J. Pijar MIPA, Vol. VII No.1, Maret : 1 - 42
ISSN 1907-1744

KALKULUS DIFERENSIAL DAN INTEGRAL OLEH FERMAT

Laila Hayati [1] **dan Mamika Ujianita Romdhini** [2]

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Mataram

Program Studi Matematika FMIPA Universitas Mataram
Jalan Majapahit No. 62 Mataram

Abstrak : Dalam kuliah kalkulus modern, materi tentang pendifferensialan (turunan fungsi) dan konstruksi garis singgung terhadap suatu kurva diberikan terlebih dahulu daripada materi integral dan penentuan luas daerah di bawah suatu kurva. Hal ini berlawanan dengan urutan sejarah perkembangannnya. Penentuan luas daerah yang dibatasi oleh beberapa kurva telah ditemukan pada zaman kuno. Dalam tulisan ini membahas awal konstruksi garis singgung dan penentuan luas daerah yang dibatasi oleh suatu kurva yang pertama kali dibahas oleh Fermat. Kerja Fermat telah memberikan dasar bagi konsep kalkulus modern, khususnya pendifferensialan dan integral. Selain itu, Fermat dikenal sebagai orang yang memiliki kemampuan luar biasa dalam teori bilangan, antara lain dengan *Fermat's Little Theorem* dan *Fermat's Last Theorem*.

Kata kunci : *konstruksi garis singgung, luas daerah, differensial, dan integral, teori fermat.*

Abstract : In modern calculus course, the material on derivative of the function and the construction of the tangent to the curve given first than the material on the integral and determining the area under a curve. This is contrary to the historical development. Determination of the area has been limited by several curves have been found in ancient times. In this paper discusses the start of construction of the tangent line and determining the area bounded by a curve that was first discussed by Fermat. Work Fermat has provided the basis for the concept of modern calculus, especially derivative and integral. In addition, Fermat is known as a person who has a remarkable ability in number theory, among others, by *Fermat's Little Theorem and Fermat's Last Theorem.*

Keywords : *construction of a tangent, wide areas, derivative and integral, Fermat Theory.*

PENDAHULUAN

Pada awal abad ke-17, terdapat perkembangan penting dalam geometri. Yang pertama dan terpenting adalah penciptaan geometri analitik atau geometri dengan koordinat dan persamaan oleh Rene Descartes (1596-1650) dan Pierre de Fermat (1601-1665). Ini adalah awal yang diperlukan untuk perkembangan kalkulus. Para matematikawan Perancis, Rene Descartes dan Pierre de Fermat memainkan peran penting dalam landasan dan pengembangan geometri analitik dan kalkulus. Fermat sedikit menerbitkan karya tulisannya tetapi banyak melakukan surat-menyurat dengan ahli matematika lain yang mempengaruhi pendapat penerima suratnya. Ia mengembangkan banyak komponen matematika sehingga ia dipandang sebagai ahli matematika terbesar abad-17. Penemuan Fermat terpenting adalah mengenai teori bilangan. Dalam teori bilangan ia dipandang memiliki intuisi dan kemampuan luar biasa.

Terdapat perbedaan pendapat tentang siapa yang menemukan geometri analitik. Pengenalan Fermat untuk lokus (tempat kedudukan) tidak diterbitkan selama seumur hidupnya, sehingga geometri analitik dalam pikiran banyak orang dianggap sebagai penemuan unik Descartes [1]. Ada kemungkinan bahwa Fermat adalah pemilik geometri analitik pada awal 1629, sekitar waktu ini ia membuat dua penemuan penting yang terkait erat dengan karyanya pada lokus. Yang lebih penting dari ini digambarkan beberapa tahun kemudian dalam risalah dan diterbitkan dalam hidupnya, berjudul '*Method of Finding Maxima and Minima"*.

Dalam pembelajaran kalkulus, pembahasan kalkulus diferensial mendahului kalkulus integral. Namun, dilihat dari sejarahnya, perkembangan kalkulus integral mendahului perkembangan kalkulus diferensial. Kalkulus diferensial dikembangkan sebagai upaya untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penentuan garis singgung pada suatu kurva dan penentuan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi. Fermat adalah orang pertama yang memecahkan masalah maksimum-minimum dengan cara memperhatikan perilaku khusus dari suatu fungsi di dekat nilai ekstrimnya.

II. PEMBAHASAN

Fermat lahir 17 Agustus, 1601 di Beaumont-de-Lomagne, dan wafat di France , 12 January 1665. Anak dari seorang saudagar kulit, Fermat memperoleh pendidikan pertama kalinya di rumah. Ia memperoleh pendidikan di bidang hukum dan bekerja sebagai ahli hukum dengan penampilan sederhananya. Fermat dipandang sebagai ahli yang sangat teliti dalam melaksanakan tugasnya. Ia memanfaatkan waktu luangnya untuk belajar matematika. Bersamaan dengan Dascartes merumuskan dasar geometri analitik, Fermat juga mempelajari bahan pelajaran itu. Fermat dipandang sebagai jenius matematika pada abad-17.

Dari hasil belajarnya sendiri ia menulis dalam suatu makalah yang berjudul *"Ad Locus Planos et Solidos Isagoge (Introduction to Plane and Solid Loci).* Di dalam tulisan tersebut terdapat persamaan garis dan lingkaran serta membicarakan hiperbola, ellips dan parabola. Fermat menulis untuk kasus yang paling sederhana dari persamaan linear yang diberikan dalam bahasa Latin sebagai "D in A aequeter B in E (dalam symbol modern, $Dx = By$). Persamaan linear yang lebih umum $ax + by = c^2$, ia membuat sketsa segmen garis di kuadran pertama pada bidang koordinat. Fermat, seperti Descartes tidak menggunakan absis negatif. Kenyataannya, bahwa segmen adalah fungsi linear dari koordinat, dan pernyataan Fermat bahwa setiap persamaan derajat pertama merupakan garis lurus. Fermat selanjutnya menunjukkan bahwa $xy = k^2$ adalah hiperbola. Persamaan $x^2 = y^2$ dianggap sebagai satu garis lurus (atau sinar), karena dioperasikan hanya di kuadran pertama. Selanjutnya, ia menunjukkan bahwa $a^2 \pm x^2 = by$ adalah parabola, $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$ adalah lingkaran, $a^2 - x^2 = ky^2$ adalah ellips, dan $a^2 + x^2 = ky^2$ adalah hiperbola [1].

Cara Fermat menguraikan sifat-sifat geometri dari kurva itu kadang kala ia mulai dari tempat kedudukan kemudian secara analitik menemukan persamaannya.

AWAL KONSTRUKSI GARIS SINGGUNG

Mulai sekitar tahun 1635, sejumlah metode berbeda untuk mengkonstruksi garis singgung terhadap kurva umum mulai secara cepat ditemukan dan diteliti.

Metode Maksima dan Minima Fermat

Fermat adalah orang pertama yang memecahkan masalah maksimum minimum dengan cara memperhatikan perilaku khusus dari suatu fungsi di dekat nilai ekstrimnya [2]. Fermat menentukan garis singgung pada suatu kurva dengan menggunakan metode maksima dan infitisimal. Karena belum berkembangnya konsep limit secara formal, Fermat belum mampu secara tepat menuliskan hasil kerjanya.

Contoh permasalahan yang diselesaikan Fermat adalah: bagaimana caranya membagi suatu segmen garis sepanjang *b* menjadi dua bagian dengan panjang berturut-turut *x* dan *b-x*, agar hasil kalinya $x(b - x) = bx - x^2$ adalah maksimum. Dia menyelesaikan masalah di atas sebagai berikut:

Pertama, bilangan *x* yang tidak diketahui diganti dengan *x+E*, lalu dia menuliskan persamaan berikut:

$$b(x + E) - (x + E)^2 = bx + bE - x^2 - 2xE - E^2 \sim bx - x^2,$$

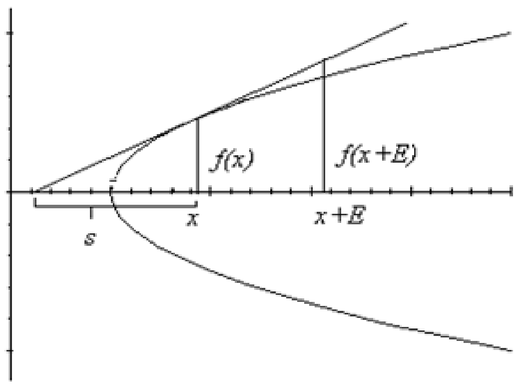
jika $bE - 2xE - E^2 \sim 0$ atau $2x + E \sim b$

Akhirnya, dengan mensubstitusikan $E = 0$ diperoleh nilai $x = \frac{b}{2}$, yaitu nilai *x* yang membuat $bx - x^2$ maksimum. Berdasarkan hal tersebut, dapat dikatakan bahwa hasil kali dua ukuran akan maksimum jika masing-masing ukuran itu adalah setengah ukuran total atau keseluruhan.

Sayangnya, Fermat tidak pernah menjelaskan dasar logika dari metodenya dengan suatu kejelasan atau kelengkapan yang cukup untuk mencegah ketaksetujuan diantara para peneliti sejarah matematika tentang apa yang sesungguhnya dia maksud. Suatu penjelasan yang mungkin lebih dekat ke persepsi modern adalah sebagai berikut: jika $f(x)$ adalah nilai maksimum (atau minimum) dari fungsi *f*, maka nilai *f* berubah sangat lambat di sekitar *x*. sehingga jika *E* cukup kecil, maka nilai dan kurang lebih sama, yaitu $f(x + E) \sim f(x)$ atau $f(x + E) - f(x) \sim 0$.

Jika $f(x)$ adalah polinomial maka $f(x + E) - f(x)$ terbagi oleh E, sehingga diperoleh $\frac{f(x+E)-f(x)}{E} \sim 0$.

Akan tetapi, limit dari rasio di atas untuk $E \to 0$ adalah definisi dari turunan, namun Fermat tidak secara eksplisit memerlukan bahwa *E* adalah kecil, serta dia sama sekali tidak menyinggung tentang limit untuk *E* menuju 0. Fermat menggunakan teknik "maksima dan minima" serupa untuk mengkonstruksi garis singgung.



Gambar 1. Kemiringan garis singgung di titik x

Misalkan garis *l* dengan kemiringan positif menyinggung kurva $y = f(x)$ di titik $(x, f(x))$, dan misalkan pula *s* menyatakan jarak antara titik potong garis *l* dengan sumbu-*x* (selanjutnya disebut sub-tangen ke kurva $y = f(x)$, serta *k* menyatakan jarak vertikal dari titik *x+E* ke garis *l*. berdasarkan hukum kesebandingan segitiga, diperoleh:

$$\frac{s+E}{s} = \frac{k}{f(x)}$$

Dengan mensubstitusikan $k \sim f(x+E)$, maka diperoleh

$$s \sim \frac{Ef(x)}{f(x+E) - f(x)} = \frac{f(x)}{[f(x+E) - f(x)]/E}$$

Dengan mengasumsikan *f* adalah polinomial sehingga $f(x+E) - f(x)$ terbagi oleh *E* maka diperoleh "sub-tangen" *s*. dalam konteks modern, dengan mengambil limit untuk $E \to 0$, diperoleh sub-tangen $s = \frac{f(x)}{f'(x)}$

Karena kemiringan garis singgung adalah $\frac{f(x)}{s}$ (berdasarkan segitiga di atas), maka persamaan mengidentifikasi kemiringan garis singgung terhadap kurva dengan turunan $f'(x)$.

Contoh:

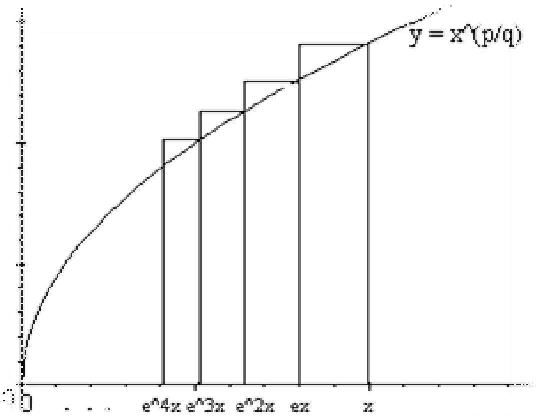
Jika $f(x) = x^2$, maka $s \sim \frac{Ex^2}{(x+E)^2 - x^2} = \frac{x^2}{2x+E}$

Dengan menghilangkan unsur *E*, maka diperoleh sub-tangen $s = \frac{x}{2}$, sehingga kemiringan garis singgung terhadap kurva $y = x^2$ adalah

$$f'(x) = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^2}{x/2} = 2x$$

Dengan menggunakan metode ini, Fermat menurunkan suatu aturan umum bagi penentuan kemiringan garis singgung suatu fungsi berbentuk $y = x^n$ yaitu nx^{n-1}.

Fermat tidak hanya memiliki metode untuk mencari kemiringan garis singgung dari kurva $y = x^m$, ia juga setelah tahun 1629 mendapat suatu teorema luas daerah yang dibatasi oleh suatu kurva.



Gambar 2. Penentuan luas daerah di bawah kurva y

Dalam menemukan luas daerah, Fermat pada awalnya melihat rumus untuk jumlah dari powers bilangan bulat, atau bentuk ketaksamaan

$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m > \frac{n^{m+1}}{m+1} > 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (n-1)^m$$

untuk memperoleh hasil untuk semua nilai positif integral dari m. Hal ini sendiri merupakan lanjutan dari karya Cavalieri, yang membatasi diri pada kasus-kasus dari *m=1* sampai *m=9*, tetapi kemudian Fermat mengembangkan metode yang lebih baik untuk menangani masalah, yang berlaku untuk pecahan serta nilai-nilai integral m. Fermat memberikan ilustrasi penentuan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^n$. Fermat membagi interval dari *x=0* sampai *x=a* ke sub interval tak terhingga banyaknya dengan mengambil titik-titik dengan absis a, aE, aE^2 dimana *0<E<1*. Dengan menggunakan persegi panjang, dimulai dari yang paling besar, diperoleh barisan $a^n(a - aE), a^nE^n(aE - aE^2)$, $a^nE^{2n}(aE^2 - aE^3)$ ...

Bentuk ini adalah deret geometri dengan jumlah tak hingga $\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}}$ atau $\frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\cdots+E^n}$

Selanjutnya, Fermat memisalkan *E=1*, sehingga diperoleh $\frac{a^{n+1}}{n+1}$.

Kemudian, Fermat memisalkan $n = \frac{p}{q}$, maka jumlah deret geometri tersebut menjadi

$$a^{(p+q)/q}\left(\frac{1-E^q}{1-E^{p+q}}\right) = a^{(p+q)/q}\left(\frac{1+E+E+\cdots+E^{q-1}}{1+E+E^2+\cdots+E^{p+q-1}}\right)$$

Dan ketika *E=1*, diperoleh $\frac{q}{p+q}a^{(p+q)/q}$

Meskipun metode itu memberikan hasil yang sesuai untuk luas di bawah suatu kurva, tetapi penentuan nilai *E = 1* belum dapat dijelaskan secara rasional. Apa yang dikerjakan Fermat sesungguhnya adalah mengambil limit *E* mendekati 1. Jika *E* mendekati 1, maka jumlah takhingga luas daerah di bawah kurva dapat ditentukan.

Dalam notasi modern, kita ingin mendapatkan $\int_a^b x^n\,dx$, hanya perlu melihat bahwa ini adalah $\int_0^b x^n\,dx - \int_0^a x^n\,dx$. Kerja Fermat telah memberikan dasar bagi konsep integral modern, bahkan Lagrange menyebut Fermat sebagai penemu Kalkulus.

Di antara kontribusi Fermat terhadap bidang matematika, yang paling menonjol adalah penemuan teori bilangan. Dalam bidang ini, Fermat memiliki intuisi dan kemampuan yang luas. Salah satu teoremanya yang yang terkenal adalah *Fermat's Little theorem*. Teorema ini pertama kali dinyatakannya dalam sebuah surat untuk temannya, Frencle de Bessy, pada tanggal 18 oktober 1640

[3]. Pada surat tersebut tertulis: *p* membagi $a^{p-1}-1$ untuk p suatu bilangan prima dan *a* saling prima dengan *p*. Secara formal, *Fermat's Little Theorem* ini dapat ditulis:

Teorema:

Misalkan a suatu bilangan bulat positif dan p suatu bilangan prima. Maka berlaku:

(i). Untuk GCD *(a,p)=1*, berlaku $a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$

(ii). $a^p \equiv a(mod\ p)$, untuk suatu bilangan bulat *a*.

Bukti:

(i). Ambil sembarang bilangan prima p dan bilangan bulat a dengan *(a,p)=1*. Maka menurut teorema (jika *(a,m)=1*, maka residu-residu terkecil modulo m dari *a, 2a,3a,…, (m-1)a* adalah *1, 2, 3,…,(m-1)* dalam suatu urutan) residu-residu terkecil modulo *p* dari *a, 2a, 3a,…,(p-1)a* adalah *1, 2, 3,…,(p-1)* dalam suatu urutan. Akibatnya hasil kali bilangan-bilangan *a, 2a, 3a,…,(p-1)a* akan kongruen modulo *p* dengan hasilkali bilangan-bilangan *1, 2, 3,…,(p-1)*, yaitu

$a.2a.3a \ldots\ldots(p-1)a \equiv 1.2.3 \ldots\ldots(p-1)(mod\ p)$

$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)!\,(mod\ p)$

$a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$ karena $(p,(p-1)!) = 1$

(ii) Ambil sembarang bilangan prima p dan bilangan bulat a. maka ada dua kemungkinan, yaitu dengan *(a,p)=p* atau *(a,p)=1*.

- Jika *(a,p)=1*, maka menurut teorema (i) diperoleh $a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$

  Dengan mengalikan kedua ruas dengan a diperoleh $a^p \equiv a(mod\ p)$

- Jika *(a,p)=p*, maka $p|a$. Akibatnya $p|a.(a^{p-1}-1) = a^p - a$

  Ini berarti $a^p \equiv a(mod\ p)$.

Contoh:

Hitung $5^{2007}(mod\ 41)$

Jawab:

Karena 5 dan 41 adalah bilangan prima, maka menurut *Fermat's Little Theorem* berlaku bahwa $5^{40} \equiv 1(mod\ 41)$. Karena $5^{2007} = 5^{40.50}.5^7$ maka $5^{2007} \equiv 5^{40.50}.5^7 \equiv (5^{40})^{50}.5^7 \equiv (1)^{50}.5^7(mod\ 41)$ sehingga tinggal dihitung $5^7 \equiv (mod\ 41)$. Karena $5^6 \equiv 4(mod\ 41), maka\ 5^7 \equiv 20(mod\ 41)$. Jadi $5^{2007}(mod\ 41) = 20$.

Fermat's Little Theorem merupakan teorema yang mendasar dalam teori bilangan. Selain *Fermat's Little Theorem*, Fermat juga melakukan penelitian yaitu setiap bilangan prima ganjil dapat ditunjukkan sebagai selisih dua bilangan kuadrat, dalam satu cara dan hanya satu cara. Fermat menunjukkan bukti sederhana.

Jika p adalah bilangan utama yang ganjil, maka $P = \left(\frac{P+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{P-1}{2}\right)^2$. Di lain pihak, jika $p = x^2 - y^2$ kemudian *p=(x+y)(x-y)*. Namun, karena p adalah primer faktornya adalah p dan 1. Jadi, *x + y = p* dan *x –y = 1*, atau $x = \left(\frac{P+1}{2}\right)$ dan $x = \left(\frac{P-1}{2}\right)$. Penelitian Fermat yang lain terkait teori bilangan adalah

1. Sebuah bilangan prima yang berbentuk *4n+1* dapat ditunjukkan sebagai jumlah dua bilangan kuadrat
2. Luas segitiga tidak dapat ditunjukkan sebagai sebuah bilangan kuadrat
3. Tidak terdapat bilangan bulat positif *x, y, z* sehingga $x^4 + y^4 = z^2$
4. Tidak terdapat bilangan bulat positif *x, y, z* sehingga $x^n + y^n = z^n$ dengan n>2. Teorema ini dikenal sebagai *Fermat's Last theorem* (baru berhasil dibuktikan tahun 1998 oleh Andrew Wiles, setelah beberapa kali mengalami perbaikan).

III. KESIMPULAN

Dari paparan di atas, ada beberapa kesimpulan yang dapat ditarik dari tulisan ini, yaitu:

1. Rene Descartes dan Pierre de Fermat memainkan peran penting dalam landasan dan pengembangan geometri analitik, dan kalkulus. Penciptaan geometri analitik, atau geometri dengan koordinat dan persamaan, oleh Rene Descartes (1596-1650) dan Pierre de Fermat (1601-1665) adalah awal yang di perlukan untuk perkembangan kalkulus.
2. Fermat adalah orang pertama yang memecahkan masalah maksimum minimum dengan cara memperhatikan perilaku khusus dari suatu fungsi di dekat nilai ekstrimnya.
3. Fermat menggunakan teknik "maksima dan minima" serupa untuk mengkonstruksi garis singgung.
4. Fermat menggunakan metode yang unik dalam menentukan luas daerah yang dibatasi oleh suatu kurva, dengan membuat persegi panjang-persegi panjang kecil dibawah suatu kurva, yang telah memberikan dasar bagi konsep integral modern.
5. Fermat juga terkenal karena teoremanya dalam teori bilangan, diantaranya *Fermat's Little Theorem* dan *Fermat's Last Theorem.*

DAFTAR PUSTAKA

[1] Boyer, Carl, B. (1968). *A History of Mathematics*. John Wiley and Sons: USA.

[2] Mangku, Wayan. (2003). *Diktat Kuliah Sejarah Matematika*. Tidak diterbitkan: IPB.

[3] Gumbira, Akbar. (2009). Fermat;s Little Theorem dan Aplikasinya pada Algoritma RSA. Makalah

if2091 struktur Diskrit Tahun 2009.pdf [10 November 2012]