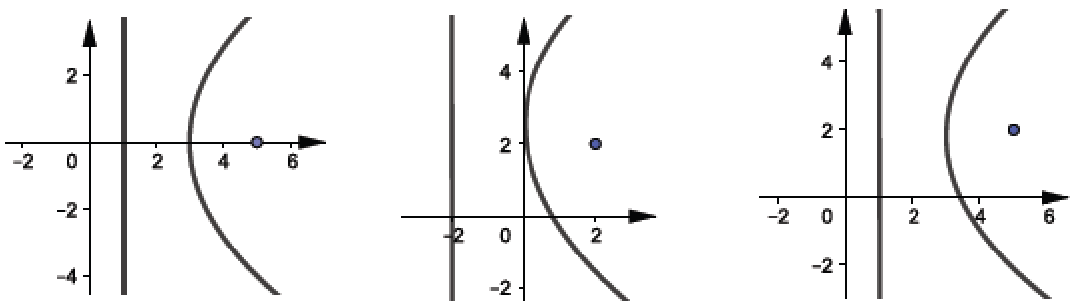
Misalkan (h, k) merupakan titik puncak parabola dan $(h,\ k+p)$ merupakan titik fokus parabola. Persamaan garis direktriks yaitu $y = k - p$ dan terletak sejajar dengan sumbu-*x*. Persamaan umum parabola tersebut yaitu $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

Buktika persamaan tersebut dengan mengikuti langkah-langkah di bawah ini.

1. Jika d_1 merupakan jarak antara titik $P(x,y)$ dengan titik fokus, maka tentukan nilai d_1.
2. Jika d_2 merupakan jarak antara titik $P(x,y)$ dengan garis direktriks, maka tentukan nilai d_2.
3. Berdasarkan definisi parabola, jarak antara titik $P(x,y)$ dengan titik fokus sama dengan jarak titik $P(x,y)$ dengan garis direktriks, maka tentukan persamaan yang memenuhi $d_1 = d_2$.

2. Titik puncak (h, k) dan garis direktriks sejajar sumbu-*y*

Berikut merupakan beberapa contoh parabola dengan titik puncak di (h,k) dan garis direktriks sejajar dengan sumbu-*y*

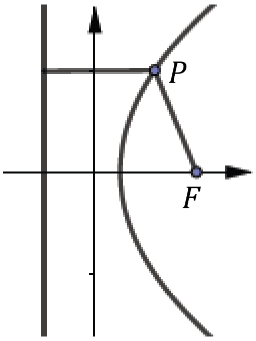


(a) **(b)** **(c)**

Gambar 1.17

Gambar (a) merupakan parabola dengan titik puncak di $(3,0)$ dan titik fokus di $(5,0)$. Persamaan parabola tersebut yaitu $y^2 = 4.2(x-3)$ atau $y^2 - 8x + 24 = 0$. Gambar (b) merupakan parabola dengan titik puncak di $(0,2)$ dan titik fokus di $(2,2)$. Persamaan parabola tersebut yaitu $(y-2)^2 = 4.2(x)$ atau $y^2 - 4y - 8x + 4 = 0$. Gambar (c) merupakan parabola dengan titik puncak di $(3,2)$ dan titik fokus di $(5,2)$. Persamaan parabola tersebut yaitu $(y-2)^2 = 4.2(x-3)$ atau $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$.

Kegiatan 1.6



Gambar 1.18

Misalkan (h, k) merupakan titik puncak dan $F(h + p, k)$ merupakan titik fokus parabola. Garis direktriks terletak sejajar dengan sumbu-*x* yaitu $x = h - p$. $P(x, y)$ merupakan salah satu titik yang dilalui oleh kurva parabola.

1. Jika d_1 merupakan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus, maka tentukan nilai d_1.
2. Jika d_2 merupakan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan garis direktriks, maka tentukan nilai d_2.
3. Berdasarkan definisi parabola, jarak antara titik $P(x, y)$ dengan fokus sama dengan jarak titik $P(x, y)$ dengan garis direktriks, maka tentukan persamaan yang memenuhi $d_1 = d_2$.

Persamaan parabola puncak (h, k) dan garis direktriks sejajar sumbu-*y*

Diskusikan

Jelaskan persamaan dan perbedaan parabola berpuncak di (h, k) antara garis direktriks sejajar sumbu-*x* dan sejajar sumbu-*y* berdasarkan unsur-unsur pembentuknya.

Contoh 1.3

1. Tentukan unsur-unsur parabola dari persamaan $y^2 + 8y - 4x + 4 = 0$.

   Jawab:

   - Ubah persamaan $y^2 + 8y - 4x + 4 = 0$ menjadi persamaan baku parabola.

     $y^2 + 8y - 4x + 4 = 0$

     $\Leftrightarrow y^2 + 8y = 4x - 4$

     $\Leftrightarrow (y + 4)^2 = 4x - 4 + 16$

     $\Leftrightarrow (y + 4)^2 = 4x + 12$

     $\Leftrightarrow (y + 4)^2 = 4(x + 3)$ dengan $p = 1$

   - Berdasarkan persamaan $(y + 4)^2 = 4(x + 3)$ dapat diketahui bahwa:

     $(y + 4)^2 = 4(x + 3) \Leftrightarrow (y - k)^2 = 4p(x - h)$

     ✓ Koordinat titik puncak $= (h, k) = (-3, -4)$

     ✓ Koordinat titik fokus $= F(h + p, k) = (-2, -4)$

     ✓ Direktriks $\equiv x = h - p = -4$

   - Kesimpulan

     Jadi parabola $y^2 + 8y - 4x + 4 = 0$ merupakan kurva terbuka ke kanan dengan koordinat titik puncak $(-3, -4)$, titik fokus $(-2, -4)$, dan persamaan direktriksnya yaitu $x = -4$.

2. Tentukan persamaan parabola yang titik puncaknya (2,3), sumbu simetri sejajar sumbu-*y* dan melalui titik (3,4).

   Jawab:

   - Karena sumbu simetri sejajar sumbu-*y* maka persamaan parabola yaitu $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

     Puncak (2,3) $\rightarrow (x - 2)^2 = 4p(y - 3)$

   - Parabola melalui (3,4) $\Rightarrow (3 - 2)^2 = 4p(4 - 3)$

     $\Leftrightarrow 1 = 4p(1)$

     $\Leftrightarrow 4p = 1$

   - Persamaan parabola adalah $(x - 2)^2 = 4p(y - 3)$

     $\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 1(y - 3)$

     $\therefore x^2 - 4x - y + 7 = 0$

- Jadi persamaan parabola dengan titik puncak $(2,3)$, sumbu simetri sejajar sumbu-y dan melalui titik $(3,4)$ adalah $x^2 - 4x - y + 7 = 0$.

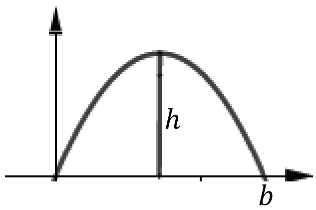
Latihan 1.3

A. Pemahaman

1. Jelaskan langkah-langkah menentukan panjang *latus rectum* dari persamaan parabola $y^2 - 8x - 8y + 32 = 0$
2. Tentukan koordinat titik fokus, persamaan direktriks, titik puncak, dan panjang tali busur dari masing-masing persamaan berikut.
   a. $y^2 + 6y + 2x + 5 = 0$
   b. $y^2 + 2y + 8x + 17 = 0$
   c. $2x^2 - 12x - y + 18 = 0$
3. Tentukan persamaan parabola berikut.
   a. Titik puncak $(-1,4)$, sumbu simetri sejajar sumbu-*x*, dan melalui titik $(1,6)$.
   b. Titik fokus $(-2,3)$ dan persamaan garis direktriksnya $x + 6 = 0$.
   c. Titik puncak di $(-2, 2)$ dan titik fokus di $(-2,5)$.

B. Penalaran

1. Jelaskan cara menentukan persamaan parabola berikut.



2. Diberikan ketiga titik yaitu $(-1, 2)$, $(1, -2)$, dan $(2, 1)$.
   a. Carilah sebuah parabola yang melalui titik-titik tersebut dan sumbunya sejajar dengan sumbu-*x*.
   b. Carilah sebuah parabola yang melalui titik-titik tersebut dan sumbunya sejajar dengan sumbu-*y*.

e. Aplikasi Parabola

Benda-benda berbentuk parabola dapat dengan mudah ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Selain itu terdapat juga beberapa benda yang menggunakan prinsip pemantulan pada parabola dan mengikuti sifat cermin cekung. Berikut merupakan beberapa aplikasi parabola dalam kehidupan sehari-hari.

1. Lampu kendaraan dan lampu senter

Salah satu sifat parabola yaitu cahaya yang bersumber di fokus dan mengenai permukaan yang mengkilap akan dipantulkan sejajar dengan sumbu simetri parabola. Sifat parabola inilah yang digunakan pada lampu kendaraan, lampu senter (sorot), dan lainnya dengan sumber cahaya lampu diletakkan pada titik fokus.

2. Teleskop

Teleskop atau teropong merupakan sebuah alat pengamatan yang berfungsi mengumpulkan radiasi elektromagnetik dan membentuk citra dari benda yang sedang diamati. Cara kerja teleskop yaitu mengumpulkan cahaya. Pada teleskop digunakan juga sifat dari cermin cekung seperti halnya pada lampu kendaraan tetapi reflektor pada teleskop dibuat berdasar pada prinsip yang berkebalikan dengan lampu sorot atau lampu kendaraan.

Pada teleskop gelombang cahaya yang masuk melalui tabung optik akan di teruskan menuju cermin cekung parabolik. Semua cahaya yang mengenai cermin cekung parabolik akan dipantulkan kedepan dan dikumpulkan dalam satu titik fokus. Pengamat dapat melihat citra hasil pengumpulan cahaya(bayangan) yang telah diperbesar menggunakan lensa mata (*eyepiece*).

3. Antena

Antena merupakan suatu alat yang digunakan untuk merambatkan dan menerima gelombang radio atau elektromagnetik Sama halnya seperti pada teleskop, antena parabola merupakan sebuah cermin pemantul yang akan memantulkan sesuatu yang datang pada satu titik yang dinamakan titik fokus. Sesuatu yang dipantulkan bisa berupa sinyal satelit, sinyal internet, sintal radio, cahaya, suara, dan lainnya. Titik fokus parabola tersebut akan dipasang sebuah alat yang beragam bisa berupa antena, microphone, sensor cahaya, dan lainnya.

4. Jembatan Gantung (*Suspension Bridge*)

Jembatan gantung adalah jenis konstruksi jembatan dengan menggunakan kabel-kabel baja yang menggantung berbentuk parabola dan terentang diantara menara-menara. Jembatan gantung menyangga bebannya dengan cara menyalurkan beban melalui kabel-kabel baja menuju menara penyangga.

Kemudian gaya tekan tersebut diteruskan oleh menara penyangga ke tanah. Selain kabel, hampir semua jembatan gantung memiliki sistem truss pendukung di bawah dek jembatan yang disebut rangka dek yang membantu untuk mengeraskan dek dan mengurangi kecenderungan jalan untuk bergoyang.

5. Jembatan Lengkung (*Arch Bridge*)

Bentuk parabola juga dapat dilihat pada jembatan berbentuk lengkung (*arch bridge*). Jembatan lengkung berbentuk busur setengah lingkaran dan memiliki struktur ringan dan terbuka. Pada jembatan lengkung berat jembatan serta beban yang ditanggung oleh jembatan merupakan gaya-gaya yang saling berpasangan membentuk tekanan.

Desain busur jembatan menghasilkan sebuah gaya yang mengarah ke dalam dan ke luar pada dasar lengkungan busur.

Contoh 1.5

1. Reflektor sebuah lampu sorot berupa piringan parabolis memiliki diameter 120 cm. Bola lampu ditempatkan sebagai fokus parabola. Berapakah kedalaman reflektor tersebut jika penempatan bola lampu adalah 12 cm di atas titik pusat (titik terendah dari piringan)? Tentukan persamaan yang digunakan oleh teknisi dalam membuat piringan reflektor tersebut.

   Jawab:

   a. Diketahui: - Diameter = 120

      - Penempatan bola lampu = 12 diatas titik pusat

      Ditanyakan: - Kedalaman reflektor

      - Persamaan reflektor parabola.

   b. Pembahasan:
      - Lokasi bola lampu merupakan lokasi dari fokus parabola. Misalkan penampang reflektor berupa parabola vertikal dengan titik pusat (0,0) yang terbuka ke atas, maka koordinat titik fokusnya adalah $(0,12)$.
      - Titik fokus $(0,12) = (0, p)$ sehingga $p = 12$
      - Persamaan parabola yang memodelkan reflektor

        $x^2 = 4py$

        $x^2 = 4(12)y$

        $x^2 = 48y$
      - Kedalaman reflektor

        Dicari jari-jari reflektor yaitu $x = \frac{120}{2} = 60$

        Dicari nilai y ketika $x = 60$ atau koordintat $(60, y)$

        $x^2 = 48y$

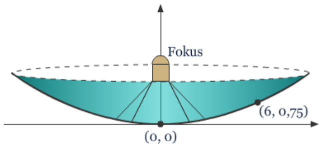
        $60^2 = 48y$

        $y = \frac{3600}{48} = 75$

   c. Kesimpulan:

      Persamaan parabola yang menggambarkan kondisi reflektor adalah $x^2 = 48y$ dan kedalaman reflektor adalah 75 cm.

2. Gambar di samping menunjukkan penampang dari piringan antena radio. Seorang teknisi telah menempatkan suatu titik pada penampang antena yang terletak 0,75 meter di atas dan 6 meter di kanan dari titik pusatnya. Pada koordinat mana seharusnya teknisi menempatkan fokus antena tersebut?



Jawab:

a. Diketahui: Titik pada penampang antena $= (6, 0.75)$

   Ditanyakan: Letak fokus antena.

b. Pembahasan:
   - Bentuk penampang merupakan parabola vertikal dengan titik puncak $(0, 0)$ sehingga persamaan parabola yaitu $x^2 = 4py$.
   - Salah satu titik pada penampang yaitu$(6, 0.75)$, maka disubstitusikan pada persamaan untuk mencari nilai p.

     $x^2 = 4py$

     $6^2 = 4p(0.75)$

     $36 = 3p$

     $p = 12$
   - Karena $p = 12$ dan letak titik fokus parabola vertikal dengan puncak $(0, 0)$ adalah $(0, p)$ maka letak titik fokus parabola berada pada titik $(0, 12)$.

c. Kesimpulan

   Jadi, letak fokus antena adalah 12 meter di atas titik puncaknya.

Latihan 1.5

A. Penerapan

1. Lengkungan parabolik pada jembatan lengkung memiliki jarak sejauh 50 meter di atas air dan panjang 200 meter. Tentukan persamaan parabola apabila dimisalkan titik (0,0) berada pada puncak parabola dan sumbu simetri pada sumbu-*y*.

2. Sebuah lampu mobil memiliki reflektor parabolik dengan diameter 8 inci. Jika sumber cahaya berada pada fokus dengan jarak 1 inci dari puncak reflektor, berapa kedalamam reflektor tersebut?

B. Penalaran

1. Terdapat sebuah soal dan langkah penyelesaiannya. Tentukan pada langkah nomor berapa terdapat kesalahan dalam menyelesaikan soal dan berikan penjelasan.

Kembang api ditembakkan ke udara dan lintasannya membentuk parabola. Tinggi maksimum kembang api mencapai 100 meter dan mendarat 30 meter dari lokasi peluncuran. Tentukan persamaan parabola yang memodelkan lintasan kembang api dan ketinggian kembang api ketika jarak horizontal 10 meter dari lokasi peluncuran.

Penyelesaian:

(i) Puncak parabola di koordinat $(15{,}100)$ sehingga persamaan parabola yang digunakan yaitu $(x-h)^2 = a(y-k)$.

(ii) Persamaan parabola yang menggambarkan lintasan kembang api.

$(x-h)^2 = a(y-k)$

$\Leftrightarrow (x-15)^2 = a(y-100)$

(iii) Menentukan nilai a

$$(x-15)^2 = a(y-100)$$

$\Leftrightarrow (0-15)^2 = a(0-100)$

$\Leftrightarrow (15)^2 = a(-100)$

$\Leftrightarrow 225 = -100a$

$a = -\frac{225}{100}$

(iv) Ketinggian kembang api ketika jarak horizontal 10 meter.

$$(x-15)^2 = -\frac{225}{100}(y-100)$$

$$\Leftrightarrow (10-15)^2 = -\frac{225}{100}(y-100)$$

$$\Leftrightarrow (5)^2 = -\frac{225}{100}(y-100)$$

$\Leftrightarrow y = -\frac{225}{100}(25) + 100$

$\Leftrightarrow y = -56{,}25 + 100$

$y = 43{,}75$

2. Perhatikan soal berikut.

Sebuah piringan pembangkit listrik menggunakan reflektor parabolik yang berdiameter 8,5 meter untuk memusatkan sinar matahari ke dalam mesin. Fokus terletak 4,5 meter dari dasar reflektor. Tentukan persamaan yang menggambarkan reflektor parabolik tersebut dan kedalamannya.

Berikut merupakan jawaban dua siswa. Jawaban siswa manakah yang salah? Jelaskan.

Siswa A	**Siswa B**
a. Persamaan parabola yang sesuai dengan situasi adalah $x^2 = 18y$ b. Kedalaman reflektor sama dengan mencari koordinat titik $A(x, y)$. • Mencari x. $x = \frac{8{,}5}{2} = 4{,}25$ • Mencari y Substitusikan nilai x ke persamaan $x^2 = 18y$. $\Leftrightarrow (4{,}25)^2 = 18y$ $\Leftrightarrow y = \frac{1}{18}.(4{,}25)^2$ $\Leftrightarrow y = \frac{18{,}06}{18} = 1{,}00$ Jadi, kedalaman reflektor parabolik adalah 1,00 meter.	a. Persamaan parabola yang sesuai dengan situasi adalah $x^2 = 17y$ b. Kedalaman reflektor sama dengan mencari koordinat titik $A(x, y)$. • Mencari x. $x = \frac{8{,}5}{2} = 4{,}25$ • Mencari y Substitusikan nilai x ke persamaan $x^2 = 17y$. $\Leftrightarrow (4{,}25)^2 = 17y$ $\Leftrightarrow y = \frac{1}{17}.(4{,}25)^2$ $\Leftrightarrow y = \frac{18{,}06}{17} = 1{,}06$ Jadi, kedalaman reflektor parabolik adalah 1,06 meter.

RANGKUMAN

1. Parabola adalah himpunan titik pada sebuah bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu (titik fokus) dan garis tertentu (garis direktriks).
2. Persamaan umum parabola dengan puncak $(0,0)$
   - Sumbu simetri di sumbu-*y*

     $x^2 = 4py$
   - Sumbu simetri di sumbu-*x*

     $y^2 = 4px$
3. Persamaan umum parabola dengan puncak (h, k)
   - Garis direktriks sejajar sumbu-*x*

     $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
   - Garis direktriks sejajar sumbu-*y*

     $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

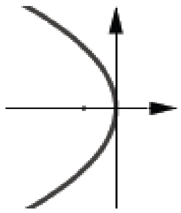
Jurnal Belajar Siswa

1. Berdasarkan pembelajaran yang telah dilakukan, berikan ringkasan tentang apa yang telah dipelajari dengan menggunakan kalimat sendiri.
2. Manakah subbab yang paling sulit untuk dipahami? Jelaskan alasan kesulitan dalam memahami.
3. Manakah subbab yang paling mudah untuk dipahami? Jelaskan alasan kemudahan dalam memahami.

Evaluasi Parabola

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang paling benar.

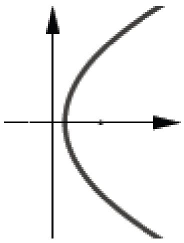
1. Koordinat titik fokus dan persamaan direktriks yang mungkin dari parabola di samping adalah...



   a. Titik fokus $(0, p)$ dan persamaan direktriks $y = -p$
   b. Titik fokus $(0, -p)$ dan persamaan direktriks $x = p$
   c. Titik fokus $(-p, 0)$ dan persamaan direktriks $x = p$
   d. Titik fokus $(-p, 0)$ dan persamaan direktriks $x = -p$
   e. Titik fokus $(0, p)$ dan persamaan direktriks $x = p$

2. Garis lurus yang menghubungkan dua titik pada parabola, melalui titik fokus, dan tegak lurus terhadap sumbu simetri parabola adalah...
   a. Garis direktriks
   b. Sumbu fokal
   c. Sumbu mayor
   d. *Latus rectum*
   e. Sumbu sekawan

3. Persamaan umum parabola di samping adalah...



   a. $y^2 = 4p(x - h)$
   b. $x^2 = 4p(y - k)$
   c. $(y - k)^2 = 4px$
   d. $y^2 = 4px$
   e. $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

4. Koordinat titik fokus parabola $y^2 - 16x = 0$ adalah...
   a. $(-8,0)$
   b. $(-4,0)$
   c. $(0,0)$
   d. $(4,0)$
   e. $(8,0)$

5. Persamaan parabola dengan *latus rectum* $\overline{AB}$ dan koordinat $A(4,6)$ dan $B(4,-2)$ adalah...
   a. $y^2 + 8x + 12y + 20 = 0$
   b. $y^2 - 4y - 8x + 20 = 0$
   c. $y^2 + 4y - 8x + 20 = 0$
   d. $y^2 + 4x - 8y + 20 = 0$
   e. $y^2 - 8x - 12y + 20 = 0$

6. Persamaan parabola dengan titik puncak (1,2) dan titik fokus (4,2) adalah...
   a. $\mathrm{y}^2 - 4\mathrm{y} - 12\mathrm{x} + 16 = 0$
   b. $\mathrm{y}^2 - 4\mathrm{y} - 8\mathrm{x} + 12 = 0$
   c. $y^2 + 4y - 12x + 8 = 0$
   d. $y^2 + 2y + 12x - 16 = 0$
   e. $y^2 - 2y - 8x + 16 = 0$
7. Persamaan direktriks dari parabola $x^2 - 4x - 16y - 60 = 0$ adalah...
   a. $y - 8 = 0$
   b. $y - 4 = 0$
   c. Sumbu-*x*
   d. $y + 4 = 0$
   e. $y + 8 = 0$

UN 2008

8. Persamaan bayangan parabola $y = x^2 + 4$ karena rotasi dengan pusat $O(0,0)$ sejauh 180^0 adalah...
   a. $x = y^2 + 4$
   b. $x = -y^2 + 4$
   c. $x = -y^2 - 4$
   d. $y = -x^2 - 4$
   e. $y = x^2 + 4$

OSN 2005

9. Aris menggambar bagan dari parabola $y = x^2 - 6x + 7$. Titik-titik parabola yang muncul dalam gambar memiliki absis mulai 0 sampai $+4$. Maka ordinat terkecil dan ordinat terbesar titik-titik pada parabola yang muncul dalam gambar berturut-turut adalah...
   a. -2 dan -1
   b. -2 dan 7
   c. -1 dan 7
   d. 0 dan -1
   e. 0 dan 7

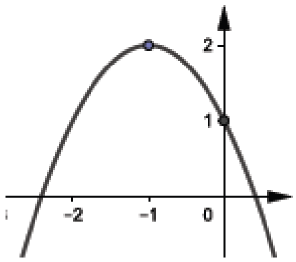
SBMPTN 2014

10. Diketahui suatu parabola simetris terhadap garis $x = -2$ dan garis singgung parabola tersebut di titik $(0,1)$ sejajar garis $4x + y = 4$. Titik puncak parabola tersebut adalah...
    a. $(-2, -3)$
    b. $(-2, -2)$
    c. $(-2,0)$
    d. $(-2,1)$
    e. $(-2,5)$

11. Parabola berpuncak di $(2,0)$ dan koordinat titik fokus di $(4,-2)$ akan...
    a. melalui titik $(3,-1)$
    b. melalui titik $(4,-2)$
    c. mempunyai persamaan $x^2 + 4x - 4y = 4$
    d. mempunyai persamaan $x^2 - 4x + 4y + 4 = 0$
    e. mempunyai sumbu simetri $y - 1 = 0$

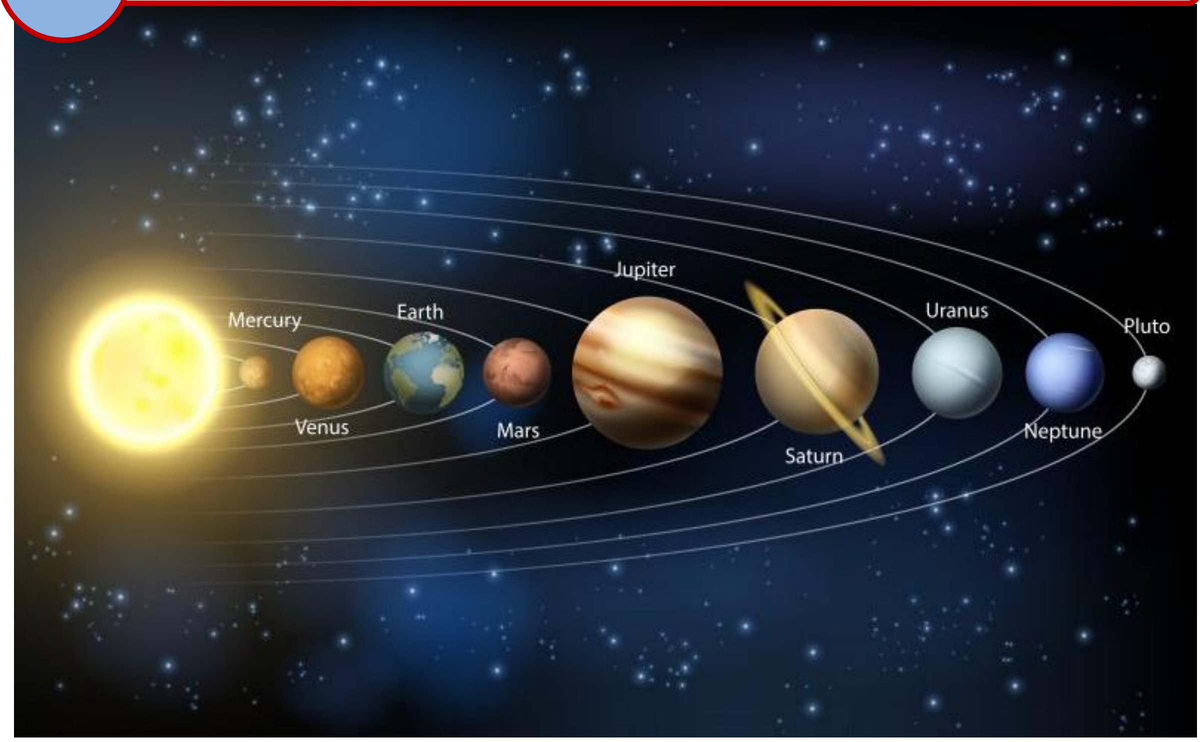
UN 2008

12. Persamaan grafik fungsi kuadrat yang mempunyai titik balik minimum $(1,2)$ dan melalui titik $(2,3)$ adalah...
    a. $y = x^2 - 2x + 1$
    b. $y = x^2 - 2x + 3$
    c. $y = x^2 - 2x - 1$
    d. $y = x^2 + 2x + 1$
    e. $y = x^2 - 2x - 3$



13. Parabola di samping mempunyai persamaan ...
    a. $x^2 + 2x + y + 1 = 0$
    b. $x^2 + 2x + y - 1 = 0$
    c. $x^2 + 2x - y + 1 = 0$
    d. $x^2 + 2x - y - 1 = 0$
    e. $x^2 - 2x - y + 1 = 0$
14. Persamaan parabola dengan fokus $(5,-2)$ dan puncak $(1,-2)$ berbentuk ...
    a. $(y+2)^2 = -16x(x+1)$
    b. $(y+2)^2 = 16x(x+1)$
    c. $(y+2)^2 = 16x(x-1)$
    d. $(y-2)^2 = 16x(x+1)$
    e. $(y-2)^2 = 16x(x-1)$
15. Panjang latus rectum parabola $y^2 - 8x - 8y + 32 = 0$ adalah ...
    a. 8
    b. 12
    c. 16
    d. 20
    e. 24

2 ELIPS



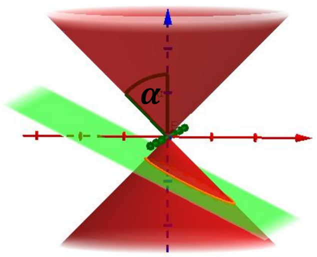
Pembahasan materi elips diantaranya:

- ✓ Melukis elips
- ✓ Definisi elips
- ✓ Unsur-unsur elips
- ✓ Persamaan elips
- ✓ Titik pusat elips
- ✓ Aplikasi elips

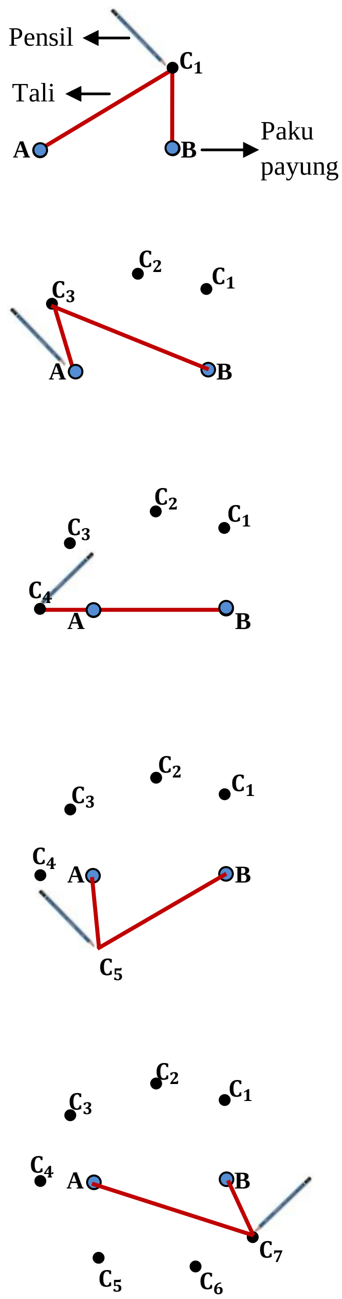
Tata surya adalah susunan benda-benda langit yang berputar mengelilingi matahari sebagai pusatnya. Sebagai pusat tata surya, matahari dikelilingi oleh berbagai macam obyek yaitu planet, meteor, asteroid, dan komet. Planet-planet dan beberapa benda langit lainnya berputar pada orbitnya masing-masing yang disebut lintasan eliptik dan matahari berada di salah satu fokusnya. Sebagian besar planet mempunyai lintasan eliptik yang hampir membentuk sebuah lingkaran.

Mengapa lintasan planet disebut lintasan eliptik? Mengapa dikatakan bahwa sebagian lintasan eliptik tersebut hampir membentuk sebuah lingkaran? Apa keterkaitan antara elips dengan lingkaran? Beberapa pertanyaan tersebut akan terjawab dengan mempelajari pembahasan selanjutnya tentang salah satu kurva hasil irisan kerucut yaitu kurva elips.

a. Melukis dan Pengertian Elips



Elips merupakan salah satu kurva yang terbentuk oleh perpotongan sebuah bidang terhadap kerucut. Kurva berbentuk elips diperoleh ketika bidang memotong dengan kemiringan terhadap sumbu kerucut lebih besar dari sudut α dan tanpa melalui titik puncak.



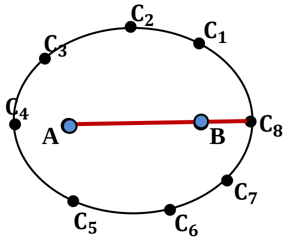
Kegiatan 2.1

Melukis sebuah elips dapat dilakukan dengan alat dan cara yang sederhana. Tahapan membuat elips yaitu:

1. Sediakan seutas tali, dua buah paku payung, papan atau alas, dan sebuah pensil.
2. Tancapkan kedua paku payung pada papan atau alas dengan memberikan jarak diantara keduanya misalkan di titik A dan B.
3. Kaitkan tali pada kedua paku payung (A dan B).
4. Tarik tali antara A dan B menggunakan ujung pensil dan rentangkan dengan kencang.
5. Gerakan pensil secara melingkar dan jaga tali agar tetap kencang.

Pergerakan pensil melalui titik-titik secara kontinu membentuk sebuah kurva yang dinamakan elips. Berdasarkan titik-titik yang dilewati oleh pergerakan pensil, jawablah pertanyaan berikut.

1. Perhatikan Gambar 2.1
   a. Apakah $\overline{AC_1B}$ sama dengan $\overline{AC_2B}$?
   b. Apakah $\overline{AC_2B}$ sama dengan $\overline{AC_3B}$?
   c. Apakah $\overline{AC_3B}$ sama dengan $\overline{AC_4B}$?
   d. Apakah $\overline{AC_4B}$ sama dengan $\overline{AC_5B}$?



Gambar 2.1

e. Apakah $\overline{AC_5B}$ sama dengan $\overline{AC_6B}$?

f. Apakah $\overline{AC_6B}$ sama dengan $\overline{AC_7B}$?

g. Apakah $\overline{AC_7B}$ sama dengan $\overline{AC_8B}$?

h. Apakah $\overline{AC_8B}$ sama dengan $\overline{AC_1B}$?

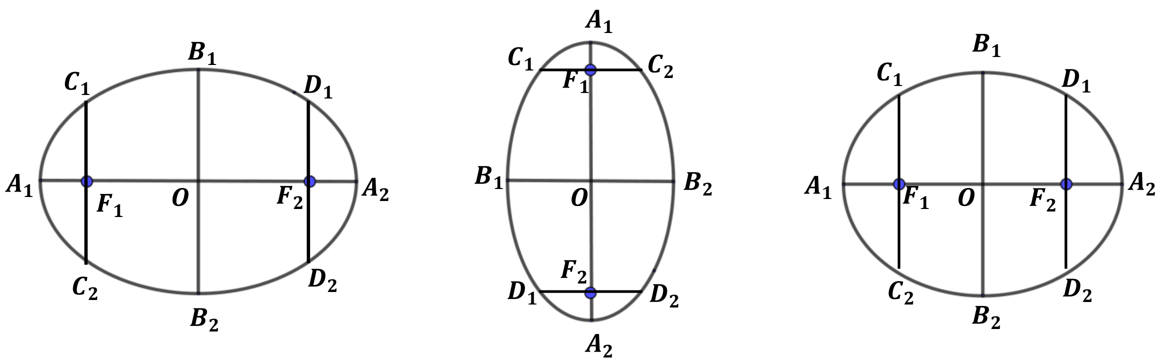
2. Letakkan sebarang titik pada kurva elips (selain titik-titik yang terdapat pada contoh). Apakah jarak titik tersebut terhadap kedua titik fokus sama dengan jarak titik lainnya?

Diskusikan

Berdasarkan jawaban dari pertanyaan di atas dan informasi lainnya, tuliskan definisi elips dengan menggunakan kata-kata sendiri.

b. Unsur-unsur Elips

Sebuah kurva terbentuk berdasarkan beberapa unsur pembentuknya. Elips adalah himpunan titik-titik yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu selalu sama. Elips memiliki beberapa unsur pembentuk. Untuk mengetahui unsur-unsur pembentuk elips mari kita gambarkan kembali beberapa contoh elips dengan ukuran yang berbeda untuk lebih memudahkan dalam mengenali unsur-unsur pembentuknya.



Gambar 2.2 Kurva Elips

Berikut merupakan unsur-unsur elips berdasarkan contoh.

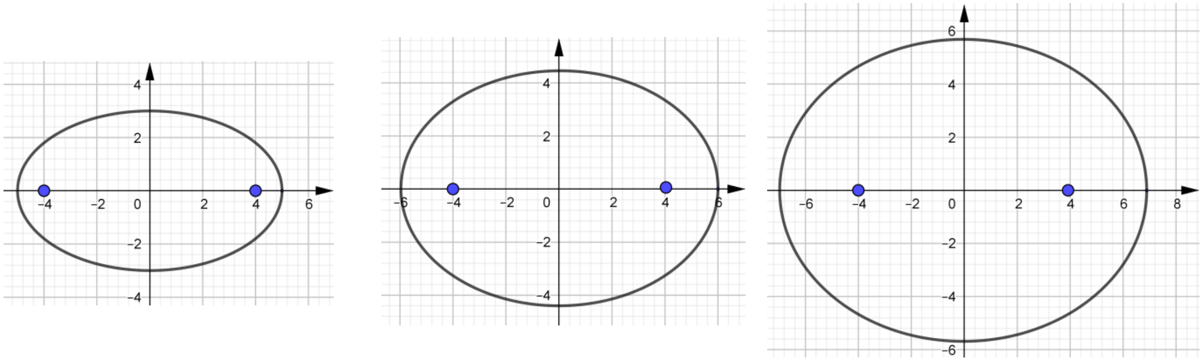
1. Titik O pada masing-masing contoh merupakan titik pusat elips.
2. Titik F_1 dan F_2 masing-masing merupakan titik fokus elips.
3. Ruas garis $\overline{F_1F_2}$ pada masing-masing contoh merupakan sumbu fokal elips.
4. Ruas garis $\overline{A_1A_2}$ pada masing-masing contoh merupakan sumbu mayor elips.
5. Ruas garis $\overline{B_1B_2}$ pada masing-masing contoh merupakan sumbu minor elips.
6. Titik A_1 dan A_2 masing-masing merupakan titik puncak elips.
7. Ruas garis $\overline{C_1C_2}$ dan $\overline{D_1D_2}$ masing-masing merupakan *latus rectum* elips.

Eksentrisitas

Bentuk dan kepepatan elips dapat berbeda antara satu dengan yang lainnya. Kepepatan suatu elips dapat diketahui dengan menentukan nilai eksentrisitas (e).

Perhatikan Gambar 2.3. Titik fokus ketiga elips berada pada koordinat yang sama yaitu $(\pm 4{,}0)$ namun koordinat titik puncak yang berbeda sehingga kepepatan elips menjadi berbeda. Titik puncak elips (a) pada koordinat $(\pm 5{,}0)$ sehingga nilai eksentrisitas elips adalah $\frac{4}{5}$, titik puncak elips (b) pada koordinat $(\pm 6{,}0)$

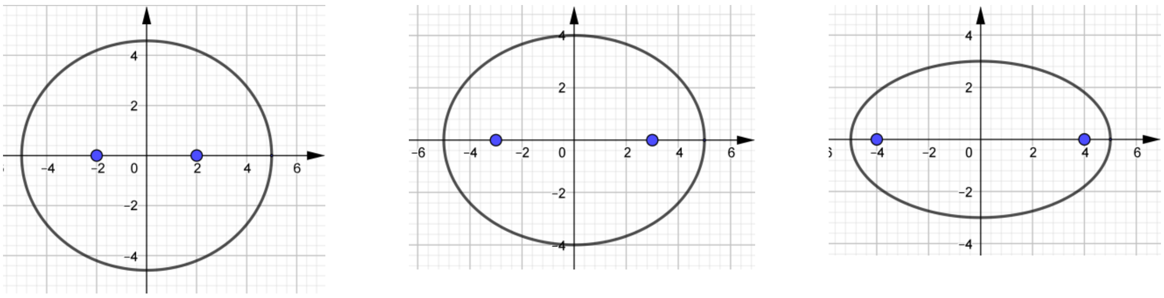
sehingga nilai eksentrisitas elips adalah $\frac{4}{6}$, dan titik puncak elips (c) pada koordinat $(\pm 7{,}0)$ sehingga nilai eksentrisitas elips adalah $\frac{4}{7}$.



(a) (b) (c)

Gambar 2.3

Selain itu kepepatan elips dapat berubah apabila elips dengan koordinat titik puncak yang sama di $(\pm 5{,}0)$ namun koordinat titik fokus yang berbeda. Nilai eksentrisitas elips (a) adalah $\frac{2}{5}$, elips (b) adalah $\frac{3}{5}$, dan elips (c) adalah $\frac{4}{5}$.



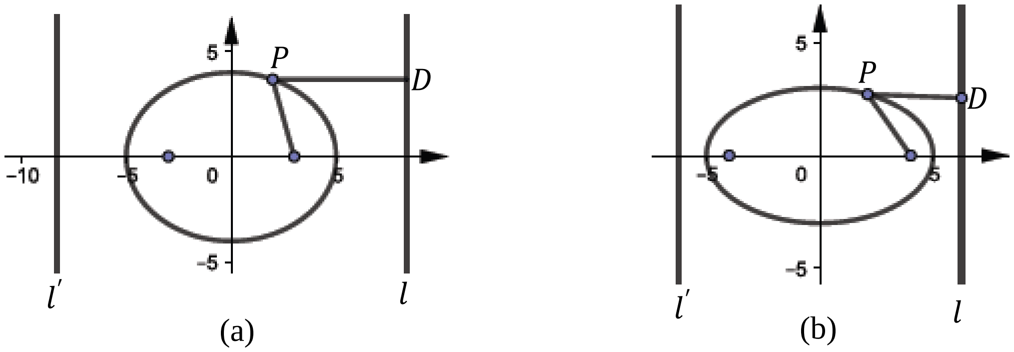
(a) (b) (c)

Gambar 2.4

Persamaan Garis Direktriks

Perhatikan Gambar 2.5. Garis l dan l' pada masing-masing gambar merupakan garis direktriks elips. Titik fokus elips (a) terletak di $(\pm 3{,}0)$ dan titik puncak di $(\pm 5{,}0)$ sehingga eksentrisitas elips adalah $\frac{3}{5}$. Persamaan garis direktriks elips (a) yaitu $x = \pm\frac{25}{3}$. Titik fokus elips (b) terletak di $(\pm 4{,}0)$ dan titik puncak di $(\pm 5{,}0)$

sehingga eksentrisitas elips adalah $\frac{4}{5}$. Persamaan garis direktriks elips (b) yaitu $x = \pm\frac{25}{4}$.



Gambar 2.5

Misalkan F_1 dan F_2 merupakan titik fokus dan $P(x, y)$ merupakan sebarang titik. $\overline{F_1P}$ merupaka jarak antara titik fokus F_1 dengan titik P. $\overline{PD}$ merupakan jarak antara titik P dengan garis direktriks dan sejajar sumbu-x. Titik $P(x, y)$ akan terletak pada elips jika $\overline{F_1P} = e.\overline{PD}$.

Diskusikan

1. Berdasarkan informasi sebelumnya, tuliskan definisi unsur-unsur elips pada tabel berikut.

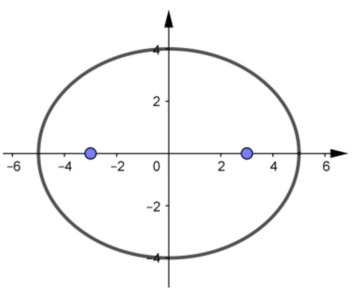
   Tabel 2.1 Unsur-Unsur Elips

Unsur Elips	Definisi
Titik pusat	
Titik fokus	
Sumbu fokal	

Unsur Elips	Definisi
Sumbu mayor	
Sumbu minor	
Titik puncak	
Latus Rectum	

2. Jika koordinat titik fokus elips di $(\pm c, 0)$, titik puncak di $(\pm a, 0)$. Tentukan definisi dari unsur-unsur berikut.

Persamaan eksentrisitas	
Persamaan direktriks	



Contoh 2.1

1. Tentukan koordinat titik fokus, titik pusat, titik puncak, panjang sumbu mayor, dan panjang sumbu minor elips berdasarkan gambar di samping.

   Jawab:

   - Titik fokus berada pada koordinat $(3,0)$ dan $(-3,0)$.
   - Titik pusat berada pada koordinat $(0,0)$.
   - Titik puncak berada pada koordinat $(5,0)$ dan $(-5,0)$.
   - Panjang sumbu mayor yaitu 10.
   - Panjang sumbu minor yaitu 8.

2. Eksentrisitas sebuah elips dengan titik pusat $(0,0)$ adalah $\frac{4}{5}$ dan jumlah jarak dari titik P pada elips ke titik fokusnya adalah 10 satuan. Hitunglah jarak antara kedua titik fokus.

Jawab:

- Diketahui: Elips berpusat di $O(0,0)$.

  Nilai eksentrisistas yaitu $\frac{4}{5}$.

  Jumlah jarak P ke titik fokusnya adalah 10.

  Ditanyakan: Jarak antar titik fokus.
- Penyelesaian:

  Koordinat titik fokus dimisalkan di $(\pm c, 0)$.

  Koordinat titik puncak dimisalkan di $(\pm a, 0)$.

  $$\therefore 2a = 10 \ \Rightarrow a = 5$$

  Nilai eksentrisitas $= \frac{4}{5} = \frac{\text{jarak titik fokus}}{\text{jarak titik puncak}} = \frac{c}{a}$

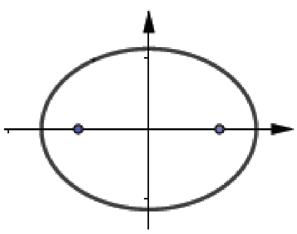
  $$\therefore c = 4$$
- Kesimpulan:

  Jadi jarak antara kedua titik fokus adalah $2c = 8$ satuan.

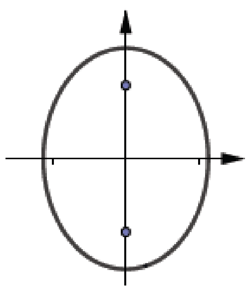
Latihan 2.1

A. Pemahaman

1. Lukislah kurva elips jika titik pusat berada pada koordinat $(0,0)$ dan jarak antara titik pusat dengan titik fokus adalah $\pm c$.
   a. Titik fokus elips pada koordinat $(0, c)$ dan $(0, -c)$
   b. Titik fokus elips pada koordinat $(c, 0)$ dan $(-c, 0)$
2. Tentukan persamaan dan perbedaan antara kedua bentuk elips berikut berdasarkan unsur-unsurnya.



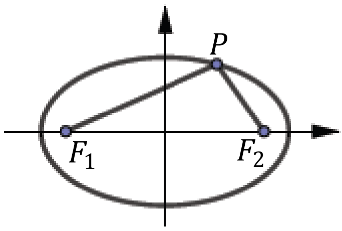
(a)



(b)

B. Penalaran

1. Pernyataan manakah yang salah? Jelaskan.
   (i) Apabila kedua titik fokus saling berimpit maka kurva berbentuk lingkaran.
   (ii) Apabila koordinat titik fokus semakin mendekati titik puncak maka nilai eksentrisitas mendekati 0.
   (iii) Apabila panjang sumbu mayor sama dengan panjang sumbu minor maka kurva berbentuk lingkaran.

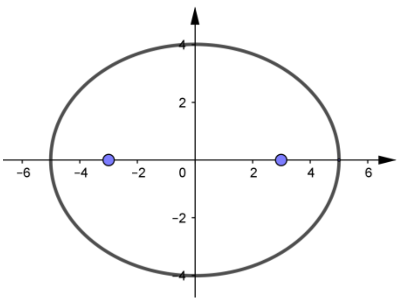


2. Perhatikan gambar di samping. Titik fokus terletak di $(\pm c, 0)$, titik puncak terletak di $(\pm a, 0)$, dan panjang sumbu minor adalah $2b$. Tunjukan:
   a. $F_1P + F_2P = 2a$.
   b. $a^2 = b^2 + c^2$.

C. Persamaan Elips Titik Pusat di $(0,0)$

1. Elips horizontal berpusat di $(0,0)$

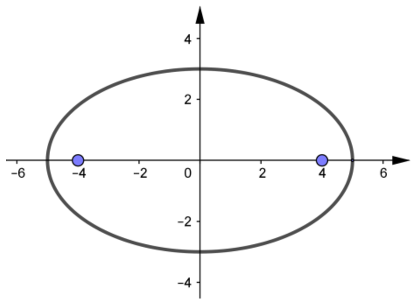
Elips dengan sumbu mayor terletak di sumbu-x sering dikatakan sebagai elips horizontal. Menentukan persamaan elips dapat diketahui dengan mengaplikasikan definisi yang telah diketahui sebelumnya. Berikut merupakan contoh elips horizontal berpusat di $(0,0)$ dan persamaannya.



Gambar 2.6

Elips pada Gambar 2.6 berpusat di $(0,0)$ dengan titik fokus di $(3,0)$ dan $(-3,0)$ serta mempunyai panjang sumbu mayor 10.

Persamaan elips tersebut yaitu $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ atau $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$.



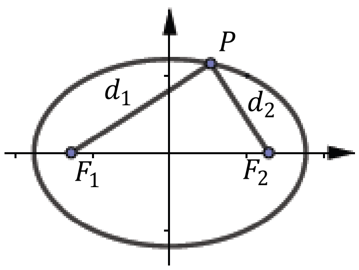
Gambar 2.7

Elips pada Gambar 2.7 berpusat di $(0,0)$ dengan titik fokus di $(4,0)$ dan $(-4,0)$ serta mempunyai panjang sumbu mayor 10.

Persamaan elips tersebut yaitu $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ atau $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

Bagaimana cara untuk menentukan persamaan dari suatu elips? Ikuti dan jawab pertanyaan-pertanyaan pada kegiatan berikut.

Kegiatan 2.2



Gambar 2.8

Persamaan umum elips pada gambar di samping adalah $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Elips berpusat di $(0,0)$. Misalkan $F_1(-c,0)$ dan $F_2(c,0)$ merupakan koordinat titik fokus, $(-a,0)$ dan $(a,0)$ merupakan koordinat titik puncak, dan salah satu titik yang dilewati kurva elips dimisalkan $P(x,y)$. Buktikan persamaan elips tersebut dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Jika d_1 merupakan jarak antara titik $P(x,y)$ dengan titik fokus $F_1(-c,0)$, maka tentukanlah nilai d_1.
2. Jika d_2 merupakan jarak antara titik $P(x,y)$ dengan titik fokus $F_2(c,0)$, maka tentukanlah nilai d_2.
3. Definisi mengatakan bahwa jarak titik-titik pada bidang elips dari dua titik fokus elips selalu sama atau konstan maka $d_1 + d_2 =$ konstan. Berdasarkan hal tersebut maka tentukan persamaan elips yang memenuhi persamaan $d_1 + d_2 = 2a$

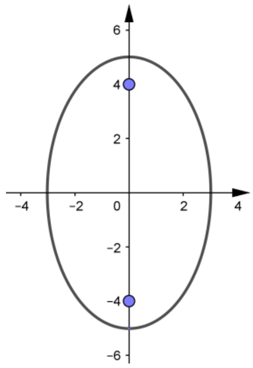
Ingat!

Jarak antara dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

2. Elips vertikal berpusat di $(0, 0)$

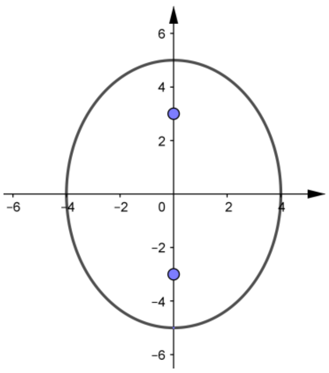
Selain berbentuk horizontal, elips juga dapat pula berbentuk vertikal yaitu elips dengan sumbu mayor terletak pada sumbu-y. Berikut merupakan contoh elips vertikal berpusat di $(0,0)$ dan persamaannya.



Gambar 2.9

Elips pada Gambar 2.8 berpusat di $(0,0)$ dengan titik fokus di $(0,4)$ dan $(0,-4)$ serta mempunyai panjang sumbu mayor 10.

Persamaan elips tersebut yaitu $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ atau $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$.



Gambar 2.10

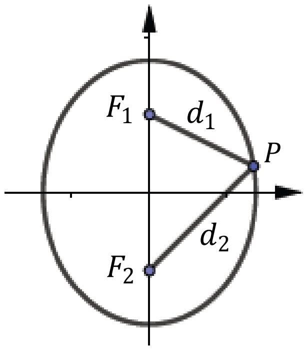
Elips pada Gambar 2.9 berpusat di $(0,0)$ dengan titik fokus di $(0,3)$ dan $(0,-3)$ serta mempunyai panjang sumbu mayor 10.

Persamaan elips tersebut yaitu $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ atau $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$.

Bagaimana cara untuk mengetahui persamaan dari elips horizontal seperti pada contoh di atas? Ikuti dan jawab pertanyaan-pertanyaan pada kegiatan berikut.

Kegiatan 2.3

Misalkan $F_1(0, c)$ dan $F_2(0, -c)$ merupakan titik fokus elips. Pusat elips di titik $(0,0)$. Salah satu titik yang terdapat pada kurva elips dimisalkan $P(x, y)$ dan koordinat puncak elips yaitu $(0, -a)$ dan $(0, a)$.



Gambar 2.11

Ikuti langkah-langkah berikut untuk menentukan persamaan umum elips vertikal berpusat $(0,0)$ bertikut.

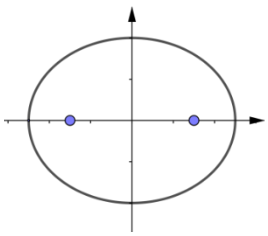
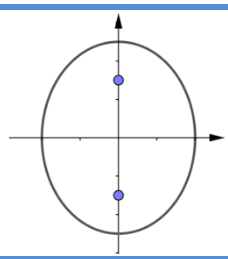
1. Jika d_1 merupakan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus $F_1(0, c)$, maka tentukan nilai d_1.
2. Jika d_2 merupakan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus $F_2(0, -c)$, maka tentukan nilai d_2.
3. Definisi mengatakan bahwa jarak titik-titik pada bidang elips dari dua titik fokus elips selalu sama atau konstan maka $d_1 + d_2 =$ konstan. Berdasarkan hal tersebut maka tentukan persamaan elips yang memenuhi persamaan $d_1 + d_2 = 2a$.

Persamaan elips

....

Diskusikan

Jelaskan persamaan dan perbedaan antara kedua bentuk elips berikut berdasarkan unsur-unsur pembentuknya.

Contoh 2.2

1. Tentukan persamaan elips berpusat di $(0,0)$ dengan titik fokus di $(0, \pm 6)$ dan panjang sumbu mayor 20.

   Jawab:

   - Diketahui: Elips berpusat di $O(0,0)$.

     Titik fokus $(0, \pm 6)$ berarti jarak titik pusat dengan titik fokus yaitu 6.

     Panjang sumbu mayor = 10.

     Ditanyakan: Persamaan elips.

   - Penyelesaian:

     Sumbu mayor = 2 kali jarak pusat terhadap puncak elips $= 2a = 20$

     $\therefore a = 10 \Rightarrow a^2 = 100$

     Jarak titik pusat dengan titik fokus yaitu 6.

     $\therefore c = 6$

     $\Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2$

     $\Leftrightarrow b^2 = 10^2 - 6$

     $\Leftrightarrow b^2 = 100 - 36$

     $\Leftrightarrow b^2 = 64$

     $\Leftrightarrow b = 8^2$

   - Kesimpulan:

     Jadi persamaan elips yaitu $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{100}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\mathbf{64}} = 1$ atau $64x^2 + 100y^2 = 6400$.

2. Tentukan koordinat titik fokus, panjang sumbu mayor dan sumbu minor elips dengan persamaan $9x^2 + 16y^2 = 144$.

   Jawab:

   - Diketahui: Persamaan elips $9x^2 + 16y^2 = 144$.

     Ditanyakan: Titik fokus, panjang sumbu mayor dan minor.

- Penyelesaian:

  Persamaan elips $= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$

  $$\iff \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

  $$\iff \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

  $\therefore$ $a = 4$ dan $b = 3$, maka panjang sumbu mayor $2a = 8$ dan panjang sumbu minor $2b = 9$.

  Titik fokus (c): $c^2 = a^2 - b^2$

  $= 16 - 9$

  $= \sqrt{7}$

- Kesimpulan:

  Jadi panjang titik fokus elips terletak pada koordinat $\left(-\sqrt{7}, 0\right)$ dan $\left(\sqrt{7}, 0\right)$, panjang sumbu mayor adalah 8, dan panjang sumbu minor adalah 9.

Latihan 2.2

A. Pemahaman

1. Tentukan persamaan elips berikut.
   a. Titik fokus di $(0, \pm 12)$ dan titik puncak di $(0, \pm 13)$.
   b. Titik fokus di $(\pm 6, 0)$ dan eksentrisitas 0,6.
   c. Panjang sumbu mayor 50 dan panjang sumbu minor 30.
   d. Panjang sumbu minor 16 dan jarak antar titik fokus adalah 6.
2. Tentukan koordinat titik fokus, titik puncak, panjang sumbu mayor, dan panjang sumbu minor dari persamaan elips berikut.
   a. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

b. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$

c. $25x^2 + 4y^2 = 100$

d. $2x^2 + 3y^2 = 12$

B. Penalaran

1. Jelaskan kurva yang terbentuk apabila nilai $a = b$ pada persamaan $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} = 1$.
2. Tuliskan langkah-langkah yang harus dilakukan untuk mengetahui panjang *latus rectum* elips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
3. Pernyataan manakah yang benar? Jelaskan.
   (i) Persamaan $9x^2 + 25y^2 = 225$ merupakan elips horizontal.
   (ii) Persamaan $36x^2 + 16y^2 = 504$ merupakan elips horizontal
   (iii) Persamaan $49x^2 + 16y^2 = 784$ merupakan elips vertikal.

d. Titik Pusat Elips

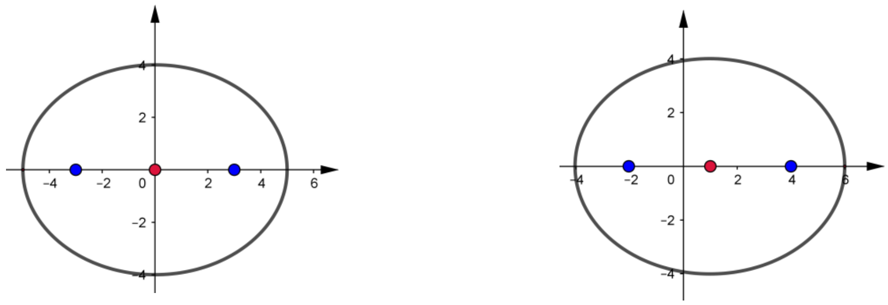
Titik pusat elips merupakan titik perpotongan antara sumbu-sumbu simetrinya. Pembahasan sebelumnya telah dipelajari persamaan elips dengan titik pusat pada $(0,0)$. Namun bagaimanakah persamaan elips apabila titik pusat tidak berada pada koordinat $(0,0)$?

1. Persamaan elips horizontal berpusat di (h, k)

Elips horizontal atau sumbu mayor sejajar sumbu-*y* memiliki persamaan umum $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gambar 2.12 merupakan beberapa contoh elips horizontal dengan panjang sumbu mayor 10 namun memiliki koordinat titik pusat yang berbeda. Perhatikan perbedaan dan persamaan berdasarkan perbedaan koordinat titik fokus pada elips tersebut.

Gambar (a) elips berpusat pada titik $(0,0)$ dan mempunyai persamaan $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

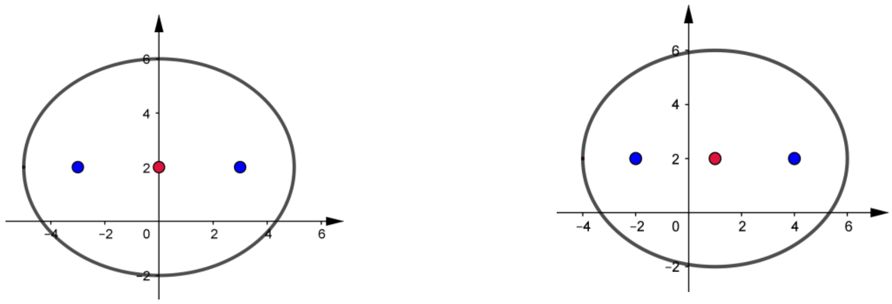
Gambar (b) elips berpusat pada titik $(1,0)$ dan mempunyai persamaan $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.



(a) (b)

Gambar (c) elips berpusat pada titik $(0,2)$ dan mempunyai persamaan $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$.

Gambar (d) elips berpusat pada titik $(0,2)$ dan mempunyai persamaan $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

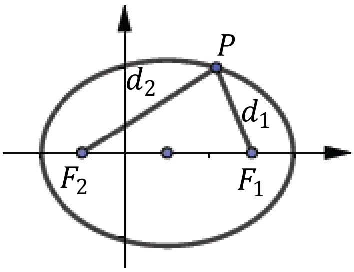


(c) (d)

Gambar 2.12

Berdasarkan contoh di atas tentukan persamaan umum elips horizontal berpusat di (h,k). dengan mengikuti tahapan pada kegiatan di bawah.

Kegiatan 2.4



Misalkan sebuah elips berpusat pada titik (h, k). Titik $F_1(h + c,k$ dan $F2h−c,k$ merupakan titik fokus dan salah satu titik yang dilalui elips dimisalkan $P(x, y)$. Berdasarkan keterangan tersebut jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

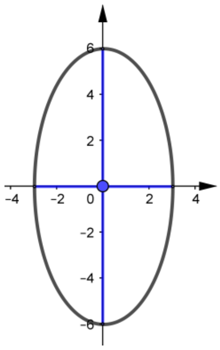
1. Jika d_1 merupakan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus $F_1(h + c, k)$ maka tentukan nilai d_1.
2. Jika d_2 merupakan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus $F_2(h - c, k)$ maka tentukan nilai d_2.
3. Definisi mengatakan bahwa jarak titik-titik pada bidang elips dari dua titik fokus elips selalu sama atau konstan maka $d_1 + d_2 =$ konstan. Berdasarkan hal tersebut maka tentukan persamaan elips yang memenuhi persamaan $d_1 + d_2 = 2a$

Persamaan elips horizontal berpusat di (h, k)

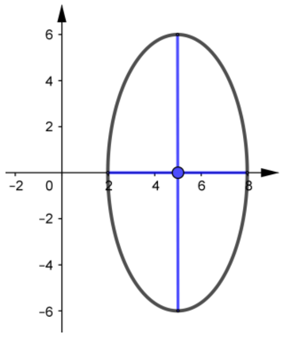
……………………………………………………………………………

2. Persamaan elips vertikal berpusat di (h, k)

Elips vertikal atau sumbu mayor berada pada sumbu-*y* dengan titik pusat pada $(0,0)$ memiliki persamaan umum $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. Gambar berikut merupakan elips vertikal dengan panjang sumbu mayor yaitu 12 dan panjang sumbu minor yaitu 6 namun memiliki letak koordinat titik pusat yang berbeda.



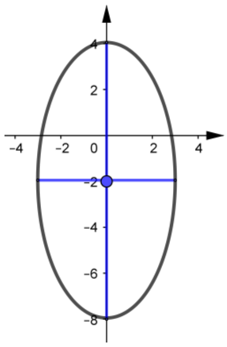
(a)



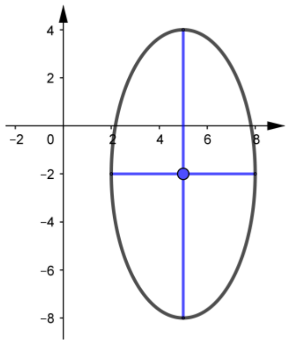
(b)

Gambar (a) merupakan elips vertikal berpusat pada titik $(0,0)$ dan mempunyai persamaan $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$.

Gambar (b) merupakan elips vertikal berpusat di $(5,0)$ dan mempunyai persamaan $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$



(c)

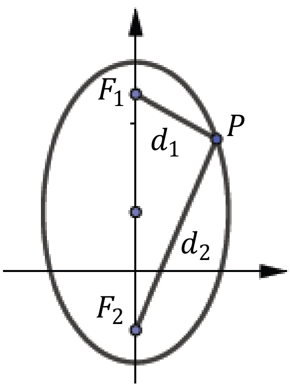


(d)

Gambar (c) merupakan elips vertikal berpusat pada titik $(0,-2)$ dan mempunyai persamaan $\frac{x^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{36} = 1$.

Gambar (d) merupakan elips vertikal berpusat di $(5,-2)$ dan mempunyai persamaan $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{36} = 1$

Berdasarkan contoh di atas tentukan persamaan umum elips vertikal berpusat di (h,k) dengan mengikuti tahapan pada kegiatan di bawah.



Kegiatan 2.5

Misalkan sebuah elips berpusat pada titik (h,k). Titik $F_1(h,k+c)$ dan $F_2(h,k-c)$ merupakan koordinat titik fokus dan salah satu titik yang dilalui elips dimisalkan $P(x,y)$. Berdasarkan keterangan tersebut jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Jika d_1 merupakan jarak antara titik $P(x,y)$ dengan titik fokus $F_1(h,k+c)$ maka tentikan nilai d_1.
2. Jika d_2 merupakan jarak antara titik $P(x,y)$ dengan titik fokus $F_2(h,k-c)$ maka tentukan nilai d_2.

3. Definisi mengatakan bahwa jarak titik-titik pada bidang elips dari dua titik fokus elips selalu sama atau konstan maka $d_1 + d_2 =$ konstan. Berdasarkan hal tersebut maka tentukan persamaan elips yang memenuhi persamaan $d_1 + d_2 = 2a$

Persamaan elips vertikal berpusat di (h, k)

....

Diskusikan

Jelaskan persamaan dan perbedaan elips vertikal dan horizontal yang berpuncak di (h, k) berdasarkan unsur-unsur pembentuknya.

Contoh 2.3

1. Tentukan persamaan elips berpusat di $(4, -2)$, titik puncak di $(9, 2)$ dan salah satu fokusnya $(0, -2)$.

   Jawab:

   - Diketahui: Pusat $(4, -2) = (h, k)$.

     Titik puncak $(9, 2) = (h \pm a, k)$.

     Salah satu fokus $(0, -2) = (h \pm c, k)$. .

Ditanyakan: Persamaan elips.

- Penyelesaian:

✓ $h \pm a = 9$

$4 \pm a = 9 \quad \therefore a = \pm 5$ dan $a^2 = 25$

✓ $h \pm c = 0$

$4 \pm c = 0 \quad \therefore c = \pm 4$ dan $c^2 = 16$

Berdasarkan formula $b^2 = a^2 - c^2$

$\Leftrightarrow b^2 = 25 - 16$

$\Leftrightarrow b^2 = 9$

Persamaan elips yaitu $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ atau

$9(x-4)^2 + 25(y+2)^2 = 225$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 25y^2 - 72x + 100y + 19 = 0$

- Kesimpulan:

Jadi persamaan elips yang terbentuk yaitu

$9x^2 + 25y^2 - 72x + 100y + 19 = 0.$

2. Tentukan unsur-unsur elips dari persamaan $x^2 + 4y^2 - 4x - -8y - 92 = 0.$

Jawab:

- Diketahui:

Persamaan elips $x^2 + 4y^2 - 4x - -8y - 92 = 0.$

- Penyelesaian:

$x^2 + 4y^2 - 4x - -8y - 92 = 0$ diubah ke dalam bentuk baku yaitu

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 92 + 4 + 4$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 100$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{100} + \frac{4(y-1)^2}{25} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{10^2} + \frac{4(y-1)^2}{5^2} = 1$$

✓ Pusat elips yaitu $(2,1)$

✓ Panjang sumbu mayor $= 2a$ dan $a = 10$ sehingga $2.10 = 20$

- ✓ Panjang sumbu minor $= 2b$ dan $b = 5$ sehingga $2.5 = 10$
- ✓ Koordinat titik fokus:

  Mencari koordinat titik fokus (c) yaitu

  $$c^2 = a^2 - b^2$$
  $$\Leftrightarrow c^2 = 100 - 25$$
  $$\Leftrightarrow c^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2$$
  $$\therefore c = \pm\left(5\sqrt{3}\right)^2$$

  Sehingga titik fokus terletak pada koordinat $(2 -$ *53, 1* dan *2+53, 1*
- ✓ Koordinat titik puncak elips:

  $(2 + 10, 1) = (12,1)$ dan $(2 - 10, 1) = (-8,1)$

Latihan 2.3

A. Pemahaman

1. Tentukan persamaan elips berikut.
   a. Pusat $(1, -2)$ dan eksentrisitas $\frac{4}{5}$.
   b. Pusat $(1, -2)$, koordinat salah satu fokus $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, dan panjang sumbu minor 1.
   c. Titik fokus $(3,2)$ dan $(1, 2)$ serta panjang sumbu mayor 10.
2. Tentukan koordinat titik fokus elips pada persamaan berikut.
   a. $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$
   b. $25x^2 - 100x + 9y^2 + 72y + 19 = 0$
   c. $9x^2 + 25y^2 - 18x + 50y - 191 = 0$
3. Tentukan koordinat titik pusat, puncak, dan fokus elips dari persamaan berikut.
   a. $\frac{(x-7)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$
   b. $25(x - 3)^2 + 4(y - 1)^2 = 100$
   c. $4x^2 + 16(y - 3)^2 = 64$

B. Penalaran

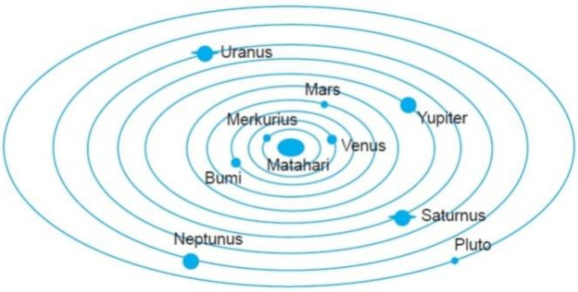
1. $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ merupakan tali busur elips. Jelaskan cara menentukan panjang $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ serta koordinat titik A, B, C, dan D.
2. Eksentrisitas sebuah elips adalah $\frac{4}{5}$ dan jumlah jarak dari titik P pada elips ke titik fokusnya adalah 10 satuan. Bagaimanakah cara menetukan jarak antara kedua titik fokus?

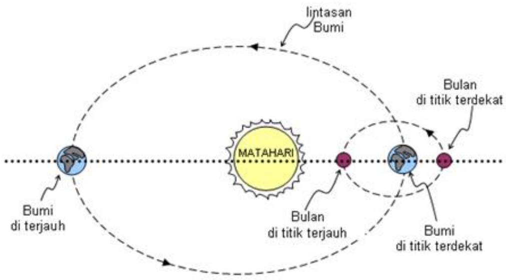
e. Aplikasi Elips

Benda atau fenomena yang membentuk suatu elips dapat ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Selain ditemukan pada berbagai benda, konsep dan perhitungan dalam elips pun seringkali digunakan dalam berbagai bidang ilmu.

1. Orbit Benda-benda Langit

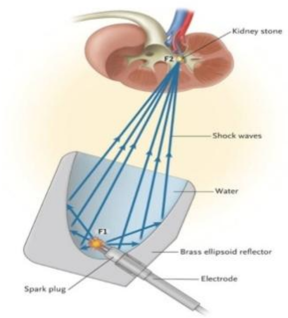
Planet-planet dan beberapa benda langit lainnya beredar mengelilingi matahari dengan lintasan yang berbentuk elips sehingga disebut lintasan eliptik. Hal ini diungkapkan dalam hukum I Keppler yang menyatakan bahwa planet-planet beredar dalam lintasan berbentuk elips dengan matahari berada pada salah satu titik fokusnya.





Bentuk lintasan planet-planet dipengaruhi oleh gaya gravitasi. Ketika planet bergerak mendekati matahari maka gaya gravitasi yang dirasakan planet semakin besar dan mengalami percepatan kecepatan. Saat berada pada titik terdekat dengan matahari (*perihelion*), gabungan antara kecepatan maksimum planet dan tarikan gaya gravitasi menuju matahari melontarkan kembali planet tersebut menjauh dari matahari. Meskipun bergerak menjauh, tarikan gaya gravitasi matahari masih akan dirasakan dan planet mengalami perlambatan kecepatan. Ketika mencapai titik terjauh dari matahari (*aphelion*), planet kembai bergerak mendekati matahari.

2. Pengobatan Batu Ginjal

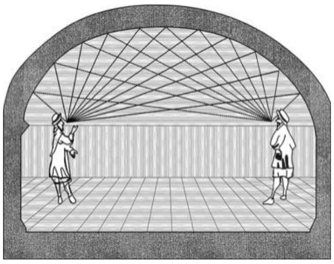


Salah satu prosedur medis yang menggunakan sifat elips yaitu terapi untuk menghancurkan batu ginjal dengan menggunakan gelombang kejut yang disebut dengan ESWL (*Extracrporeal Shock Wave Lithotripsy*). Batu ginjal diposisikan sebagai salah satu fokus dan disejajarkan dengan sumber gelombang kejut sebagai titik fokus lainnya untuk menghancurkan batu ginjal tersebut. Setelah batu ginjal hancur dan menjadi serpihan maka bisa melewati tubuh tanpa rasa sakit.

3. Elliptical Trainers

Elipstical trainers merupakan alat yang digunakan untuk mensimulasikan gerak berlari tanpa adanya dampak pada sendi pengguna. Kaki pengguna menggambarkan bentuk elips saat mesin digunakan. Mesin digerakkan dengan setang dan tungkai kaki saling bergantung dan saling memberi gerak. Alat ini digunakan oleh orang-orang yang ingin menghindari cedera sendi akibat berlari.

4. Galeri Bisikan (*Whispering Gallery*)



Salah satu sifat yang dimiliki elips yaitu jika cahaya atau gelombang suara berasal dari satu fokus maka akan tercermin pada fokus lainnya. Galeri bisikan atau *whispering gallery* merupakan sebuah galeri yang memungkinkan seseorang yang berbisik di satu tempat untuk bisa didengar dengan jelas oleh seseorang di tempat lain tapi tidak oleh orang lain.

Contoh galeri bisikan yang terkenal yaitu *United States Statuary Capitol Hall* dan *Katedral St. Paul* di London.

Contoh 2.5

1. Lintasan komet kohutek yaitu kira-kira 44 satuan astronomi lebarnya dan memiliki panjang lintasan kira-kira 3.600 satuan astronomi. Satu satuan astronomi (AU) merupakan jarak rata-rata bumi dari matahari. Berapakah nilai eksentrisitas lintasan komet Kohutek tersebut?

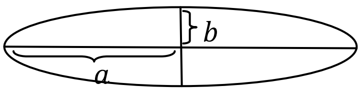
   Jawab:

   - Diketahui: Lebar lintasan $= 44\ AU$

     Panjang lintasan $= 3600\ AU$

     Ditanyakan: Nilai eksentrisitas komet.

   - Sketsa: Bentuk lintasan komet bisa digambarkan seperti berikut.

     a merupakan panjang lintasan komet atau berperan sebagai sumbu mayor elips.

     b merupakan lebar lintasan komet atau berperan sebagai sumbu minor elips.

   - Penyelesaian:

     Nilai eksentrisitas elips yaitu $e = \frac{\text{jarak titik fokus}}{\text{jarak titik puncak}} = \frac{c}{a}$ dengan $0 < e < 1$.

Menentukan nilai c yaitu $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Lebar lintasan $= 44\ AU = 2b$

$\therefore b = 22$

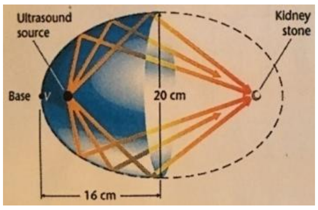
Panjang lintasan $= 3600\ AU = 2a$

$\therefore a = 1.800$

Maka $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{1800^2-b22^2}}{1800} \approx 0{,}9999$

- Kesimpulan:

  Jadi, nilai eksentrisitas komet kohutek adalah 0,9999.



2. *Lithotripter* merupakan sebuah alat yang digunakan dalam salah satu prosedur medis untuk mengobati batu ginjal. *Lithotripter* berbentuk setengah elips yang memutar dengan sumbu minor diputar mengelilingi sumbu mayor. Lebar *lithotripter* adalah 20 cm dengan kedalaman 16 cm. Jika sumber ultrasonik diposisikan pada salah satu fokus elips dan batu ginjal pada fokus yang lainnya, maka semua gelombang suara akan melewati batu ginjal. Hitunglah berapa jarak batu ginjal dari titik V sehingga *lithotripter* dapat diposisikan dengan tepat?

Jawab:

- Diketahui: Lebar *lithotripter* $= 20$

  Kedalaman *lithotripter* $= 16$

  Ditanyakan: Jarak batu ginjal dari titik V.

- Penyelesaian:

  Lebar *lithotripter* $= 20 = 2b$

  $\therefore b = 10$

  Kedalaman *lithotripter* $= 16 = a$

  Posisi batu ginjal = titik fokus elips (c)

  dan $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$c = \sqrt{16^2 - 10^2}$$

$$c = \sqrt{156}$$

$$c = 12{,}5$$

Jarak antara titik fokus dengan titik V $= 16 + 12{,}5 = 28{,}5$.

- Kesimpulan:

  Jadi, jarak antara batu ginjal dengan dasar dari *lithotripter* adalah 28,5 cm.

Latihan 2.5

A. Penerapan

1. Orbit bumi berbentuk elips dengan matahari sebagai salah satu fokusnya. Panjang sumbu mayor adalah 186.000.000 mil dan eksentrisitasnya adalah 0,0167. Tentukan jarak dari ujung sumbu mayor ke matahari. Jarak tersebut merupakan jarak terjauh dari bumi ke matahari.
2. Sebuah pintu berbentuk setengah busur elips lebarnya 10 kaki dan tingginya di tengah-tengah 4 kaki. Sebuah peti tinggi 2 kaki harus dimasukan melalui pintu itu. Berapakah lebar peti tersebut agar hal itu mungkin?
3. Terdapat sebuah galeri yang disebut *whispering gallery* atau galeri bisikan. Dalam galeri tersebut apabila seseorang berbisik pada satu titik fokus maka akan terdengar di titik fokus yang lain. Misalkan bentuk penampang ruangan tersebut adalah lengkung semi elips yang lebarnya 80 kaki dan tinggi 24 kaki.
   a. Seberapa jauh jarak masing-masing fokus dari pusat lengkungan?
   b. Seberapa tinggi lengkungan di atas masing-masing fokus?

B. Penalaran

1. Perhatikan soal berikut.

Lintasan bumi berbentuk elips dengan matahari berada di salah satu fokusnya. Jarak maksimum antara bumi dan matahari adalah 94,56 juta mil dan jarak minimum adalah 91,45 juta mil. Berapakah keeksentrikan lintasan bumi? Berapakah garis tengah panjang dan garis tengah pendek lintasan?

Apakah penyelesaian berikut bernilai benar atau salah? Jelaskan.

Misalkan:

- a = setengah garis tengah panjang
- c = jarak dari pusat lintasan ke matahari.
- $a + c = 94{,}56$
- $a - c = 91{,}45$

Jadi: $\therefore a = 93{,}01$ dan $c = 1{,}56$.

(i) Keeksentrikan lintasan

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1{,}56}{93{,}01} = 0{,}017$$

Jadi, keeksentrikan lintasan adalah $0{,}017$.

(ii) Garis tengah panjang.

$2a = 186{,}02$

Jadi, garis tengah panjang adalah $186{,}02$.

(iii) Garis tengah pendek yaitu.

$2b = 2(91{,}45) = 182{,}9$

Jadi, garis tengah pendek adalah $182{,}9$.

RANGKUMAN

1. Elips adalah himpunan titik-titik pada sebuah bidang yang jumlah jaraknya terhadap dua titik (titik fokus) tertentu selalu sama.
2. Persamaan umum elips berpusat di $(0,0)$
   - Sumbu mayor adalah sumbu-*x*

     $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ atau $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, dengan $a>b$.
   - Sumbu mayor adalah sumbu-*y*

     $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ atau $a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2$, dengan $a>b$.
3. Persamaan umum elips berpusat di (h,k)
   - Sumbu mayor sejajar sumbu-*x*

     $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ atau $b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$, dengan $a>b$.
   - Sumbu mayor sejajar sumbu-*y*

     $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ atau $a^2(x-h)^2+b^2(y-k)^2=a^2b^2$, dengan $a>b$.

Jurnal Belajar Siswa

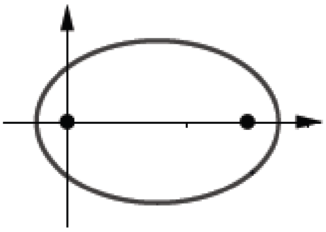
1. Berdasarkan pembelajaran yang telah dilakukan, berikan ringkasan tentang apa yang telah dipelajari dengan menggunakan kalimat sendiri.
2. Manakah subbab yang paling sulit untuk dipahami? Jelaskan alasan kesulitan dalam memahami.
3. Manakah subbab yang paling mudah untuk dipahami? Jelaskan alasan kemudahan dalam memahami.

Evaluasi Elips

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang paling benar.

1. Garis lurus yang menghubungkan kedua titik fokus elips adalah...
   a. Sumbu mayor
   b. *Latus rectum*
   c. Sumbu panjang elips
   d. Sumbu minor
   e. Sumbu fokal

2. Persamaan umum elips di samping adalah...



   a. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
   b. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
   c. $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
   d. $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
   e. $\frac{(x+h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

3. Persamaan elips yang berpusat di $(1,2)$ dan salah satu fokusnya di $(6,2)$ serta melalui titik $(4,6)$ adalah...
   a. $\frac{(x-1)^2}{40} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$
   b. $\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$
   c. $\frac{(x-1)^2}{40} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$
   d. $\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$
   e. $\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y-2)^2}{45} = 1$

4. Panjang *latus rectum* $\overline{AB}$ dari persamaan elips $x^2 - 2x + 4y^2 - 8y - 11 = 0$ adalah...
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
   e. 5

5. Salah satu koordinat titik fokus elips $25x^2 - 100x + 9y^2 + 72y + 19 = 0$ adalah...
   a. $(2,9)$
   b. $(2,0)$
   c. $(6,-4)$
   d. $(2,-4)$
   e. $(-1,-4)$

6. Persamaan elips berpusat di $(0,0)$, titik fokus di $(10,0)$ dan $-10,0)$ dengan panjang sumbu mayor 24 adalah...

   a. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{44} = 1$

   b. $\frac{x^2}{44} + \frac{y^2}{144} = 1$

   c. $\frac{x^2}{44} + \frac{y^2}{12} = 1$

   d. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{44} = 1$

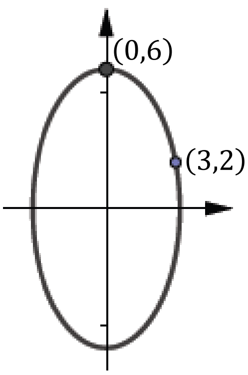
   e. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{144} = 1$

7. Titik fokus dari elips $25x^2 + 9y^2 - 100x - 18y - 116 = 0$ adalah...

   a. $(-2,1)$ dan $(6,1)$
   b. $(-6,1)$ dan $(2,1)$
   c. $(2,-3)$ dan $(2,5)$
   d. $(2,3)$ dan $(2,-5)$
   e. $(2,4)$ dan $(2,8)$

8. Nilai eksentrisitas elips $16x^2 + 25y^2 + 32x - 50y - 359 = 0$ adalah...

   a. 0,7
   b. 0,6
   c. 0,5
   d. 0,4
   e. 0,3



9. Persamaan elips seperti pada gambar di samping mempunyai persamaan ...

   a. $32x^2 + 9y^2 = 324$
   b. $9x^2 + 32y^2 = 324$
   c. $30x^2 + 9y^2 = 306$
   d. $9x^2 + 30y^2 = 306$
   e. $28x^2 + 9y^2 = 288$

10. Persamaan garis direktriks dari elips $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$ adalah...

   a. $x\sqrt{5} \pm 18 = 0$
   b. $x\sqrt{5} \pm 9 = 0$
   c. $x \pm 9\sqrt{5} = 0$
   d. $x \pm 18\sqrt{5} = 0$
   e. $9x \pm \sqrt{5} = 0$

11. Panjang sumbu mayor elips $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y - 4 = 0$ adalah...
    a. 1
    b. 2
    c. 3
    d. 6
    e. 12
12. Jika diketahui elips dengan persamaan $9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y - 164 = 0$ maka...
    a. pusatnya $(2, -1)$
    b. fokus $(6, -1)$ dan $(-2, -1)$
    c. puncak pada sumbu minor $(2,4)$ dan $(2, -2)$
    d. puncak pada sumbu mayor $(7, -1)$ dan $(-3, -1)$
    e. luas elips $= 225\pi$
13. Panjang sumbu minor elips dengan persamaan $4x^2 + 5y^2 + 20x - 10y + 1 = 0$ adalah ...
    a. 2
    b. $\sqrt{5}$
    c. $2\sqrt{5}$
    d. 4
    e. 6
14. Panjang *latus rectum* dari persamaan elips $x^2 + 4y^2 - 2x - 8y - 11 = 0$ adalah ...
    a. 1
    b. 2
    c. 3
    d. 4
    e. 5
15. Kordinat titik fokus elips dengan persamaan $9x^2 + 25y^2 - 18x + 50y - 191 = 0$ adalah ...
    a. $(-3, -1)$ dan $(5, -1)$
    b. $(-3, 1)$ dan $(5, 1)$
    c. $(-1, 3)$ dan $(-5, 1)$
    d. $(1, 5)$ dan $(1, -5)$
    e. $(5, 3)$ dan $(-3, 5)$

3 HIPERBOLA

Pembahasan materi hiperbola diantaranya:

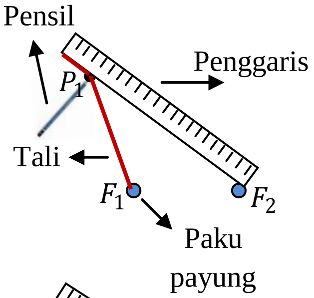
- ✓ Melukis hiperbola
- ✓ Definisi hiperbola
- ✓ Unsur-unsur hiperbola
- ✓ Persamaan hiperbola
- ✓ Titik pusat hiperbola
- ✓ Aplikasi hiperbola

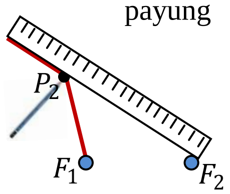
Apabila melintasi sebuah pabrik atau daerah perindustrian kita dapat menemukan beberapa menara pendingin yaitu cerobong tinggi yang mengeluarkan asap putih atau hitam. Menara pendingin berfungsi melepaskan panas berlebih ke atmosfer dengan mendinginkan fluida panas ke suhu yang lebih rendah. Sebagian besar menara pendingin dibuat dengan bentuk tertentu yaitu dasar menara melebar, menyempit di tengah-tengah menara, dan menjadi lebar lagi di bagian atas. Bentuk tersebut biasa disebut sebagai hiperboloid.

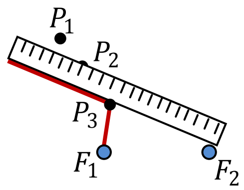
Mengapa bentuk menara tersebut disebut sebagai bentuk hiperboloid? Mengapa beberapa menara pendingin didesain dengan bentuk hiperboloid? Apa manfaat yang diperoleh dengan mendesain bentuk hiperboloid untuk menara pendingin? Adakah benda atau fenomena lainnya yang membentuk sebuah hiperbola atau hiperboloid? Beberapa pertanyaan tersebut akan terjawab dengan mempelajari pembahasan selanjutnya tentang salah kurva hiperbola.

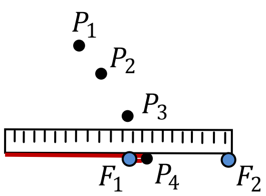
a. Melukis dan Pengertian Hiperbola

Hiperbola merupakan salah satu kurva yang terbentuk oleh perpotongan sebuah bidang terhadap kerucut. Kurva berbentuk hiperbola diperoleh ketika sebuah bidang memotong sejajar terhadap sumbu kerucut.





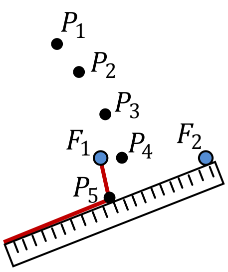


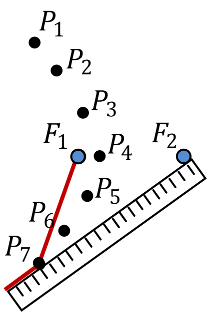


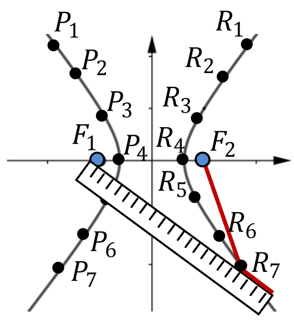
Kegiatan 3.1

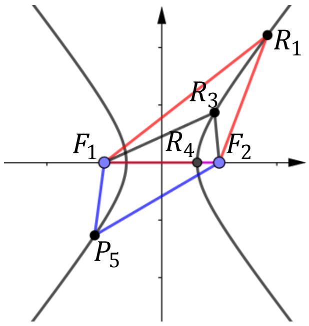
Menggambar sebuah hiperbola dapat dilakukan dengan menggunakan peralatan yang cukup sederhana.

1. Sediakan sebuah penggaris, benang/tali, dua buah paku payung, pensil, dan perekat.
2. Buat dua titik yaitu F_1 dan F_2 serta tancapkan paku payung pada kedua titik tersebut.
3. Potong benang lebih pendek daripada panjang penggaris.
4. Ikat salah satu ujung benang ke salah satu paku payung dan ujung lainnya pada ujung penggaris.
5. Letakan ujung penggaris yang tidak terdapat benang pada paku payung yang tidak diikat benang.
6. Geser penggaris dari arah luar mendekati letak paku payung atau sebaliknya.
7. Gerakkan pensil mengikuti gerakan penggaris dengan merentangkan benang ke arah penggaris dan jaga benang tetap kencang.
8. Lakukan seperti langkah sebelumnya dengan menempatkan segitiga pada posisi berlawanan.









Gambar 3.1

Pergerakan pensil melalui titik-titik secara kontinu membentuk sebuah kurva yang dinamakan hiperbola. Berdasarkan titik-titik tersebut jawablah pertanyaan di bawah ini.

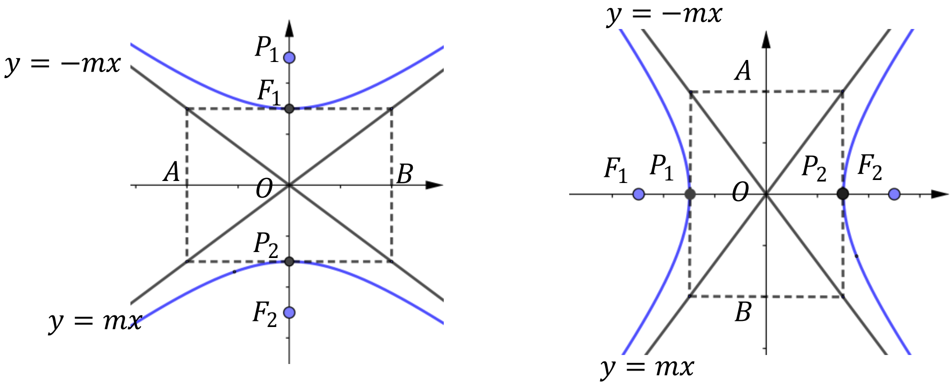
1. Apakah jarak $|\overline{F_1R_1} - \overline{F_2R_1}|$ sama dengan jarak $|\overline{F_1R_3} - F2R3$?
2. Apakah jarak $|\overline{F_1R_3} - \overline{F_2R_3}|$ sama dengan jarak $|\overline{F_1R_4} - F2R4$?
3. Apakah jarak $|\overline{F_1R_4} - \overline{F_2R_4}|$ sama dengan jarak $|\overline{F_1P_5} - F2P5$?
4. Letakkan sebarang titik pada kurva hiperbola (selain titik-titik yang terdapat pada contoh). Apakah selisih jarak titik tersebut terhadap kedua titik fokus sama dengan selisih jarak titik lainnya?

Diskusikan

Berdasarkan jawaban dari pertanyaan di atas dan informasi lainnya, tuliskan definisi hiperbola dengan menggunakan kata-kata sendiri.

b. Unsur-unsur Hiperbola

Hiperbola merupakan himpunan titik-titik yang selisih jarak terhadap dua titik tertentu selalu sama. Terdapat beberapa unsur pembentuk hiperbola, mari kita gambarkan kembali beberapa contoh hiperbola untuk lebih memudahkan dalam mengenali unsur-unsur pembentuknya.



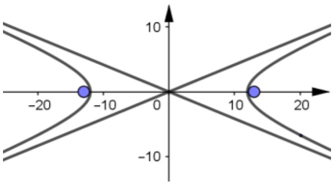
Gambar 3.2

Berikut merupakan unsur-unsur hiperbola berdasarkan contoh pada gambar di atas.

1. Titik O pada masing-masing hiperbola merupakan titik pusat hiperbola.
2. Titik F_1 dan F_2 masing-masing merupakan titik fokus hiperbola.
3. Titik P_1 dan P_2 masing-masing merupakan titik puncak hiperbola.
4. Ruas garis $\overline{P_1P_2}$ masing-masing merupakan panjang sumbu utama atau sumbu mayor hiperbola.
5. Ruas garis $\overline{AB}$ masing-masing merupakan panjang sumbu sekawan atau sumbu minor hiperbola.
6. Garis $y = mx$ dan $y = -mx$ masing-masing merupakan asimtot hiperbola.

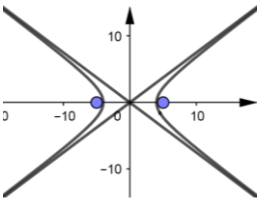
Eksentrisitas (e) dan Persamaan Asimtot

Nilai eksentrisitas (e) akan menentukan bentuk suatu hiperbola dan sudut persimpangan asimtot. Perhatikan contoh hiperbola di bawah ini.



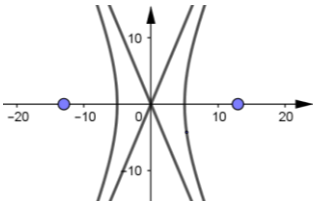
(a)

Titik fokus parabola pada Gambar (a) berada pada koordinat $(\pm 13,0)$ dan titik puncak berada pada koordinat $(\pm 12,0)$. Panjang sumbu minor adalah 10 satuan. Nilai eksentrisitas hiperbola tersebut adalah $\frac{13}{12}$ atau 1,08. Persamaan asimtot yaitu $y = \frac{5}{12}x$ dan $y = -\frac{5}{12}x$.



(b)

Titik fokus parabola pada Gambar (b) berada pada koordinat $(\pm 5,0)$ dan titik puncak berada pada koordinat $(\pm 4,0)$. Panjang sumbu minor adalah 6 satuan. Nilai eksentrisitas hiperbola tersebut adalah $\frac{5}{4}$ atau 1,25. Persamaan asimtot yaitu $y = \frac{3}{4}x$ dan $y = -\frac{3}{4}x$.



(c)

Titik fokus parabola pada Gambar (c) berada pada koordinat $(\pm 13,0)$ dan titik puncak berada pada koordinat $(\pm 5,0)$. Panjang sumbu minr adalah 24 satuan. Nilai eksentrisitas hiperbola tersebut adalah $\frac{13}{5}$ atau 2,6. Persamaan asimtot yaitu $y = \frac{12}{5}x$ dan $y = -\frac{12}{5}x$.

Diskusikan

Berdasarkan informasi sebelumnya, tuliskan definisi unsur-unsur hiperbola pada tabel berikut.

Tabel 3.1 Unsur-unsur Hiperbola

Unsur Hiperbola	Definisi
Titik pusat	
Titik fokus	

Unsur Hiperbola	Definisi
Titik puncak	
Sumbu utama/ mayor	
Sumbu sekawan/ minor	
Eksentrisitas	

Latihan 3.1

A. Pemahaman

1. Lukislah kurva hiperbola berdasarkan koordinat titik fokus dan titik puncak berikut.
   a. Titik pusat $(0,0)$, sumbu mayor pada sumbu-y, jarak antara titik pusat dengan titik puncak adalah 7 dan jarak antara titik puncak dengan titik fokus adalah 10.
   b. Titit pusat $(0,0)$, panjang sumbu mayor 12, dan jarak antara titik puncak dengan titik fokus adalah 2 satuan.

B. Penalaran

1. Pernyataan manakah yang bernilai benar? Jelaskan.
   (i) Jika titik puncak hiperbola berada pada koordinat $(0,3)$ dan $(0,-5))$ maka titik pusat hiperbola berada pada koordinat $(1,0)$.
   (ii) Jika titik pusat hiperbola berada pada koordinat $(0,-1)$ dan jarak antara titik pusat dengan titik fokus adalah 6 satuan maka salah satu koordinat titik fokus adalah $(0,5)$.

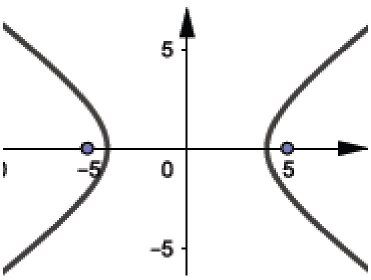
(iii) Jika titik pusat hiperbola berada pada koordinat $(-2,0)$ dan jarak antara titik pusat dan titik puncak adalah 4 satuan maka koordinat kedua titik puncak adalah $(2,0)$ dan $(0,-6)$.

2. Jelaskan persamaan dan perbedaan hiperbola dengan koordinat titik fokus $(\pm c, 0)$ dan $(0, \pm c)$.

c. Persamaan Hiperbola Titik Pusat di $(0, 0)$

1. Hiperbola berpusat di $(0, 0)$ dan titik fokus terletak pada sumbu-*x*

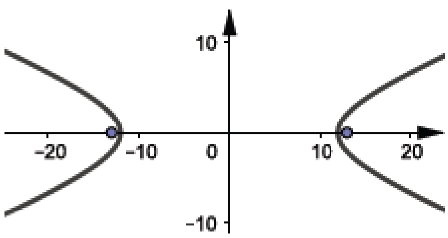
Menentukan persamaan sebuah hiperbola dapat diketahui dengan mengaplikasikan definisi yang telah diketahui sebelumnya. Berikut merupakan contoh kurva hiperbola dan persamaannya.



Gambar 3.4

Hiperbola pada Gambar 3.4 berpusat di $(0,0)$ dengan titik fokus di $(\pm 5,0)$ dan titik puncak $(\pm 4,0)$.

Persamaan hiperbola tersebut yaitu $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ atau $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$.



Gambar 3.5

Hiperbola pada Gambar 3.5 berpusat di $(0,0)$ dengan titik fokus di $(\pm 13,0)$ dan titik puncak di $(-12,0)$.

Persamaan hiperbola tersebut yaitu $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1$ atau $\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$.

Bagaimana cara menentukan persamaan umum hiperbola dengan titik fokus berada pada sumbu-*x*? Ikuti kegiatan di bawah ini.

Kegiatan 3.2

Misalkan $F_1(-c, 0)$ dan $F_2(c, 0)$ merupakan koordinat titik fokus hiperbola. Salah satu titik yang melewati kurva hiperbola dimisalkan $P(x, y)$ dan koordinat titik puncak hiperbola yaitu $(-a, 0)$ dan $(a, 0)$. Jawablah pertanyaan-pertanyaan dibawah.

1. Jika d_1 merupakan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus $F_1(-c, 0)$ maka tentukan nilai d_1.
2. Jika d_2 merupakan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus $F_2(c, 0)$, maka tentukan nilai d_2.
3. Hiperbola merupakan himpunan titik-titik yang memiliki selisih jarak yang sama terhadap dua titik tertentu. Sebelumnya telah diketahui bahwa nilai konstan hiperbola yaitu $2a$. Berdasarkan hal tersebut maka tentukan persamaan hiperbola yang memenuhi persamaan $|d_1 - d_2| = 2a$.

Ingat!

Jarak antara dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$

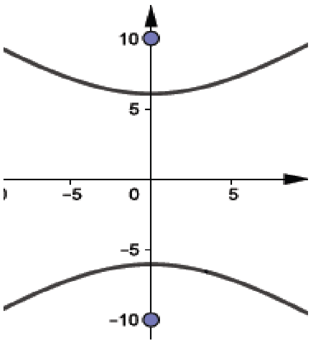
$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2}$$

Persamaan hiperbola
(titik fokus berada pada sumbu-*x*)

....

2. Hiperbola berpusat di $(0, 0)$ dan titik fokus terletak pada sumbu-*y*

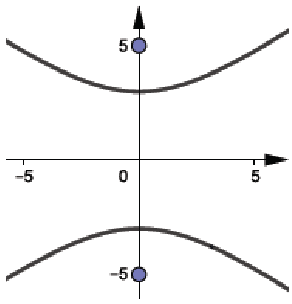
Selain terletak pada sumbu-*x*, titik fokus hiperbola berpusat di (0,0) dapat pula terletak pada sumbu-*y* sehingga persamaan dan koordinat unsur-unsur hiperbola menjadi berubah. Berikut merupakan contoh bentuk kurva hiperbola dan persamaannya.



Gambar 3.6

Hiperbola pada Gambar 3.6 berpusat di $(0,0)$ dengan titik fokus di $(0, \pm 10)$ dan titik puncak di $(0, \pm 6)$.

Persamaan elips tersebut yaitu $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ atau $\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1$.



Gambar 3.7

Hiperbola pada Gambar 3.7 berpusat di $(0,0)$ dengan titik fokus di $(0, \pm 5)$ dan titik puncak di $(0, \pm 3)$.

Persamaan elips tersebut yaitu $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ atau $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$.

Bagaimana cara untuk mengetahui persamaan hiperbola dengan titik fokus berada pada sumbu-*y*? Ikuti dan jawab pertanyaan-pertanyaan pada kegiatan di bawah ini.

Kegiatan 3.3

Misalkan $F_1(0, c)$ dan $F_2(0, -c)$ merupakan koordinat titik fokus hiperbola. Salah satu titik yang melalui kurva hiperbola dimisalkan $P(x, y)$ dan koordinat titik puncak hiperbola yaitu $(0, -a)$ dan $(0, a)$. Jawablah pertanyaan-pertanyaan dibawah.

1. Jika d_1 merupakan antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus $F_1(0, c)$ maka tentukan nilai d_1.
2. Jika d_2 merupakan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus $F_2(0, -c)$ maka tentukan nilai d_2.

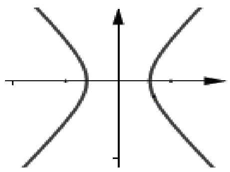
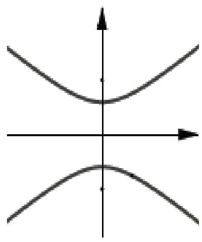
3. Hiperbola merupakan himpunan titik-titik yang memiliki selisih jarak yang sama terhadap dua titik tertentu. Sebelumnya telah diketahui bahwa nilai konstan pada hiperbola yaitu $2a$.

   Berdasarkan hal tersebut maka tentukan persamaan elips yang memenuhi persamaan $|d_1 - d_2| = 2a$.

Persamaan hiperbola **(titik fokus berada pada sumbu-*y*)**
....

Diskusikan

Tuliskan persamaan dan perbedaan dari kedua hiperbola berikut berdasarkan unsur-unsur pembentuknya.

Contoh 3.1

1. Tentukan koordinat titik fokus, panjang sumbu utama, dan panjang sumbu sekawan dari persamaan hiperbola $2x^2 - y^2 = 10$.

   Jawab:

   - Diketahui: Persamaan hiperbola $2x^2 - y^2 = 10$.

     Ditanyakan: Titik fokus, panjang sumbu utama dan sekawan.

   - Penyelesaian:

     Persamaan $2x^2 - y^2 = 10$

     $$\Leftrightarrow \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{10} = 1,$$

     $$\therefore a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5} \text{ dan}$$

     $$b^2 = 10 \Rightarrow a = \sqrt{10}$$

     Mencari titik fokus hiperbola (c): $c^2 = a^2 + b^2$

     $$= 5 + 10$$

     $$= 15$$

     $$c = \sqrt{15}$$

     Maka kordinat titik fokus terletak di $\left(-\sqrt{15}, 0\right)$ dan $\left(\sqrt{15}, 0\right)$.

     Panjang sumbu utama yaitu $2a = 2.\sqrt{5} \approx 4{,}47$.

     Panjang sumbu sekawan yaitu $2b = 2.\sqrt{10} \approx 6{,}32$.

   - Kesimpulan:

     Jadi titik fokus terletak di $\left(\pm\sqrt{15}, 0\right)$, panjang sumbu utama yaitu 4,47, dan panjang sumbu sekawan yaitu 6,32.

2. Tentukan persamaan hiperbola dengan titik pusat di (0,0) jika panjang sumbu utama 12 dan panjang sumbu sekawan 20.

Jawab:

- Diketahui: Sumbu utama $= 12$.

  Sumbu sekawan $= 20$.

  Ditanyakan: Persamaan hiperbola.

- Penyelesaian:

  Persamaan hiperbola yaitu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

  Sumbu utama $= 2a = 12$

  $\therefore\ a = 6$

  Sumbu sekawan $= 2b = 20$

  $\therefore\ b = 10$

  Maka $\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{10^2} = 1$ atau $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{100} = 1$

- Kesimpulan:

  Jadi persamaan hiperbola dengan sumbu utama 12 dan sumbu sekawan 20 yaitu $\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{10^2} = 1$.

Latihan 3.2

A. Pemahaman

1. Tentukan koordinat titik fokus, panjang sumbu utama, dan panjang sumbu sekawan dari persamaan hiperbola berikut.
   a. $3x^2 - 2y^2 = 12$
   b. $7y^2 - 4x^2 = 28$
   c. $3x^2 - 4y^2 = 24$
2. Tentukan persamaan hiperbola jika diketahui.
   a. Sumbu utama berada pada sumbu-*x*, panjang sumbu utama $= 18$, dan jarak antara titik pusat dengan fokus $= 11$.
   b. Koordinat titik puncak $(0, \pm 1)$ dan titik fokus $(0, \pm 2)$
   c. Sumbu utama berada pada sumbu-*y*, panjang sumbu utama $= 16$, dan jarak antara titik pusat dengan fokus $= 22$.

3. Tentukan persamaan hiperbola jika diketahui.
   a. Koordinat titik puncak $(\pm 10, 0)$ dan persamaan garis asimtot $y = \pm 2x$
   b. Koordinat titik puncak $(0, \pm 7)$ dan persamaan garis asimtot $y = 3{,}5x$
   c. Koordinat titik puncak $(\pm 2, 0)$ dan persamaan garis asimtot $y = \pm \frac{1}{2}x$

B. Penalaran

1. Tuliskan langkah-langkah menentukan panjang dan koordinat titik *latus rectum* hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2. Jelaskan kenapa nilai eksentrisitas (e) hiperbola akan selalu lebih besar dari 1.

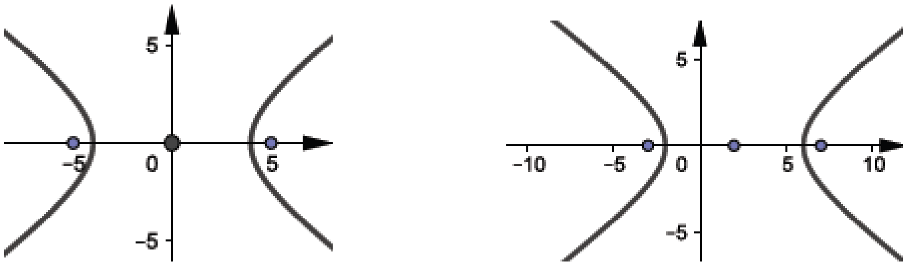
d. Persamaan Hiperbola Titik Pusat di (h, k)

Titik pusat hiperbola merupakan titik perpotongan antara sumbu-sumbu simetrinya. Pembahasan sebelumnya mempelajari persamaan hiperbola dengan koordinat titik pusat pada $(0,0)$. Namun bagaimana apabila titik pusat tidak berada pada koordinat $(0,0)$?

1. Hiperbola berpusat di (h, k) dan sumbu utama sejajar sumbu-*x*

Hiperbola dengan titik pusat pada koordinat $(0,0)$ dan titik fokus berada pada sumbu-*x* memiliki persamaan umum $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gambar 3.8 merupakan beberapa contoh hiperbola dengan panjang sumbu mayor yang sama yaitu 8 satuan namun memiliki koordinat titik pusat yang berbeda.

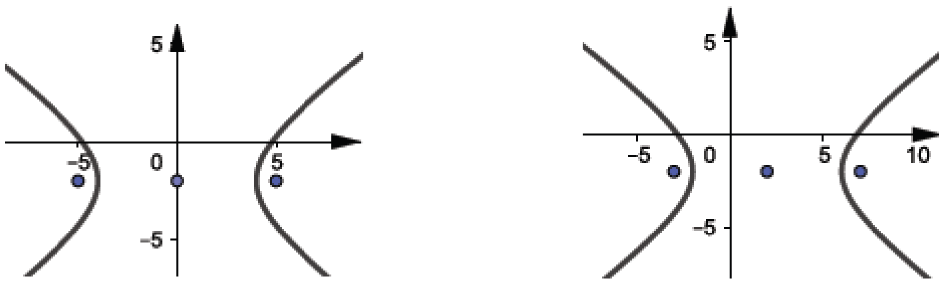
Perhatikan perbedaan persamaan berdasarkan perbedaan koordinat titik fokus berikut.



(a) (b)

Gambar 3.8

Hiperbola pada Gambar (a) titik pusat berada pada koordinat $(0,0)$ dan mempunyai persamaan $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$. Hiperbola pada Gambar (b) titik pusat berada pada koordinat $(2,0)$ dan mempunyai persamaan $\frac{(x-2)^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$.



(c) (d)

Gambar 3.8

Hiperbola pada Gambar (c) titik pusat berada pada koordinat $(0,-1)$ dan mempunyai persamaan $\frac{x^2}{4^2}-\frac{(y+2)^2}{3^2}=1$. Hiperbola pada Gambar (d) titik pusat berada pada koordinat $(2,-1)$ dan mempunyai persamaan $\frac{(x-2)^2}{4^2}-\frac{(y+2)^2}{3^2}=1$.

Berdasarkan contoh di atas tentukan persamaan umum hiperbola berpusat di (h,k) dan sumbu utama sejajar sumbu-*x* dengan mengikuti tahapan pada kegiatan berikut.

Kegiatan 3.4

Misalkan sebuah hiperbola berpusat pada titik (h, k).

Titik $F_1(h + c, k)$ dan $F_2(h - c, k)$ merupakan titik fokus dan salah satu titik yang dilalui kurva hiperbola dimisalkan $P(x, y)$. Berdasarkan keterangan tersebut jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

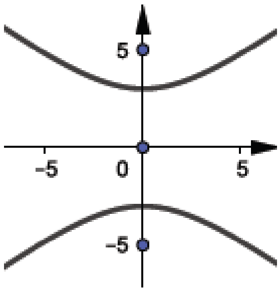
1. Jika d_1 merupakan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus $F_1(h + c, k)$, maka tentukan nilai d_1.
2. Jika d_2 merupakan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus $F_2(h - c, k)$ maka tentukan nilai d_2.
3. Hiperbola merupakan himpunan titik-titik yang memiliki selisih jarak yang sama terhadap dua titik tertentu. Sebelumnya telah diketahui bahwa nilai konstan pada definisi hiperbola yaitu $2a$. Berdasarkan hal tersebut maka tentukan persamaan elips yang memenuhi persamaan $|d_1 - d_2| = 2a$.

Persamaan hiperbola berpusat di $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$
dan sumbu utama sejajar sumbu-*x*

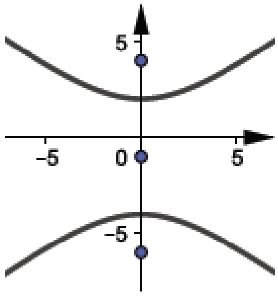
....

2. Hiperbola berpusat di $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ dan sumbu utama sejajar sumbu-*y*

Hiperbola dengan titik pusat pada koordinat $(0,0)$ dan titik fokus berada pada sumbu-*y* memiliki persamaan umum $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. Gambar 3.9 merupakan beberapa contoh hiperbola dengan panjang sumbu mayor yang sama yaitu 6 satuan namun memiliki koordinat titik pusat yang berbeda. Perhatikan perbedaan persamaan berdasarkan perbedaan koordinat titik fokus.



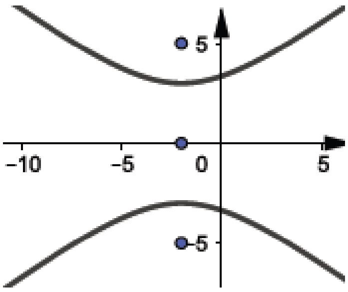
(a)



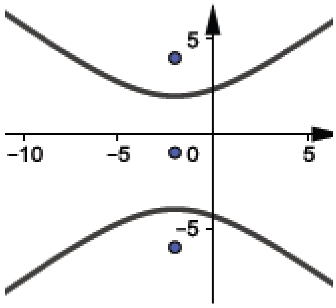
(b)

Gambar 3.9

Hiperbola pada Gambar (a) titik pusat berada pada koordinat $(0,0)$ dan mempunyai persamaan $\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$. Hiperbola pada Gambar (b) titik pusat berada pada koordinat $(0,1)$ dan mempunyai persamaan $\frac{(y+1)^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$.



(c)



(d)

Gambar 3.9

Hiperbola pada Gambar (c) titik pusat berada pada koordinat $(-2,0)$ dan mempunyai persamaan $\frac{y^2}{3^2} - \frac{(x+2)^2}{4^2} = 1$. Hiperbola pada Gambar (d) titik pusat berada pada koordinat $(-2,1)$ dan mempunyai persamaan $\frac{(y+1)^2}{3^2} - \frac{(x+2)^2}{4^2} = 1$.

Berdasarkan contoh di atas tentukan persamaan umum hiperbola berpusat di (h,k) dan sumbu utama sejajar sumbu-y dengan mengikuti tahapan pada kegiatan di bawah.

Kegiatan 3.5

Misalkan sebuah elips berpusat pada titik (h, k). Titik $F_1(h, k + c)$ dan $F_2(h, k - c)$ merupakan koordinat titik fokus dan salah satu titik yang dilalui elips dimisalkan $P(x, y)$. Berdasarkan keterangan tersebut jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Lukiskan kurva elips yang memenuhi permisalan di atas.
2. Tentukan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus $F_1(h, k + c)$
3. Tentukan jarak antara titik $P(x, y)$ dengan titik fokus $F_2(h, k - c)$
4. Definisi mengatakan bahwa hiperbola merupakan himpunan titik-titik yang memiliki selisih jarak yang sama terhadap dua titik tertentu. Sebelumnya telah diketahui bahwa nilai konstan pada definisi hiperbola yaitu $2a$. Berdasarkan hal tersebut maka tentukan persamaan elips yang memenuhi persamaan $|F_1P| - |F_1P| = 2a$.

Persamaan hiperbola berpusat di $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$
dan sumbu utama sejajar sumbu-*x*

....

Contoh 3.2

1. Tentukan koordinat titik pusat, titik puncak, titik fokus, dan persamaan garis asimtot dari persamaan $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$.

   Jawab:

   - Diketahui: Persamaan hiperbola $9x^2 - 16y^2 -$

$36x - 32y - 124 = 0.$

Ditanyakan: Titik pusat, titik puncak, titik fokus, dan persamaan garis asimtot

- Penyelesaian:
  - ✓ Persamaan $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$ diubah ke bentuk baku:

    $\Leftrightarrow (9x^2 - 36x) - (16y^2 + 32y) = 124$

    $\Leftrightarrow 9(x^2 - 4x) - 16(y^2 + 2y) = 124$

    $\Leftrightarrow 9(x-2)^2 - 16(y+1)^2$

    $= 124 + 9.2^2 - 16.1^2$

    $\Leftrightarrow 9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 = 144$

    $\Leftrightarrow \frac{9(x-2)^2}{9.16} - \frac{16(y+1)^2}{9.16} = 9.16$

    $\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4^2} - \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$

    Sehingga dapat diketahui bahwa: $a = \pm 4$ dan $b = \pm 3$.

    Berdasarkan formula $c^2 = a^2 + b^2$, maka $c = \pm 5$.
  - ✓ Titik pusat = $(h, k) = (2, -1)$
  - ✓ Titik puncak $= (h + a, k) = (2 \pm 4, -1) = (6, -1)$ dan $(-2, -1)$
  - ✓ Titik fokus $= (h + c, k) = (2 \pm 5, -1) = (7, -1)$ dan $(-3, -1)$
  - ✓ Persamaan asimtot = $(y - k) = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

    $\Leftrightarrow (y + 1) = \pm \frac{3}{4}(x - 2)$
- Kesimpulan:

  Jadi, titik pusat hiperbola terletak pada koordinat $(2, -1)$, titik puncak $(6, -1)$ dan $(-2, -1)$, titik fokus $(7, -1)$ dan $(-3, -1)$ dan persamaan garis asimtot yaitu $(y + 1) = \pm \frac{3}{4}(x - 2)$.

2. Tentukan panjang tali busur (*latus rectum*) dari persamaan $4x^2 - y^2 - 16x - 2y - 129 = 0$.

   Jawab:

   - Diketahui: Persamaan hiperbola $4x^2 - y^2 - 16x - 2y - 129 = 0$.
   - Ditanyakan: Panjang tali busur.
   - Penyelesaian:
     - ✓ Persamaan $4x^2 - y^2 - 16x - 2y - 129 = 0$ diubah ke bentuk baku:

       $\Leftrightarrow (4x^2 - 16x) - (y^2 + 2y) = 129$

       $\Leftrightarrow 4(x^2 - 4x) - (y^2 + 2y) = 129$

       $\Leftrightarrow 4(x-2)^2 - (y+1)^2$

       $= 129 + 4.2^2 - 1.1^2$

       $\Leftrightarrow 4(x-2)^2 - (y+1)^2 = 144$

       $\Leftrightarrow \frac{4(x-2)^2}{4.36} - \frac{(y+1)^2}{4.36} = 4.36$

       $\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{6^2} - \frac{(y+1)^2}{12^2} = 1$

       Sehingga dapat diketahui bahwa: $a = \pm 6$ dan $b = \pm 12$.

     - ✓ Panjang tali busur yaitu $\frac{2b^2}{a} = \frac{2.12^2}{6} = 48$
   - Kesimpulan:

     Jadi, panjang tali busur hiperbola $4x^2 - y^2 - 16x - 2y - 129 = 0$ yaitu 48.

Latihan 3.3

1. Tentukan koordinat titik pusat, fokus, puncak, dan eksentrisitas dari persamaan hiperbola berikut.

   a. $4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y + 31 = 0$

   b. $5x^2 - 4y^2 + 20x + 8y = 4$

   c. $9y^2 - 18y - 4x^2 - 16x - 43 = 0$

d. $\frac{(x-5)^2}{3^2} - \frac{(y+1)^2}{5^2} = 1$

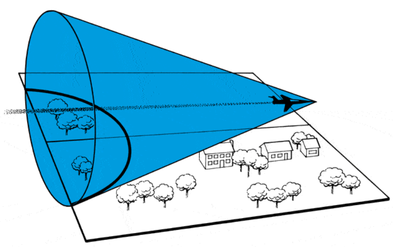
e. $\frac{(y-2)^2}{2^2} - \frac{(x-1)^2}{1^2} = 1$

2. Tentukan persamaan hiperbola yang memenuhi kondisi berikut.
   a. Titik pusat $(5, -2)$, titik fokus di $(6, -2)$ dan $(-4, -2)$
   b. Titik fokus di $(3,6)$ dan $(3,0)$ serta melalui titik $\left(5, 3 + \frac{6}{5}\sqrt{5}\right)$
   c. Salah satu titik fokus di $(26,0)$ dan asimtotnya adalah garis $12y = \pm 5x$
3. Tentukan koordinat dan panjang *latus rectum* dari persamaan hiperbola berikut.
   a. $x^2 - y^2 + 7x - y + 11 = 0$
   b. $x^2 - y^2 - 8x + 8y - 25 = 0$
   c. $16x^2 - 9y^2 - 32x + 90y - 353 = 0$

e. Aplikasi Hiperbola

Benda atau fenomena yang membentuk hiperbola dapat ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Berikut beberapa fenomena yang membentuk suatu hiperbola maupun aplikasi hiperbola dalam kehidupan.

1. Dentuman Sonik



Boom sonic atau gelombang sonic adalah gelombang kejut pesawat terbang. Hal tersebut terjadi ketika pesawat atau objek bergerak lebih cepat daripada kecepatan suara. Gelombang sonic berbentuk seperti kerucut seiring dengan cepatnya pergerakan pesawat. Ketika gelombang tersebut memotong tanah, maka terbentuk suatu hiperbola.

2. Menara Pendingin

Tidak terdapat aturan khusus sebuah menara pendingin harus berbentuk hiperboloid. Namun terdapat beberapa alasan menara pendingin didesain membentuk hiperboloid.

a. Faktor kekuatan

Menara pendingin harus dibangun sangat tinggi karena uap yang dihasilkan pada proses pendinginan akan dilepaskan ke atmosfer melalui lubang menara. Untuk membangun sebuah menara yang tinggi dan kuat maka dasar menara dibangun dengan area yang luas sehingga dapat mendukung struktur menara yang tinggi dan melebar kembali di bagian atas. Selain itu area yang luas pada bagian bawah memberikan ruang yang cukup untuk pemasangan mesin.

b. Memfasilitasi

Udara panas membawa uap air dalam jumlah yang besar ketika melewati menara pendingin. Area yang luas di dasar menara memungkinkan volume udara yang besar masuk ke menara. Saat udara panas naik, kecepatan udara akan meningkat karena penyempitan bentuk menara pendingin sehingga dapat dikatakan bahwa bentuk hiperboloid membantu meningkatkan kecepatan uap. Kejadian tersebut disebut “Efek Venturi”.

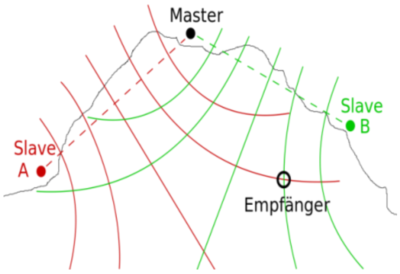
c. Difusi lebih cepat dan efisien

Bagian atas menara didesain melebar karena pada daerah tersebut udara panas dari dalam menara berdifusi dan bercampur dengan udara atmosfir. Dengan melebarnya area bagian atas diharapkan akan memaksimalkan dimana difusi terjadi sehingga uap yang lebih panas dengan cepat tercampur dan proses pendinginan dilakukan lebih efisien.

d. Lebih mudah dibangun

Bentuk hiperboloid lebih mudah dibangun karena menggunakan kisi-kisi balok lurus untuk membangun menara dan membutuhkan bahan yang sedikit. Selain itu struktur hiperboloid lebih tahan terhadap kekuatan alam luar seperti angin yang kencang daripada menara yang didesain lurus.

3. LORAN (*Long Range Navigation*)



Loran adalah kependekan dari *Long Range Navigation* atau navigasi jarak jauh. Sistem navigasi merupakan sebuah sistem yang memungkinkan awak kapal mengetahui secara akurat arah, posisi kapal, atau target tertentu disekitarnya. Loran merupakan sistem navigasi hiperbola atau navigasi elektronika dengan pemancar-pemancar radio yang berbasis di daratan. Setiap pemancar memancarkan pulsa-pulsa gelombang elektromagnetik frekuensi rendah yang dapat ditangkap oleh pesawat penerima di atas kapal yang berada dalam jangkauan Loran.

Loran paling sedikit mempunyai tiga pemancar, satu stasiun berperan sebagai stasiun master dan yang lainnya sebagai stasiun secondary. Dengan mengirimkan pulsa gelombang elektromagnetik dari stasiun pemancar ke penerima maka akan diperoleh Time Different antara kedatangan sinyal dari stasiun master dan stasiun sekunder sehingga dapat dikonversikan ke suatu jarak tertentu.

Dalam pengiriman pulsa tersebut diperlukan sinkronisasi waktu antar pemancar karena ketidaksesuaian timing mengakibatkan kesalahan dalam penentuan posisi.

Contoh 3.5

1. Dua orang ahli meteorologi melihat badai dari tempat mereka tinggal. Tempat tinggal dua ahli meteorologi tersebut berjarak 4 km. Ahli meteorologi yang pertama jaraknya lebih jauh dari posisi petir mendengar suara petir 9 detik setelah ahli meteorologi yang kedua.

Jika kecepatan suara 340 m/s, tentukan persamaan yang dapat dimodelkan lokasi dari badai tersebut.

Jawab:

- Diketahui: Jarak antara kedua ahli = 4 km (4000 m)
  Ahli pertama berjarak lebih jauh mendengar petir 9 detik lebih awal.
  Kecepatan suara 340 m/s.

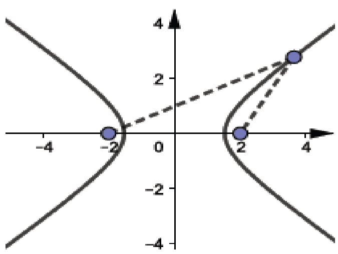
  Ditanyakan: Persamaan yang dapat memodelkan lokasi badai..

- Penyelesaian:

  Misal M_1 = ahli meteorologi pertama.
  M_2 = ahli meteorologi kedua.
  S = lokasi badai.

  ✓ Lokasi M_1 yaitu $9.340 = 3060\ m$ lebih jauh dari M_2 terhadap lokasi badai maka $|M_1S| - |M_2S| = 3060$

  ✓ Himpunan semua titik S akan membentuk suatu grafik hiperbola. Posisi kedua ahli dan badai apabila digambarkan dalam koordinat Kartesius yaitu:



  ✓ Selisih konstan $= 3060$ maka $2a = 3060$ dan $a = 1530$.

  ✓ M_1 dan M_2 pada hiperbola berada pada titik fokus (c).
  M_1dan M_2 berjarak 4000 sehingga $c = 2000$.

Menggunakan persamaan hiperbola:

$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow 2000^2 = 1530^2 + b^2$

$\Leftrightarrow b^2 = 2000^2 + 1530^2$

$\Leftrightarrow b^2 = 1659100$

$\Leftrightarrow b^2 \approx 1288^2$

Maka: $\frac{x^2}{1530^2} - \frac{y^2}{1288^2} = 1$

- Kesimpulan:

  Persamaan lokasi dari badai tersebut yaitu $\frac{x^2}{1530^2} - \frac{y^2}{1288^2} = 1$

2. Terdapat sebuah menara pendingin tenaga nuklir yang berbentuk hiperboloid. Apabila bentuk hiperbola pada menara pendingin tersebut dimodelkan dalam persamaan $1600x^2 - 400(y - 50)^2 = 640000$ (dalam satuan kaki), maka tentukan jarak minimum antara kedua sisi menara.

   Jawab:

- Diketahui: Persamaan hiperbola $1600x^2 - 400(y - 50)^2 = 640000$.

  Ditanyakan: Jarak minimum antara kedua sisi menara.

- Penyelesaian:

  ✓ Ubah persamaan parabola dalam bentuk baku.

  $1600x^2 - 400(y - 50)^2 = 640000$

  $$\Leftrightarrow \frac{1600x^2}{640000} - \frac{400(y - 50)^2}{640000} = \frac{640000}{640000}$$

  $$\Leftrightarrow \frac{x^2}{400} - \frac{(y - 50)^2}{1600} = 1$$

  $$\Leftrightarrow \frac{x^2}{20^2} - \frac{(y - 50)^2}{40^2} = 1$$

- ✓ Berdasarkan persamaan dapat diketahui bahwa $a = 20$ dan $b = 40$.
- ✓ Jarak minimum antara kedua sisi menara sama dengan jarak antartitik puncak hiperbola, sehingga $2a = 2.20 = 40$.

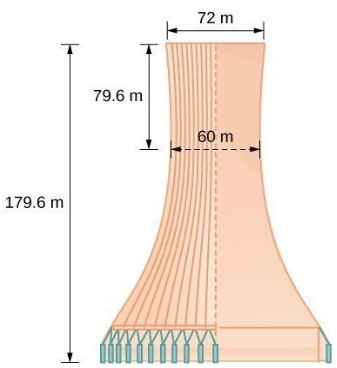
▪ Kesimpulan:

Jadi jarak minimum antara kedua sisi menara adalah 40 kaki atau sekitar 12,2 meter.

Latihan 3.5

1. Sebuah kapal sedang melaju dengan jalur lurus sejauh 60 mil dari garis pantai. Dua stasiun pemancar yaitu stasiun A dan B terletak 200 mil terpisah di garis pantai. Dengan mengatur waktu sinyal radio dari stasiun, navigator kapal memastikan bahwa kapal berada di antara dua stasiun dan 50 mil lebih dekat ke stasiun B daripada stasiun A. Tentukan jarak kapal ke masing-masing stasiun.

2. Pendengar $A(-8,0)$, $B(8,0)$, dan $C(8,10)$ mencatat waktu tepat pada saat terdengarnya sebuah ledakan. Jika B dan C mendengar ledakan itu pada saat yang bersamaan dan A mendengar ledakan tersebut 12 detik kemudian, dimanakan ledakan itu terjadi? Asumsikan bahwa jarak dalam kilometer dan bunyi merambat dengan kecepatan $\frac{1}{3}$ km/detik.



3. Sebuah menara pendingin berbentuk paraboloid berdiri setinggi 179,6 meter. Diamter bagian atas menara adalah 72 meter dan bagian terdekat dari sisi menara adalah 60 meter. Tentukan persamaan hiperboal yang memodelkan sisi menara pendingin tersebut.

Asumsikan bahwa pusat hiperbola terletak pada titik asal atau (0,0) ditunjukan oleh persimpangan garis putus-putus pada gambar.

4. Sebuah sinyal radio dikirimkan secara serempak dari menara A dan menara B yang terletak beberapa ratus mil jauhnya terhadap satu sama lain di pantai California. Sebuah kapal yang berada di lepas pantai menerima sinyal dari menara A 1400 mikro detik sebelum kapal tersebut menerima sinyal dari menara B. Anggap bahwa sinyal radio merambat dengan kecepatan sebesar 980 kaki per mikro detik. Apakah yang dapat dikatakan mengenai perkiraan letak kapal tersebut relatif terhadap kedua menara.

5. Lebar dasar sebuah menara pendingin berbentuk hiperboloid adalah 400. Lebar menara pada daerah tersempit adalah 250 dan jarak titik tersempit dari tanah adalah 400. Tentukan persamaan hiperboloid yang dapat memodelkan bentuk menara tersebut.

RANGKUMAN

1. Hiperbola adalah himpunan titik-titik pada bidang datar yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu (titik fokus) selalu sama.
2. Persamaan umum hiperbola berpusat di $(0,0)$
   - Titik fokus terletak di sumbu-*x*

     $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ atau $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, dengan $a > b$.
   - Titik fokus terletak di sumbu-*y*

     $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ atau $a^2x^2 - b^2y^2 = a^2b^2$, dengan $a > b$.
3. Persamaan umum hiperbola berpusat di (h, k)
   - Sumbu utama sejajar sumbu-*x*

     $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ atau $b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2$, dengan $a > b$.
   - Sumbu utama sejajar sumbu-*y*

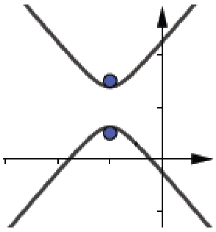
     $\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ atau $a^2(x-h)^2 - b^2(y-k)^2 = a^2b^2$, dengan $a > b$.

Jurnal Belajar Siswa

1. Berdasarkan pembelajaran yang telah dilakukan, berikan ringkasan tentang apa yang telah dipelajari dengan menggunakan kalimat sendiri.
2. Manakah subbab yang paling sulit untuk dipahami? Jelaskan alasan kesulitan dalam memahami.
3. Manakah subbab yang paling mudah untuk dipahami? Jelaskan alasan kemudahan dalam memahami.

Evaluasi Hiperbola

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang paling benar.



1. Persamaan umum hiperbola di samping adalah...

   a. $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

   b. $\frac{(y+k)^2}{a^2} - \frac{(x+h)^2}{b^2} = 1$

   c. $\frac{(x+h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

   d. $\frac{(y+k)^2}{b^2} - \frac{(x+h)^2}{a^2} = 1$

   e. $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

2. Koordinat titik puncak hiperbola $y^2 - 3x^2 = 6$ adalah...

   a. $(0, \pm 2)$

   b. $(0, \pm 2)$

   c. $(0, \pm\sqrt{2})$

   d. $(0, \pm\sqrt{3})$

   e. $(0, \pm\sqrt{6})$

UM UGM 2007

3. Suatu hiperbola mempunyai titik fokus pada sumbu-*y*. Hiperbola tersebut simetri terhadap sumbu-*x*. Diketahui jarak kedua titik fokus adalah 10 satuan dan jarak kedua titik puncak adalah 8 satuan. Hiperbola tersebut mempunyai persamaan...

   a. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

   b. $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

   c. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

   d. $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

   e. $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

4. Nilai eksentrisitas hiperbola $5x^2 - 4y^2 = 20$ adalah...

   a. $\frac{3}{2}$

   b. $\frac{2}{3}$

   c. $\frac{3}{4}$

   d. $\frac{4}{3}$

   e. $\frac{5}{4}$

SBMPTN 2016

5. Diberikan hiperbola dengan puncak $(-2,3)$ dan $(-2,9)$. Jika puncak berada di tengah-tengah antara pusat dan fokus, maka persamaan hiperbola itu adalah...

a. $-\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-6)^2}{16}=1$

b. $\frac{(x+2)^2}{27}-\frac{(y-6)^2}{16}=1$

c. $\frac{(x-6)^2}{25}-\frac{(y+2)^2}{36}=1$

d. $-\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+6)^2}{9}=1$

e. $-\frac{(x+2)^2}{27}+\frac{(y-6)^2}{9}=1$

6. Persamaan hiperbola dengan pusat $(5,-2)$, titik fokus di $(6,-2)$ dan $(-4,-2)$ berbentuk...

a. $9x^2-16y^2-18x-64y-189=0$

b. $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$

c. $9x^2-16y^2+18x-64y-199=0$

d. $9x^2-16y^2-18x+64y-199=0$

e. $9x^2-16y^2+18x+64y-199=0$

7. Jika (h,k) adalah titik pusat hiperbola $4x^2-24x-2y^2-4y-34=0$, maka nilai h^2+k^2 sama dengan...

a. 10

b. 28

c. 30

d. 32

e. 34

SBMPTN 2017

8. Persamaan salah satu asimtot dari hiperbola: $9x^2-36x-4y^2+8y-4=0$ adalah...

a. $y=-\frac{3}{2}x-2$

b. $y=-\frac{3}{2}x-4$

c. $y=\frac{3}{2}x+2$

d. $y=\frac{3}{2}x-2$

e. $y=\frac{3}{2}x+4$

SBMPTN 2017

9. Bentuk persamaan hiperbola yang memiliki asimtot $y=4x-4$ dan $y=-4x+4$ adalah...

a. $(x-1)^2-16y^2=c$

b. $4(x-1)^2-y^2=c$

c. $16(x-1)^2-y^2=c$

d. $4(x+1^2-y^2=c$

e. $16(x+1)^2-y^2=c$

DAFTAR PUSTAKA

Barnett, R.A., et.al, (2005). *College algebra: Graphs and models, second edition*. New York: McGraw-Hill Companies

Fuller, Gordon. 1954. *Analytic geometry*. Cambridge. Addison-Wesley Publishing Company

Purcell, E.J. & Varberg, D. (   ). *Kalkulus dan geometri analitis*. (Terjemahan I Nyoman Susila). Jakarta: Erlangga.

Sukino. (2013). *Matematika kelompok peminatan matematika dan ilmu alam*. Jakarta: Erlangga

Thomas, G.B. & Finney, R.L. (1993). *Kalkulus dan geometri analitik*. (Terjemahan Pantur Silaban & Hans J. Wospakrik). Jakarta: Erlangga