MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika — *Volume 09 No 02*
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115 — *Tahun 2021*

GRAF YANG DIINDUKSI OLEH HIPER BCI-ALJABAR

Nurul Anisa
(S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)
e-mail: nurul.17030214037@mhs.unesa.ac.id

Agung Lukito
(Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)
e-mail: agunglukito@unesa.ac.id

Abstrak

Teori graf dan aljabar abstrak telah menarik perhatian para matematikawan untuk mengkaji lebih dalam topik-topik menarik pada cabang-cabang matematika ini. Dalam artikel ini, diperkenalkan konsep graf pembagi nol dari hiper BCI-aljabar berhingga dan diselidiki beberapa sifatnya. Lebih jauh, didiskusikan graf pembagi nol dari hiper BCI-aljabar berhingga terurut dan yang melibatkan hiperatom.
Kata Kunci: Hiper BCI-aljabar, graf pembagi nol, hiperatom

Abstract

Graph theory and abstract algebra have attracted the attention of mathematicians to delve deeper into interesting topics in these branches of mathematics. In this article, we introduce the concept of a zero divisor graph of a finite hyper BCI-algebra and investigate some of its properties. Moreover, we discuss the zero divisor graph of an ordered hyper BCI-algebra and of those involving hyperatoms.
Keywords: *Hyper BCI-algebra, zero divisor graph, hyperatom*

PENDAHULUAN

Teori graf dan aljabar abstrak telah dipelajari secara mendalam oleh para matematikawan karena topik-topik menarik pada cabang-cabang matematika ini. Beberapa penulis mempelajari teori graf melalui membangun koneksi dengan struktur aljabar tertentu seperti semigrup komutatif dan ring komutatif.

(Fatahillah & Switrayni, 2020) mendefinisikan graf pembagi nol G sebagai graf yang titik-titiknya berupa elemen pembagi nol suatu ring komutatif dan sisi-sisinya merupakan relasi dua pembagi nol yang membentuk produk nol. Baru-baru ini, Y. B. Jun dan K. J. Lee memperkenalkan konsep graf terkait BCI-aljabar dan memverifikasi beberapa sifatnya. Dimotivasi oleh karya ini, artikel ini memperkenalkan konsep graf pembagi nol dari hiper BCI-aljabar dan menyelidiki beberapa sifatnya (Panganduyon & Canoy Jr., 2019).

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

Definisi 1.

Graf G adalah pasangan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ menyatakan himpunan berhingga tak kosong yang disebut himpunan titik G dan $E(G)$ himpunan pasangan tak berurutan $\{u, v\}$ (sering ditulis uv) titik-titik di $V(G)$. $E(G)$ disebut himpunan sisi G.

Graf $H = (V(H), E(H))$ disebut subgraf dari graf $G = (V(G), E(G))$, ditulis $H \subset G$ jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$ (Marsudi, 2016).

Dua titik u, v graf G dikatakan berhubungan langsung atau bertetangga, jika uv membentuk sisi G. Sisi uv dikatakan terkait dengan titik u dan v. Komplemen G, dilambangkan dengan $\bar{G}$ adalah graf sederhana yang himpunan titiknya sama dengan himpunan titik G, dan dua titik u dan v di $\bar{G}$ berhubungan langsung jika dan hanya jika titik u dan v di G tidak berhubungan langsung (Budayasa, 2007). Himpunan semua titik yang bertetangga dengan titik v di G dilambangkan dengan $N_G(v)$ dan derajat v di G, dilambangkan dengan deg (v), adalah $|N_G(v)|$. Derajat maksimum G, dilambangkan dengan $\Delta(G)$, adalah maksimum derajat titik di G (Panganduyon & Canoy Jr., 2019).

Definisi 2.

Titik di graf G yang tidak bertetangga dengan titik yang lain termasuk dirinya sendiri dinamakan titik terisolasi (Panganduyon & Canoy Jr., 2019). Himpunan semua titik terisolasi di G dilambangkan dengan $\mathfrak{I}(G)$.

2.2 Jenis-Jenis Graf

Definisi 3.

Graf komplet adalah graf sederhana yang setiap dua titiknya bertetangga. Graf lengkap dengan n titik dilambangkan dengan K_n (Budayasa, 2007).

Definisi 4.

Graf trivial adalah graf yang mempunyai tepat satu titik (Marsudi, 2016).

Definisi 5.

Graf kosong adalah graf yang tidak memiliki sisi tetapi mempunyai sekurang-kurangnya satu titik (Marsudi, 2016).

Definisi 6.

Graf bipartit adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan (partit) A dan B sedemikian hingga setiap sisi graf G menghubungkan titik di A dan B. Selanjutnya, apabila G graf bipartit dengan himpunan partit A dan B sedemikian hingga setiap titik di A bertetangga dengan setiap titik di B, maka G disebut graf bipartit komplet. Jika $|A| = m$ dan $|B| = n$, maka G dilambangkan dengan $K_{m,n}$ (Budayasa, 2007). Graf bintang adalah graf bipartit komplet $K_{1,n}$ (Panganduyon & Canoy Jr., 2019).

2.3 Jalan, Lintasan, dan Sikel

Definisi 7.

Jalan W pada graf G adalah barisan titik dan sisi yang bergantian, yang dimulai dan diakhiri dengan titik, $W = v_0\, e_1\, v_1\, \ldots v_{n-1}\, e_n\, v_n$, yang setiap sisi terkait dengan dua titik tepat sebelum dan sesudahnya. Jalan W dikatakan menghubungkan titik v_0 dan v_n. Jika $v_0 = v_n$, jalan W dikatakan tertutup dan jika tidak, dikatakan terbuka. Jalan ini disebut lintasan jika semua titiknya berbeda. Jalan ini disebut sikel jika tertutup dan semua titiknya berbeda.

Graf yang terdiri atas sebuah sikel dengan n titik dilambangkan dengan C_n. Graf yang terdiri atas sebuah lintasan dengan n titik dilambangkan dengan P_n (Panganduyon & Canoy Jr., 2019).

2.4 Graf Terhubung dan Komponen Graf

Definisi 8.

Graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik berbedanya terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Komponen graf G adalah subgraf terhubung maksimal dari G. Graf H disebut subgraf terhubung maksimal dari graf G, jika tidak ada subgraf terhubung lain dari G yang memuat H (Budayasa, 2007).

2.5 Homomorfisme Graf

Definisi 9.

Misalkan G dan K graf dan misalkan $f: V(G) \to V(K)$. Maka f disebut homomorfisme graf jika $f(x)f(y) \in E(K)$ bilamana $xy \in E(G)$ (Panganduyon & Canoy Jr., 2019).

Definisi 10.

Dua graf G dan K dikatakan isomorfik (ditulis $G \cong K$) jika ada fungsi bijektif dari $V(G)$ ke $V(K)$ yang merupakan homomorfisme graf (Panganduyon & Canoy Jr., 2019).

2.6 Hiperoperasi

Definisi 11. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)

Hiperoperasi pada himpunan tak kosong H adalah fungsi dari $H \times H$ ke $P^*(H) = P(H)\backslash\{\emptyset\}$, dengan $P(H)$ menyatakan himpunan kuasa H. Misalkan $\circledast$ hiperoperasi pada H dan $(x, y) \in H \times H$ maka $\circledast\,(x, y)$ dilambangkan dengan $x \circledast y$, dan disebut hiperproduk x dan y. Jika A dan B subhimpunan tak kosong dari H, maka $A \circledast B$ didefinisikan oleh:

$$A \circledast B = \bigcup_{a\in A, b\in B} a \circledast b$$

Bila $A \subseteq H$ dan $x \in H$, lambang $A \circledast x$ digunakan sebagai ganti dari $A \circledast \{x\}$. Demikian pula, lambang $x \circledast A$ untuk $\{x\} \circledast A$. Oleh karena itu, berlaku

$$A \circledast x = \bigcup_{a\in A} a \circledast x \text{ dan } x \circledast A = \bigcup_{a\in A} x \circledast A.$$

2.7 Hiper BCI-aljabar

Definisi 12. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)

Hiper BCI-aljabar $(H, \circledast, 0)$ adalah himpunan tak kosong H dengan hiperoperasi "$\circledast$" dan

konstanta 0 memenuhi lima aksioma berikut: untuk semua $x, y, z \in H$,
(B_1) $((x \circledast z) \circledast (y \circledast z)) \ll x \circledast y$,
(B_2) $(x \circledast y) \circledast z = (x \circledast z) \circledast y$,
(B_3) $x \ll x$,
(B_4) $x \ll y$ dan $y \ll x$ berakibat $x = y$,
(B_5) $0 \circledast (0 \circledast x) \ll x, x \neq 0$,
dengan, untuk $A, B \subseteq H, A \ll B$ jika dan hanya jika untuk setiap $a \in A$, ada $b \in B$ sehingga $0 \in a \circledast b$. Secara khusus, untuk setiap $x, y \in H, x \ll y$ jika dan hanya jika $0 \in x \circledast y$. Relasi " $\ll$ " disebut *hiper urutan* di H.

Hiper BCI-aljabar $(H, \circledast, 0)$ dikatakan terurut jika untuk semua $x, y, z \in H$, harus berlaku $x \ll y$ dan $y \ll z$ mengakibatkan $x \ll z$ (relasi transitif).

Contoh 2.7.

Misalkan $H = \{0,1,2\}$. Definisikan hiperoperasi " $\circledast$ " dengan tabel Cayley yang ditunjukkan di bawah ini.

$\circledast$	0	1	2
0	{0,1}	{0,1}	{0,1}
1	{1}	{0,1}	{0,1}
2	{2}	{1,2}	{0,1,2}

Dapat diverifikasi bahwa $(H, \circledast, 0)$ merupakan hiper BCI-aljabar. Lebih lanjut, H terurut.

Definisi 13. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)

Misalkan $(H_1, \circledast_1, 0_1)$ dan $(H_2, \circledast_2, 0_2)$ dua hiper BCI-aljabar. Fungsi $f : H_1 \to H_2$ disebut homomorfime jika $f(x \circledast_1 y) = f(x) \circledast_2 f(y)$, untuk semua $x, y \in H_1$. Lebih lanjut, jika $f(0_1) = 0_2$, maka f disebut hiper homomorfisme. Jika homomorfisme f bijektif maka f disebut isomorfisme dan $(H_1, \circledast_1, 0_1)$ dan $(H_2, \circledast_2, 0_2)$ dikatakan isomorfis, dilambangkan dengan $H_1 \cong H_2$.

Definisi 14. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)

Misalkan $(H_1, \circledast_1, 0_1)$ dan $(H_2, \circledast_2, 0_2)$ dua hiper BCI-aljabar dan $f: H_1 \to H_2$ hiper homomorfisme. Jika f injektif (surjektif), maka f disebut hiper monomorfisme (hiper epimorfisme). Jika f bijektif, f disebut hiper isomorfisme, dilambangkan dengan $H_1 \cong_{\mathcal{H}} H_2$.

Proposisi 1. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Dalam BCI-aljabar H, pernyataan berikut berlaku:

(i) $x \ll 0 \Rightarrow x = 0$
(ii) $A \subseteq B \Rightarrow A \ll B$
(iii) $A \ll \{0\} \Rightarrow A = \{0\}$

Bukti:

(i) Misalkan $x \ll 0$. Maka $0 \in x \circledast 0$ dan juga $0 \in 0 \circledast (x \circledast 0) \subseteq (0 \circledast 0) \circledast (x \circledast 0)$. Dengan (B_1), $0 \ll 0 \circledast x$, sehingga $0 \in 0 \circledast (0 \circledast x)$ Dengan (B_5), $0 \ll x$. Kemudian dengan $x \ll 0$, berdasarkan (B_4), $x = 0$.
(ii) Asumsikan bahwa $A \subset B$ dan misalkan $a \in A$. Ambil $b = a$, maka $b \in B$ dan $a \ll b$ dengan (B_3). Oleh karena itu, $A \ll B$.
(iii) Asumsikan bahwa $A \ll \{0\}$ dan misalkan $a \in A$. Maka $a \ll 0$ sehingga $a = 0$ dengan (i). Oleh karena itu, $A = \{0\}$.

Teorema 1. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Misalkan $f: H_1 \to H_2$ hiper homomorfisme. Maka dua pernyataan berikut berlaku.

(i) Jika $x \ll y$, dengan $x, y \in H_1$, maka $f(x) \ll f(y)$.
(ii) Jika $A, B \subseteq H_1$, $A \ll B$, maka $f(A) \ll f(B)$.

Bukti:

(i) Dari definisi $x \ll y$, $0_1 \in x \circledast_1 y$. Selanjutnya, $f(0_1) \in f(x \circledast_1 y)$ dan karena f hiper homomorfisme, $f(0_1) = 0_2$ dan $f(x \circledast_1 y) = f(x) \circledast_2 f(y)$. Akibatnya, $0_2 \in f(x) \circledast_2 f(y)$ sehingga $f(x) \ll f(y)$.
(ii) Ambil sembarang $x \in f(A)$. Maka $x = f(a)$ untuk suatu $x \in A$. Karena $A \ll B$, terdapat $b \in B$ sedemikian hingga $a \ll b$. Berdasakan (i), $f(a) \ll f(b)$ sehingga $f(A) \ll f(B)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Graf Pembagi Nol Hiper BCI-Aljabar

Definisi 15. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)

Misalkan H hiper BCI-aljabar dan $A \subseteq H$. Definisikan himpunan

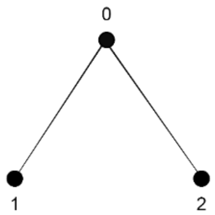
$$L_H(A) \coloneqq \{x \in H \mid x \ll a, \forall a \in A\}$$
$$= \{x \in H \mid 0 \in x \circledast a, \forall a \in A\}$$

Jika $A = \{a\}$, ditulis $L_H(\{a\}) = L_H(a)$. Untuk setiap $x \in H$, himpunan semua pembagi nol x adalah $Z_x = \{y \in H | L_H(\{x, y\}) = \{0\}\}$.

Misalkan H hiper BCI-aljabar berhingga. Graf pembagi nol $\Gamma(H)$ dari H adalah graf dengan himpunan titik $V(\Gamma(H)) = H$ dan himpunan sisi $E(\Gamma(H))$ memenuhi syarat berikut: untuk setiap dua elemen berbeda $x, y \in H$, $xy \in E(\Gamma(H))$ jika dan hanya jika $L_H(\{x, y\}) = \{0\}$ (setara dengan, $x \in Z_y$ atau $y \in Z_x$).

Meskipun terdapat hiper BCI-aljabar tak berhingga, artikel ini hanya membahas graf pembagi nol pada hiper BCI-aljabar berhingga.

Contoh 3.1.
Perhatikan hiper BCI-aljabar H yang didefinisikan pada Contoh 2.7.
Maka $L_H(\{0,1\}) = L_H(\{0,2\}) = \{0\}$ dan $L_H(\{1,2\}) = \{0,1\}$. Himpunan pembagi nol $x \in H$ adalah $Z_0 = \{y \in H \mid L_H(\{0, y\}) = \{0\}\} = \{1,2\}$ dan $Z_1 = \{0\} = Z_2$. Jadi, graf pembagi nol $\Gamma(H)$ dari H diberikan oleh gambar berikut:



Proposisi 2. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Misalkan A dan B subhimpunan dari H. Maka lima pernyataan berikut berlaku:

(i) $L_H(\emptyset) = H$
(ii) $L_H(\{0\}) = \{0\}$
(iii) Jika $A \subseteq B$, maka $L_H(B) \subseteq L_H(A)$
(iv) $L_H(A) = \bigcap_{a \in A} L_H(\{a\})$
(v) Jika $x \in H$, maka $x \in L_H(\{x\})$. Selanjutnya, $L_H(\{x\}) = \{0\}$ jika dan hanya jika $x = 0$.

Bukti :

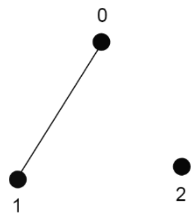
(i) Andaikan $L_H(\emptyset) \neq H$. Maka terdapat $h \in H$ sedemikian hingga $h \notin L_H(\emptyset)$; artinya terdapat $a \in \emptyset$ sedemikian hingga $a \not\ll h$, kontradiksi. Oleh karena itu, $L_H(\emptyset) = H$.
(ii) Dengan definisi, $L_H(\{0\}) \coloneqq \{x \in H | x \ll 0\} = \{0\}$, berdasarkan Proposisi 1 (i).
(iii) Misalkan $x \in L_H(B)$. Maka $x \ll b, \forall b \in B$. Karena $A \subseteq B$, $x \ll a, \forall a \in A$. Jadi, berdasarkan definisi $x \in L_H(A)$. Karenanya, $L_H(B) \subseteq L_H(A)$.
(iv) Dari definisi $L_H(A)$, diperoleh:
$$\begin{aligned} L_H(A) &= \{x \in H | x \ll a, \forall a \in A\} \\ &= \{x \in H | x \in L_H(\{a\}), \forall a \in A\} \\ &= \bigcap_{a \in A} L_H(\{a\}) \end{aligned}$$
(v) Misalkan $x \in H$, dengan $(B_3), x \ll x$. Karenanya, $x \in L_H(\{x\})$. Selanjutnya, jika $x \in L_H(\{x\}) = \{0\}$, maka $x = 0$. Sebaliknya, jika $x = 0$, maka $L_H(\{x\}) = L_H(\{0\}) = \{0\}$ dengan (ii).

Graf pembagi nol hiper BCI-aljabar tidak selalu terhubung.

Contoh 3.2.
Perhatikan hiper BCI-aljabar H dengan '$\circledast$' yang ditentukan dengan tabel Cayley berikut:

$\circledast$	0	1	2
0	{0,1}	{0,1}	{2}
1	{1}	{0,1}	{2}
2	{2}	{2}	{0,1}

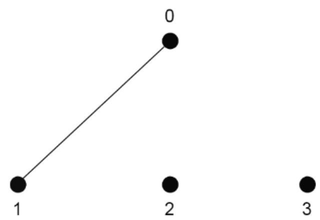
Maka $L_H(\{0,1\}) = \{0\}$; $L_H(\{0,2\}) = \emptyset = L_H(\{1,2\})$. Jadi, graf pembagi nol $\Gamma(H)$ dari H diberikan oleh gambar di bawah ini:



Contoh 3.3.
Perhatikan hiper BCI-aljabar H yang ditentukan dengan tabel Cayley berikut:

$\circledast$	0	1	2	3
0	{0}	{0}	{2}	{2}
1	{1}	{0}	{2}	{2}
2	{2}	{2}	{0}	{0}
3	{3}	{2}	{1}	{0,1}

Maka $L_H(\{0,1\}) = \{0\}$; $L_H(\{0,2\}) = L_H(\{0,3\}) = L_H(\{1,2\}) = L_H(\{1,3\}) = \emptyset$, dan $L_H(\{2,3\}) = \{2\}$. Graf pembagi nol $\Gamma(H)$ dari H diberikan oleh gambar di bawah ini:



Proposisi 3. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Misalkan H hiper BCI-aljabar dengan $|H| \geq 2$. Maka

(i) $\deg_{\Gamma(H)}(0) = |\{x \in H \backslash \{0\} \mid 0 \in L_H(x)\}| = \Delta(\Gamma(H))$;

(ii) $\Gamma(H) = \overline{K}_{|H|}$ jika dan hanya jika $0 \notin L_H(x)$ untuk semua $x \in H\backslash\{0\}$; dan

(iii) Jika $\Gamma(H) \neq \overline{K}_{|H|}$, maka $\mathfrak{T}(\Gamma(H)) = \{x \in H\backslash\{0\} \mid 0 \notin L_H(x)\}$.

Bukti :

(i) Perhatikan bahwa untuk sebarang $x \in H\backslash\{0\}$, $0x \in E(\Gamma(H))$ jika dan hanya jika $L_H(\{0,x\}) = \{0\}$. Karena itu, dengan Proposisi 2(ii), $0x \in E(\Gamma(H))$ jika dan hanya jika $0 \in L_H(x)$. Jadi,

$$\deg_{\Gamma(H)}(0) = |\{x \in H\backslash\{0\} \mid 0x \in E(\Gamma(H)\}| = |\{x \in H\backslash\{0\} \mid 0 \in L_H(x)\}|$$

Misalkan $x \in H \setminus \{0\}$ dan misalkan $y \in N_{\Gamma(H)}(x)$. Maka $L_H(\{x,y\}) = \{0\}$. Dengan Proposisi 2(ii) dan (iv), $L_H(\{0,y\}) = \{0\}$, yaitu, $y \in N_{\Gamma(H)}(0)$. Jadi,

$$\deg_{\Gamma(H)}(x) = |N_{\Gamma(H)}(x)| \leq |N_{\Gamma(H)}(0)| = \deg_{\Gamma(H)}(0).$$

Karena x sembarang, $\Delta(\Gamma(\mathrm{H})) = \deg_{\Gamma(H)}(0)$.

(ii) Misalkan $\Gamma(H) = \overline{K}_{|H|}$. Yaitu, $\mathfrak{T}(\Gamma(H)) = V(\Gamma(H))$. Ini mengakibatkan $\deg_{\Gamma(H)}(0) = 0$. Karena itu, $0x \notin E(\Gamma(H))$ untuk semua $x \in H$. Jadi, $0 \notin L_H(x)$ untuk semua $x \in H\backslash\{0\}$. Sebaliknya, misalkan $0 \notin L_H(x)$ untuk semua $x \in H\backslash\{0\}$. Akibatnya, dengan (i), $\deg_{\Gamma(H)}(0) = \Delta(\Gamma(\mathrm{H})) = 0$. Karena itu, $\Gamma(H) = \overline{K}_{|H|}$.

(iii) Misalkan $\Gamma(H) \neq \overline{K}_{|H|}$. Maka $\deg_{\Gamma(H)}(0) = \Delta(\Gamma(\mathrm{H})) \neq 0$, yaitu $0 \notin \mathfrak{T}(\Gamma(H))$. Misalkan $x \in H\backslash\{0\}$. Jika $0 \notin L_H(x)$, maka $L_H(\{x,y\}) \neq \{0\}$ untuk semua $y \in H\backslash\{x\}$. Jadi, $\deg_{\Gamma(H)}(x) = 0$, yaitu, $x \in \mathfrak{T}(\Gamma(H))$. Sebaliknya, jika $x \in \mathfrak{T}(\Gamma(H))$, maka $0x \notin E(\Gamma(H))$, berdasarkan Definisi 15, $L_H(\{0,x\}) \neq \{0\}$. Dengan Proposisi 2(ii) dan (iv), $0 \notin L_H(x)$. Oleh karena itu, $\mathfrak{T}(\Gamma(H)) = \{x \in H\backslash\{0\}: 0 \notin L_H(x)\}$.

Proposisi berikut menyajikan karakterisasi keterhubungan graf pembagi nol.

Proposisi 4. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019) Misalkan H hiper BCI-aljabar dengan $|H| \geq 2$. Maka lima pernyataan berikut setara:

(i) $\Gamma(H)$ terhubung
(ii) $L_H(\{x,0\}) = \{0\}$ untuk semua $x \in H\backslash\{0\}$.
(iii) $0 \in L_H(x)$ untuk semua $x \in H\backslash\{0\}$.
(iv) $\Delta(\Gamma(\mathrm{H})) = |H| - 1$
(v) $\mathfrak{T}(\Gamma(H)) = \emptyset$

Bukti :

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Misalkan $L_H(\{x,0\}) \neq \{0\}$. Untuk suatu $x \in H$. Maka $0 \notin L_H(x)$, dengan proposisi 2(ii) dan 2(iv). Jadi,
$0 \notin L_H(\{x,y\}) = L_H(\{x\}) \cap L_H(\{y\})$
untuk semua $y \in H$. Yaitu, untuk semua $y \in H$, $xy \notin E(\Gamma(H))$. Mengakibatkan $\Gamma(H)$ tidak terhubung. Sebaliknya, misalkan $L_H(\{x,0\}) = \{0\}$ untuk semua $x \in H\backslash\{0\}$. Maka $deg_{\Gamma(H)}(0) = |H| - 1$. Oleh karena itu, $\Gamma(H)$ terhubung.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Misalkan $L_H(\{x,0\}) \neq \{0\}$ untuk suatu $x \in H$. Maka $0 \notin L_H(x)$, dengan proposisi 2(ii) dan 2(iv). Sebaliknya, misalkan $L_H(\{x,0\}) = \{0\}$ untuk semua $x \in H\backslash\{0\}$. Maka $0 \in L_H(x)$ untuk semua $x \in H\backslash\{0\}$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) Misalkan $0 \in L_H(x)$ untuk semua $x \in H\backslash\{0\}$. Maka $deg_{\Gamma(H)}(0) = |H| - 1$. Dengan menggunakan proposisi 3(i), maka $deg_{\Gamma(H)}(0) = \Delta(\Gamma(\mathrm{H})) = |H| - 1$.

(iv) $\Leftrightarrow$ (v) Dengan proposisi 3(i), $deg_{\Gamma(H)}(0) = |H| - 1$. ini mengakibatkan bahwa $0x \in E(\Gamma(H))$ untuk setiap $x \in H\backslash\{0\}$. Oleh karena itu, $\mathfrak{T}(\Gamma(H)) = \emptyset$ dan misalkan $x \in H\backslash\{0\}$. Karena $x \notin \mathfrak{T}(\Gamma(H))$, ada $y \in H\backslash\{x\}$ sehingga $L_H(x,y) = \{0\}$. Oleh karena itu, $0 \in L_H(x)$ dengan proposisi 2(iv). Dengan proposisi 3(i), $deg_{\Gamma(H)}(0) = \Delta(\Gamma(\mathrm{H})) = |H| - 1$.

Catatan 1.
Misalkan H hiper BCI-aljabar dengan $|H| \geq 2$. Jika $\Gamma(H)$ terhubung, maka

(i) $\mathrm{diam}(\Gamma(H)) = 2$;
(ii) $\deg_{\Gamma(H)}(0) = \Delta(\Gamma(\mathrm{H})) = |H| - 1$

Diameter graf G, dinotasikan dengan $\mathrm{diam}(G)$, adalah eksentrisitas maksimal titik di G. (Abdussakir, 2017)

Proposisi 5. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Misalkan H hiper BCI-aljabar sedemikian hingga $L_H(\{x,0\}) \neq \emptyset$ untuk semua $x \in H$. Maka $L_H(\{x,0\}) = \{0\}$.
Bukti :
Misalkan $L_H(\{x,0\}) = L_H(\{x\}) \cap L_H(\{0\}) \neq \emptyset$ untuk semua $x \in H$. Maka ada $\in L_H(\{x,0\})$. Perhatikan bahwa $y \in L_H\{0\} = \{0\}$, artinya $y = 0$. Dengan mengikuti proposisi 2(ii) dan 2(iv) maka $L_H(\{x,0\}) = \{0\}$.

Catatan 2.
Misalkan H hiper BCI-aljabar sedemikian hingga $L_H(\{x,0\}) \neq \emptyset$ untuk semua $x \in H$. Maka $0x \in E(\Gamma(H))$ untuk setiap $x \in H\backslash\{0\}$.

Proposisi 6. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Jika $|H| > 3$, maka $\Gamma(H)$ bukan sikel atau lintasan.

Bukti :
Kasus 1 : $\exists x \in H\backslash\{0\}$ sedemikian hingga $0 \notin L_H(x)$. Maka $\Gamma(H)$ tidak terhubung, berdasarkan proposisi 4(i) dan 4(iii). Karena tidak terhubung maka $\Gamma(H)$ bukan sikel atau lintasan.
Kasus 2 : Misalkan $0 \in L_H(x)$ untuk suatu $x \in H$. Maka $0x \in E(\Gamma(H))\ \forall\, x \in H \setminus \{0\}$. Terbukti, $\Gamma(\mathrm{H})$ bukan sikel atau lintasan.

Akibat 1.
Jika graf G adalah sikel atau lintasan berorder $n \geq 4$, maka tidak ada hiper BCI-aljabar H sedemikian hingga $\Gamma(H) \cong G$.
Bukti :
Akibat langsung dari Proposisi 6.

Teorema 2. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Misalkan H hiper BCI-aljabar dengan $|H| \geq 2$. Maka $G = \Gamma(H)$ tidak memiliki dua komponen nontrivial; yaitu, G hanya dapat memiliki paling banyak satu komponen nontrivial.

Bukti :
Jika G terhubung, maka komponennya hanya satu yaitu dirinya sendiri. Misalkan G tidak terhubung. Misalkan G memiliki dua komponen nontrivial berbeda, katakan G_1 dan G_2. Misalkan G_3 komponen G dengan $0 \in V(G_3)$ (G_3 mungkin G_1 atau G_2). Jika G_3 berbeda dari G_1 maka $0 \notin L_H(x)$ untuk semua $x \in V(G_1)$.dengan cara yang sama, jika G_3 tidak sama dengan G_2, maka $0 \notin L_H(y)$ untuk semua $y \in V(G_2)$. Oleh karena itu, dengan proposisi 4, G_1 atau G_2 adalah graf trivial, kontradiksi.

Proposisi 7. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Misalkan H hiper BCI-aljabar terurut. Maka
(i) Untuk setiap subhimpunan A dari H, $L_H(L_H(A)) \subseteq L_H(A)$.
(ii) Untuk setiap $a, b \in H$, jika $a \ll b$, maka $L_H(\{a\}) \subseteq L_H(\{b\})$ dan $Z_b \subseteq Z_a$.

Bukti :
(i) Misalkan $x \in L_H(L_H(A))$. Maka $x \ll b$ untuk semua $b \in L_H(A)$. Karena $b \ll a$ untuk semua $a \in A$ dan H terurut, karena H terurut dan urutannya bersifat transitif maka $x \ll a$ untuk semua $a \in A$. Jadi, $x \in L_H(A)$. Karena $x \in L_H(L_H(A))$ dan $x \in L_H(A)$ maka $L_H(L_H(A)) \subseteq L_H(A)$.
(ii) Misalkan $x \in L_H(\{a\})$. Maka $x \ll a$. Karena H terurut dan $a \ll b, x \ll b$. Artinya, $x \in L_H(\{b\})$. Oleh karena itu, $L_H(\{a\}) \subseteq L_H(\{b\})$. Misalkan $x \in Z_b$. Maka $L_H(\{b,x\}) = \{0\}$, berdasarkan definisi 15. Karena $L_H(\{a,x\}) \subseteq L_H(\{b,x\})$, maka $L_H(\{a,x\}) = \{0\}$. ini berarti bahwa $x \in Z_a$. Jadi, $Z_b \subseteq Z_a$.

Proposisi 8. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Misalkan H hiper BCI-aljabar. Maka
(i) $\deg_{\Gamma(H)} x = |Z_x|$ untuk semua $x \in H\backslash\{0\}$.
(ii) $y \in Z_x$ jika dan hanya jika $x \in Z_y$ untuk semua $x, y \in H$.

Bukti :

(i) Jika $x \neq 0$, maka

$$\begin{aligned}|Z_x| &= \left|\{y \in H \setminus \{x\}: L_H(\{x,y\}) = \{0\}\}\right| \\ &= \left|\{y \in H : xy \in E(\Gamma(H))\}\right| \\ &= \deg_{\Gamma(H)} x.\end{aligned}$$

(ii) $y \in Z_x$ berdasarkan definisi 15 maka $L_H(\{x,y\}) = L_H(\{x\}) \cap L_H(\{y\}) = \{0\}$, selanjutnya, ini mengartikan bahwa $x \in Z_y$.

Lemma 1. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Misalkan $f: H_1 \to H_2$ hiper monomorfisme hiper BCI-aljabar. Maka untuk setiap $x, y \in H_1, x \ll y$ jika dan hanya jika $f(x) \ll f(y)$.
Bukti :
Untuk bagian syarat cukup dilakukan dengan menggunakan Teorema 1 (i). Selanjutnya, misalkan $f(x) \ll f(y)$. Maka $0_2 \in f(x) \circledast_2 f(y) = f(x \circledast_1 y)$, berdasarkan definisi 12. Karena f monomorfisme (fungsi injektif) maka mempunyai invers kiri, jadi, $0_1 = f^{-1}(0_2) \in f^{-1}f(x \circledast_1 y) = x \circledast_1 y$. Oleh karena itu, $x \ll y$.

Proposisi 9. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Misalkan $f: H_1 \to H_2$ hiper monomorfisme hiper BCI-aljabar. Maka $L_{H_2}\big(f(A)\big) = f(L_{H_1}(A))$ untuk setiap $A \subseteq H_1$.
Bukti :
Misalkan $f: H_1 \to H_2$ hiper monomorfisme. Misalkan $A \subseteq H_1$.

$y \in f\left(L_{H_1}(A)\right) \Leftrightarrow f^{-1}(y) \in L_{H_1}(A)$; karena f monomorfisme
$\Leftrightarrow f^{-1}(y) \ll a$ untuk semua semua $a \in A$; definisi batas bawah dari $L_{H_1}(A)$
$\Leftrightarrow y \ll f(a)$ untuk semua $a \in A$; Berdasarkan Lemma 1
$\Leftrightarrow y \in L_{H_2}(f(A))$

Oleh karena itu, $L_{H_2}\big(f(A)\big) = f(L_{H_1}(A))$.

Teorema 3. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Misalkan H_1 dan H_2 hiper BCI-aljabar. Jika $H_1 \cong_{\mathcal{H}} H_2$, maka $\Gamma(H_1) \cong \Gamma(H_2)$.
Bukti :
Misalkan $H_1 \cong_{\mathcal{H}} H_2$, katakan $f: H_1 \to H_2$ adalah hiper isomorfisme. Karena $V\big(\Gamma(H_1)\big) = H_1$ dan $V\big(\Gamma(H_2)\big) = H_2$, maka ada fungsi bijektif antara kedua himpunan titik. Perhatikan bahwa untuk setiap dua elemen berbeda $x, y \in H_1, xy \in E\big(\Gamma(H_1)\big)$ jika dan hanya jika $L_{H_1}(\{x,y\}) = \{0_1\}$, berdasarkan Definisi 15. Dengan Proposisi 9, $xy \in E\big(\Gamma(H_1)\big)$ jika dan hanya jika $L_{H_2}(f\{x,y\}) = L_{H_2}(\{f(x), f(y)\}) = \{0_2\}$. Jadi, $xy \in E(\Gamma(H_1))$ jika dan hanya jika $f(x)f(y) \in E(\Gamma(H_2))$. Karena itu, $\Gamma(H_1) \cong \Gamma(H_2)$.

3.2 Graf Pembagi Nol Yang Melibatkan Hiperatom

Definisi 16. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Elemen a di hiper BCI-aljabar H disebut hiperatom jika untuk setiap $x \in H$, harus berlaku $x \ll a$ berakibat $x = 0$ atau $x = a$.

Lambangkan dengan $A(H)$ himpunan semua hiperatom dari H, dan dengan $A^*(H)$ himpunan semua hiperatom tak-nol dari H; yaitu, $A^*(H) = A(H)\backslash\{0\}$. Jelas, $0 \in A(H)$.

Definisi 17. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Hiper BCI-aljabar H dikatakan hiperatomik jika untuk setiap elemen di H adalah hiperatom, yaitu, $A(H) = H$.

Catatan 3.
Hiper BCI-aljabar H adalah hiperatomik jika dan hanya jika $L_H(x) = \{x\}$ atau $L_H(x) = \{0, x\}$ untuk setiap $x \in H$.

Catatan 4.
Hiper BCI-aljabar hiperatomik adalah terurut.
Bukti:
Misalkan H hiper BCI-aljabar hiperatomik. Misalkan $x, y, z \in H$ sedemikian hingga $x \ll y$ dan $y \ll z$, maka dengan Catatan 3, $L_H(z) = \{z\}$ atau $L_H(z) = \{0, z\}$. Karena diketahui $y \ll z$ mengakibatkan $y = 0$ atau $y = z$. Jika $y = 0$, maka $x \ll 0$ karena $x \ll y$. Dengan Proposisi 1, $x = 0$. Karena $0 \ll z$ dan $x = 0$, kita punya $x \ll z$. Jika $y = z$, karena diketahui $y \ll z$ mengakibatkan $x \ll z$. Oleh karena itu, H terurut.

Contoh 3.4.
Pertimbangkan hiper BCI-aljabar yang didefinisikan dengan tabel Cayley berikut:

$\circledast$	0	1	2
0	{0}	{0,1}	{0,1}
1	{1}	{0,1}	{1}
2	{2}	{2}	{0,1,2}

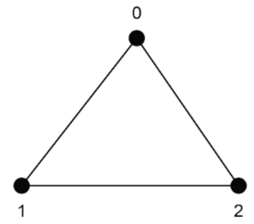
H adalah hiperatomik karena semua elemen di H hiperatom.

Contoh 3.5.
Hiper BCI-aljabar H pada Contoh 2.7 tidak hiperatomik karena 2 bukan hiperatom di H. Karena batas bawah 2 tidak hanya 0 dan 2, $\exists x = 1 \in H$ dengan $1 \ll 2$ tetapi $x = 1 \neq 0$ dan $x = 1 \neq 2$. Namun, hiper BCI-aljabar H pada Contoh 3.2 adalah hiperatomik.

Proposisi 10.
Misalkan H hiper BCI-aljabar sedemikian hingga $|H| \geq 3$. Jika x dan y hiperatom tak-nol berbeda di H, maka $L_H(\{x,y\}) = \{0\}$ atau $\emptyset$.
Bukti :
Kasus 1: jika $0 \notin L_H(x)$, maka $L_H(x) = \{x\}$. Karena itu, $L_H(\{x,y\}) = L_H(\{x\}) \cap L_H(\{y\}) = \emptyset$.
Kasus 2: jika $0 \in L_H(\{x\})$,maka $L_H(\{x\}) = \{0,x\}$. Karena $L_H(\{y\}) = \{0\}$ atau $\{0,y\}$ dengan Catatan 3, kita mempunyai $L_H(\{x,y\}) = L_H(\{x\}) \cap L_H(\{y\}) = \{0\}$ atau $\emptyset$.

Proposisi 11. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Misalkan H hiper BCI-aljabar sedemikian hingga $|H| \geq 2$. Maka $\Gamma(H)$ adalah graf lengkap jika dan hanya jika $\Gamma(H)$ terhubung dan H hiperatomik.
Bukti :
Jika $\Gamma(H)$ tidak terhubung, maka $\Gamma(H)$ bukan graf lengkap. Asumsikan bahwa $\Gamma(H)$ terhubung. Dengan Proposisi 4, $0 \in L_H(x)$ untuk semua $x \in H \setminus \{0\}$. Karena $x \in L_H\{x\}$, berdasarkan aksioma B_3, kita mempunyai $0, x \in L_H(x)$. Jika H tidak hiperatomik, maka ada $z \in H \setminus \{0\}$ sedemikian hingga $y \ll z$ dengan $y \notin \{0,z\}$. Karena $y \in L_H\{y\}$, $y \in L_H\{y,z\}$. Ini berarti bahwa $L_H\{y,z\} \neq \{0\}$, yang mengakibatkan $yz \notin \mathrm{E}(\Gamma(H))$. Oleh karena itu, $\Gamma(H)$ tidak lengkap.
Sebaliknya, misalkan $\Gamma(H)$ terhubung dan H hiperatomik. Maka dengan Proposisi 4 dan Catatan 3, $L_H\{x\} = \{0,x\}$ untuk semua $x \in H \setminus \{0\}$. Jadi, untuk setiap elemen tak-nol berbeda x,y di $H = V(\Gamma(H))$, $L_H\{x\} \cap L_H\{y\} = \{0\}$, yaitu, $xy \in \mathrm{E}(\Gamma(H))$. Karena itu, $\Gamma(H)$ adalah graf lengkap.

Contoh 3.6.
Hiper BCI-aljabar pada Contoh 3.4 memiliki graf lengkap pembagi nol:



Catatan 5.
Diberikan suatu hiper BCI-aljabar H terurut, tidak selalu benar bahwa ada $a \in A^*(H) = A(H) \setminus \{0\}$ sedemikian hingga $a \ll x$ untuk semua $x \in H \setminus \{0\}$.

Contoh 3.7.
Perhatikan hiper BCI-aljabar H yang didefinisikan pada Contoh 3.2. H hiperatomik dan karena itu, terurut dan $A^*(H) = \{1,2\}$. Perhatikan bahwa tidak ada $1 \ll x$ atau $2 \ll x$ untuk semua $x \in H \setminus \{0\}$.

Teorema 4. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Misalkan H hiper BCI-aljabar terurut dengan $|H| \geq 2$. Maka pernyataan berikut berlaku:
(i) Untuk setiap $x \in H$, ada $a_x \in A^*(H)$ sedemikian hingga $a_x \ll x$. Khususnya $A^*(H) \neq \emptyset$.
(ii) Ada $a \in H \setminus \{0\}$ sedemikian hingga $a \ll x$ untuk semua $x \in H \setminus \{0\}$ jika dan hanya jika a adalah hiperatom.

Bukti :
(i) Misalkan $x \in H \setminus \{0\}$. Jika x adalah hiperatom, maka ambil $a_x = x$. Jika x bukan hiperatom, ada $x_1 \in H \setminus \{0,x\}$ sedemikian hingga $x_1 \ll x$. Sekali lagi, jika x_1 adalah hiperatom, maka ambil $a_x = x_1$. Jika tidak, ada $x_2 \in H \setminus \{0, x, x_1\}$ sedemikian hingga $x_2 \ll x_1 \ll x$. Karena H terbatas, terdapat titik terminal $x_n \in H \setminus \{0, x, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ dengan $x_n \ll x_{n-1} \ll \cdots \ll x_2 \ll x_1 \ll x$ sedemikian hingga hanya $z = 0$ (asalkan $0 \in L_H\{x\}$) atau $z = x_n$ memenuhi $z \ll x$. Berarti bahwa $a_x = x_n \in A^*(H)$ dan $a_x \ll x$.
(ii) Misalkan ada $a \in H \setminus \{0\}$ sedemikian hingga $a \ll x$ untuk semua $x \in H \setminus \{0\}$. Pilih salah satu $b \in A^*(H)$. Maka $a \ll b$. Karena $b \in A(H)$ dan $a \neq 0$, maka $a = b$, berdasarkan Definisi 16. Jadi $a \in A^*(H)$. Karena b dipilih sembarang,

kita mempunyai $A^*(H) = \{a\}$. Maka, dengan (i), $a \ll x$.

Contoh 3.8.
Perhatikan hiper BCI-aljabar H terurut yang didefinisikan pada Contoh 2.7. Jelas bahwa 1 adalah satu-satunya hiperatom tak nol dari H dan graf pembagi nol $\Gamma(H)$ dari H adalah graf bintang.

Teorema 5. (Panganduyon & Canoy Jr., 2019)
Misalkan H hiper BCI-aljabar terurut dengan $|H| \geq 2$. Maka $\Gamma(H)$ adalah graf bintang jika dan hanya jika $\Gamma(H)$ terhubung dan $|A^*(H)| = 1$.

Bukti :
Misalkan $\Gamma(H)$ graf bintang. Maka $\Gamma(H)$ terhubung. Jika $|H| = 2$, maka $|A^*(H)| = 1$. Misalkan $|H| \geq 3$. Dengan Proposisi 3(i), 0 adalah titik sentral dari $\Gamma(H)$. Misalkan bahwa $|A^*(H)| \geq 2$, katakan $a, b \in A^*(H)$ dengan $a \neq b$. Karena $0a, 0b \in E(\Gamma(H))$, $0 \in L_H(a) \cap L_H(b)$. Dengan Proposisi 10, $ab \in E(\Gamma(H))$. Artinya, $\Gamma(H)$ bukan graf bintang, suatu kontradiksi. Oleh karena itu, $|A^*(H)| = 1$.

Sebaliknya, misalkan $\Gamma(H)$ terhubung dan $|A^*(H)| = 1$, katakan $A^*(H) = \{a\}$. Jika $|H| = 2$, maka $\Gamma(H) = P_2$ (lintasan dua titik/sisi), termasuk graf bintang. Misalkan $|H| \geq 3$ dan misalkan $y, z \in H\backslash\{0\}$. Dengan Teorema 4(ii), $a \ll y$ dan $a \ll z$. Artinya, $a \in L_H(\{y, z\})$. Karena $a \neq 0$, maka $yz \notin E(\Gamma(H))$. Karena $\Gamma(H)$ terhubung, dengan Proposisi 4, $0x \in E(\Gamma(H))$ untuk semua $x \in H\backslash\{0\}$. Karena itu, $\Gamma(H)$ adalah graf bintang.

PENUTUP

SIMPULAN

Dalam artikel ini, memperkenalkan graf yang diinduksi oleh hiper BCI-aljabar dan telah mempelajari beberapa sifatnya. Artikel ini hanya membahas graf pembagi nol pada hiper BCI-aljabar berhingga. Sejumlah hasil telah ditunjukkan, misalkan H hiper BCI-aljabar dengan $|H| \geq 2$, maka $G = \Gamma(H)$ hanya dapat memiliki paling banyak satu komponen nontrivial. Selanjutnya, misalkan $(H_1, \circledast_1, 0_1)$ dan $(H_2, \circledast_2, 0_2)$ dua hiper BCI-aljabar, jika $H_1 \cong_{\mathcal{H}} H_2$, maka $\Gamma(H_1) \cong \Gamma(H_2)$.

Lebih lanjut, artikel ini juga membahas graf pembagi nol yang melibatkan hiperatom dan sifat-sifatnya. Misalkan H hiper BCI-aljabar terurut dengan $|H| \geq 2$, maka ada $a \in H\backslash\{0\}$ sedemikian hingga $a \ll x$ untuk semua $x \in H\backslash\{0\}$ jika dan hanya jika a adalah hiperatom. Selanjutnya, $\Gamma(H)$ adalah graf bintang jika dan hanya jika $\Gamma(H)$ terhubung dan $|A^*(H)| = 1$.

SARAN

Misalkan $(H_1, \circledast_1, 0_1)$ dan $(H_2, \circledast_2, 0_2)$ hiper BCI-aljabar dan $H = H_1 \times H_2$. Definisikan hiperoperasi $'\circledast'$ pada H sebagai berikut: untuk semua $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in H, (a_1, b_1) \circledast (a_2, b_2) = (a_1 \circledast_1 a_2, b_1 \circledast_2 b_2)$, dimana untuk $A \subseteq H_1$ dan $B \subseteq H_2$ dengan $(A, B) = \{(a.b) : a \in A, b \in B\}$, $0 = (0_1, 0_2)$ dan hiper urutan $(a_1, b_1) \ll (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \ll a_2$ dan $b_1 \ll b_2$. Maka $(H, \circledast, 0) = (H_1 \times H_2, \circledast, (0_1, 0_2))$ adalah hiper BCI-aljabar, yang disebut produk hiper dari H_1 dan H_2 (Patangan & Canoy Jr., 2019).

Dalam artikel ini, membahas sifat-sifat graf pembagi nol $\Gamma(H)$ pada H hiper BCI-aljabar berhingga. Oleh karena itu, saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya yaitu mengkaji graf pembagi nol dari produk hiper dari hiper BCI-aljabar serta membahas apakah sifat-sifat yang sama berlaku.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. (2017). Radius, Diameter, Multiplisitas Sikel, dan Dimensi Metrik Graf Komuting dari Grup Dihedral. *Jurnal Matematika "MANTIK", 03*(01), 1-4.

Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya.* Unesa University Press.

Daniel, F., & Taneo, P. N. (2019). *Teori Graf.* Sleman: Deepublish.

Fatahillah, D. A., & Switrayni, N. W. (2020). Sifat-Sifat Graf Pembagi Nol Pada Gelanggang. *Eigen Mathematics Journal, 03*(01), 29-34.

Marsudi. (2016). *Teori Graf.* Malang: University of Brawijaya Press.

Panganduyon, M. T., & Canoy Jr., S. R. (2019). On a Graph Induced by a Hyper BCI-algebra. *European Journal of Pure and Applied Mathematics, 12*(1), 146-158.

Patangan, R. M., & Canoy Jr., S. R. (2019). Topologies on a Hyper Sum and Hyper Poduct of Two Hyper BCK-algebra. *European Journal of Pure and Applied Mathematics, 12*(4), 1524-1532.

Xin, X. L. (2006). Hyper BCI-Algebra. *Discussiones Mathematicae, 26*, 5-19.