MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 7 No.3 Tahun 2019*
ISSN 2301-9115

PROGRAM LINEAR FUZZY

Ratih Wahyu Hidayah
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : ratihhidayah@mhs.unesa.ac.id

Dwi Juniati
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail **:** dwi_juniati@yahoo.com

Abstrak

Program linear adalah suatu metode matematika yang digunakan untuk proses optimasi, seperti memaksimumkan keuntungan atau meminimumkan biaya. Pada program linear terdapat beberapa asumsi-asumsi untuk menyelesaikan suatu permasalahan. Paramater pada program linear yaitu data-data yang terdiri dari koefisien-koefisien fungsi tujuan, konstanta-konstanta pada fungsi kendala dan koefisien ruas kanan (Right-Hand-Side) yang telah diketahui secara pasti. Namun, dalam kehidupan nyata asumsi-asumsi tersebut jarang dipenuhi dan sering terjadi ketidakpastian. Untuk mengatasi ketidakpastian tersebut dapat menggunakan penerapan dari logika fuzzy dalam penyelesaian program linear, dengan tujuan untuk memasukkan asumsi-asumsi yang belum termuat dalam program linear, sehinnga program linear fuzzy mempunyai penyelesaian yang lebih optimum dibandingkan dengan program linear klasik.

Kata kunci: Program Linear, Fuzzy, Bilangan Fuzzy

Abstract

A linear programming is a mathematical method used for the optimization process, such as maximizing profits or minimizing costs. Linear programming there are several assumptions to solve a problem. Parameters in linear programming are data consisting of objective function coefficients, constants in the function constraints and right-hand-side coefficients that are known for sure. However, in real life these assumptions are rarely fulfilled and uncertainty often occurs. To overcome these uncertainties can use the application of fuzzy logic in solving linear programs, with the aim to include assumptions that have not been contained in a linear program, so that fuzzy linear programming have a more optimum solution compared to classical linear programming.

Keywords: *Linear Programming*, Fuzzy, *Fuzzy Number*

1. PENDAHULUAN

Program linear merupakan salah satu bidang matematika yang digunakan untuk memecahkan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Konsep program linear dikenalkan oleh salah satu ahli matematika, Dr.George Dantzig yaitu dengan dikembangkannya metode simplex pada tahun 1947. Seiring berkembangnya waktu program linear mulai dikembangkan untuk memecahkan permasalahan yang dihadapi di berbagai bidang dan disiplin ilmu.

Program linear merupakan metode matematika yang digunakan untuk proses optimasi, seperti memaksimumkan keuntungan atau meminimumkan biaya. Suatu masalah program linear dapat diselesaikan dengan metode grafik ataupun dengan metode Simpleks, untuk dua variabel atau lebih dapat digunakan metode Simpleks. Pada program linear terdapat beberapa asumsi-asumsi untuk menyelesaikan suatu permasalahan. Paramater pada program linear yaitu data-data yang terdiri dari koefisien-koefisien fungsi tujuan, konstanta-konstanta dan koefisien ruas kanan (Right-Hand-Side) yang telah diketahui secara pasti. Karena parameter tersebut telah diketahui secara pasti, maka asumsi dalam permasalahan program linear tersebut merupakan asumsi kepastian. Namun, dalam kehidupan nyata asumsi-asumsi ini jarang dipenuhi dan sering terjadi ketidakpastian. Ketidakpastian ini bersifat deterministik. Sebagai contoh ketidakpastian dalam penyediaan bahan baku, misalnya suatu toko roti memroduksi jenis roti dengan beberapa bahan baku tertentu. Persediaan bahan baku tidak selalu sama dari waktu ke waktu, bisa saja lebih sedikit atau lebih banyak dari biasanya karena dipengaruhi oleh faktor-faktor tertentu.

Kemungkinan ketidakpastian terjadi pada permasalahan program linear adalah pada asumsi koefisien pada fungsi tujuan. Misalnya memaksimalkan fungsi tujuan dalam kasus jual beli suatu barang, ketidakpastian ini mungkin terjadi ketika koefisien pada fungsi tujuan dipengaruhi oleh faktor tertentu. Salah satu faktornya adalah karena efek dari adanya tawar menawar harga. Sebagai contoh harga jual barang a adalah Rp. 5000,00, pembeli menawar harga tersebut agar mendapatkan harga yang lebih murah. Disisi lain, penjual tetap mempertahankan harga jual yang tinggi. Penjual setuju dengan harga jual yang masih disekitaran harga Rp. 5.000,00 tersebut, mungkin di rentang harga Rp. 4.500,00 hingga Rp. 5.000,00.

Karena adanya ketidakpastian pada permasalahan, sehingga diperlukan suatu teori yaitu teori Fuzzy untuk memperoleh hasil optimal sesuai realita. Teori Fuzzy pertama kali dikemukakan oleh Zadeh pada tahun 1962. Teori ini dapat mengatasi masalah ketidakpastian dalam kehidupan nyata. Pada teori ini, himpunan yang anggotanya dinyatakan dengan derajat keanggotaan dalam selang tertutup antara nol dan satu [0,1] (Zimmermann, 1996). Dengan adanya teori Fuzzy ini, permasalahan program linear dengan asumsi yang tidak pasti ini dapat terselesaikan, yaitu biasa disebut dengan permasalahan program linear fuzzy.

2. KAJIAN TEORI

Program Linear

Benruk baku program linear untuk kasus Memaksimalkan yaitu :

Fungsi tujuan : max $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$

Fungsi kendala :
$$\begin{matrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + & \cdots & a_{1n}X_n \le b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + & \cdots & a_{mn}X_2 \le b_m \end{matrix}$$

Bentuk baku program linear untuk kasus Meminimalkan yaitu:

Fungsi tujuan : min $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$

Fungsi kendala :
$$\begin{matrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + & \cdots & a_{1n}X_n \ge b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + & \cdots & a_{mn}X_2 \ge b_m \end{matrix}$$

Himpunan Fuzzy

Definisi 2.1

Himpunan fuzzy $\mathcal{A}$ pada himpunan semesta X adalah himpunan dari setiap anggota X dengan derajat keanggotaan $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ yang nilainya berupa bilangan real mulai 0 sampai dengan 1. Fungsi $\mu_{\mathcal{A}} : X \to [0,1]$ disebut fungsi keanggotaan.

(Zimmermann, 1996)

Definisi 2.2

Support dari suatu himpunan fuzzy $\mathcal{A}$ pada X, dinotasikan $Supp(\mathcal{A})$ adalah himpunan semua $x \in X$ dengan $\mu_{\mathcal{A}}(x) > 0$.

(Zimmermann, 1996)

Definisi 2.3

Core suatu himpunan fuzzy $\mathcal{A}$ pada X adalah himpunan semua $x \in X$ dengan $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 1$.

(Zimmermann, 1996)

Definisi 2.4

Suatu himpunan fuzzy pada X disebut normal jika ada $x \in X$, dengan $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 1$.

(Zimmermann, 1996)

Definisi 2.5

Potongan-α (himpunan level- α) suatu himpunan fuzzy $\mathcal{A}$ pada X adalah himpunan klasik yang didefinisikan sebagai $\mathcal{A}_\alpha = \{x \in X | \mu_{\mathcal{A}}(x) \ge \alpha \}$. Pemotong kuat-α(himpunan level kuat-α) didefinisikan sebagai $\mathcal{A}_\alpha^{>} = \{x \in X \,|\mu_{\mathcal{A}}(x) > \alpha\}$. (Zimmermann, 1996)

Definisi 2.6

Misal $A \subset \mathbb{R}$

a. Elemen $u \in \mathbb{R}$, disebut batas atas A jika $a \le u, \forall a \in A$

b. Elemen $t \in \mathbb{R}$, disebut batas bawah A jika $t \le a, \forall a \in A$.

Definisi 2.7

Misal $A \subset \mathbb{R}$

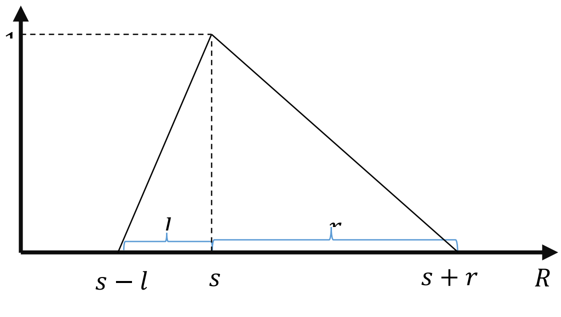
a. Himpunan A dikatakan terbatas ke atas jika A mempunyai batas atas

b. Himpunan A dikatakan terbatas ke bawah jika A mempunyai batas bawah

c. Himpunan A dikatakan terbatas jika A mempunyai batas atas dan sekaligus mempunyai batas bawah.

Fungsi Keanggotaan Fuzzy

1. Representasi Segitiga

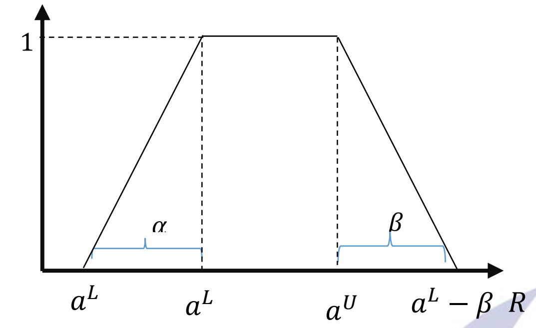


Gambar 1. Representasi Segitiga

$\mu : \mathbb{R} \to [0,1]$, dengan

$$\mu[x] = \begin{cases} 0 & ; x \le s - l \text{ atau } x \ge s + r \\ \dfrac{x - (s - l)}{s - (s - l)} & ; s - l \le x \le s \\ \dfrac{s + r - x}{s + r - s} & ; s \le x \le s + r \end{cases}$$

2. Representasi Trapesium



Gambar 2. Representasi Trapesium

$\mu :\ \mathbb{R} \to [0,1]$, dengan

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & ; x \le \ a^L - \alpha \\ \dfrac{x - (a^L - \alpha)}{a^L - (a^L - \alpha)} & ; a^L - \alpha \le x \le a^L \\ 1 & ; a^L \le x \le a^U \\ \dfrac{(a^U + \beta) - x}{(a^U + \beta) - a^U} & ; a^U \le x \le \ a^U + \beta \\ 0 & ; x \ge a^U + \beta \end{cases}$$

Defuzzyfikasi

Defuzzifikasi adalah proses pengubahan data-data fuzzy menjadi data-data klasik. Terdapat beberapa cara dalam proses defuzzykasi :

1. **MOM (Means of Maxium)**, solusi crisp yang diperoleh dengan cara mengambil nilai rata-rata anggota domain yang memiliki nilai keanggotaan maksimum.
2. **LOM (Large of Maximum),** solusi crisp yang diperoleh dengan cara mengambil nilai terbesar dari anggota domain yang memiliki nilai keanggotaan maksimum.
3. **SOM (Smallest of Maxium),** solusi crisp yang diperoleh dengan cara mengambil nilai terbesar dari anggota domain yang memiliki nilai keanggotaan maksimum.

3. PEMBAHASAN

Bilangan Fuzzy

Definisi 3.1

Misalkan $\mathcal{A}$ adalah himpunan fuzzy pada $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ disebut bilangan fuzzy jika memenuhi syarat-syarat berikut ini :

1. $\mathcal{A}$ merupakan himpunan fuzzy normal
2. $\mathcal{A}_\alpha$ merupakan interval tertutup untuk semua $\alpha \,\epsilon (0\ 1]$
3. Supp($\mathcal{A}$) atau $A_0^{>}$ merupakan himpunan terbatas. (George J. Klir, Bo Yuan, 1995)

Operasi Bilangan Fuzzy Trapesium

Definisi 3.2

Misal $\widetilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ dan $\widetilde{b} = (b^L, b^U, \theta, \gamma)$ merupakan bilangan fuzzy trapesium dan $x \in \mathbb{R}$, operasi bilangan fuzzy trapesium didefinisikan sebagai berikut :

a. $x\,\widetilde{a} = (xa^L, xa^U, x\alpha, x\beta)$, untuk $x > 0$
b. $x\,\widetilde{a} = (xa^U, xa^L, -x\alpha, -x\beta)$, untuk $x < 0$
c. $\widetilde{a} + \widetilde{b} = (a^L + b^L, a^U + b^U, \alpha + \gamma, \beta + \theta)$
d. $\widetilde{a} - \widetilde{b} = (a^L - b^U, a^U - B^L, \alpha + \theta, \beta + \gamma)$

(S. H. Nasseri, E. Ardil, A. Yazdani, and R. Zaefarian, 2007)

Fungsi Peringkat

Definisi 3.3

Fungsi peringkat bilangan fuzzy trapesium didefinisikan sebagai berikut : $\Re(\widetilde{a}) = a^L + a^U + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$

Dimana $\widetilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta) \in F(\mathbb{R})$

(S.H.Nasseri, E. Ardil, 2009)

Definisi 3.4

Nilai peringkat pada bilangan fuzzy $\tilde{0} = (0,0,0,0)$ adalah $\Re(\tilde{0}) = 0$

Untuk setiap dua buah bilangan fuzzy $\widetilde{a}$ dan $\widetilde{b}$ dalam $F(\mathbb{R})$, didefinisikan sebagai berikut :

$\widetilde{a} \gtrsim \widetilde{b}$ jika dan hanya jika $\Re(\widetilde{a}) \ge \Re(\widetilde{b})$ (1)

$\widetilde{a} \succ \widetilde{b}$ jika dan hanya jika $\Re(\widetilde{a}) > \Re(\widetilde{b})$ (2)

$\widetilde{a} \approx \widetilde{b}$ jika dan hanya jika $\Re(\widetilde{a}) = \Re(\widetilde{b})$ (3)

Lemma 3.1

Misal $\widetilde{a}$ dan $\widetilde{b}$ adalah bilangan fuzzy dengan grafik fungsi keanggotaannya berbentuk trapesium, maka berlaku

a. $\widetilde{a} \gtrsim \widetilde{b}$ jika dan hanya jika $\widetilde{a} - \widetilde{b} \gtrsim \tilde{0}$.
b. $\widetilde{a} - \widetilde{b} \gtrsim \tilde{0}$ jika dan hanya jika $-\widetilde{b} \gtrsim -\widetilde{a}$
c. jika $\widetilde{a} \gtrsim \widetilde{b}$ dan $\widetilde{c} \gtrsim \widetilde{d}$ maka $\widetilde{a} + \widetilde{c} \gtrsim \widetilde{b} + \widetilde{d}$

(S. H. Nasseri, E. Ardil, A. Yazdani, and R. Zaefarian, 2007)

Program Linear Fuzzy

Bentuk umum dari Program Linear Fuzzy adalah sebagai berikut : $\max \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j X_j$

dengan syarat $\sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ij} X_j \le \tilde{B}_i\ (i \in N_m)$ (4)

$X_j \ge 0\ (j \in N_n)$

Yang mana $\tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_i, \tilde{C}_j$ merupakan bilangan fuzzy, dan X_j merupakan variabel. Operasi $\le$, penjumlahan dan perkalian yang berlaku adalah operasi penjumlahan dan perkalian pada fuzzy.

Program Linear Fuzzy dengan Nilai Konstanta Sebelah Kanan (B_i) merupakan Bilangan Fuzzy

Bentuk program linear dalam kasus ini adalah max $\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

dengan syarat : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq \tilde{b}_i \ (i \in N_m)$ (5)

$X_j \geq 0 \ (j \in N_n)$

Nilai keanggotaan bilangan fuzzy $\tilde{B}_i \ (i \in N_m)$ adalah

$$\tilde{B}_i = \begin{cases} 1 & ; ketika\ x \leq \tilde{b}i \\ \dfrac{\tilde{b}i + pi - x}{pi} & ; ketika\ \tilde{b}i < x < \tilde{b}i + pi \\ 0 & ; ketika\ \tilde{b}i + pi \leq x \end{cases}$$

G adalah nilai optimal pada himpunan fuzzy, yang mana merupakan subset fuzzy dari $\mathbb{R}^n$, didefinisikan sebagai berikut

$$G(x) = \begin{cases} 1 & ; ketika\ z_u \leq cx \\ \frac{cx - z_l}{z_u - z_l} & ; ketika\ z_l < cx < z_u \\ 0 & ; ketika\ cx \leq z_l \end{cases}$$

Selanjutnya optimasi permasalahan dengan memaksimumkan λ,

max λ

$dengan\ syarat\ \lambda(z_u - z_l) - cx \leq -z_l$

$\lambda(pi + \sum_{i=0}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + p_i (i \in N_m)$ (6)

$\lambda, x_j \geq 0 \ (j \in N_n)$

Contoh 3.1

$Max\ Z = 4.500\ x_1 + 6.000\ x_2$

Dengan batasan $60x_1 + 40\ x_2 \leq$ 90.000+9.000t

$20x_1 + 30\ x_2 \leq$ 50.000 + 5.000t

$x_1, x_2 \geq 0$

Diperoleh hasil : x_1 = 955; x_2 =1.156,705; Z=11.237.730

Program Linear Fuzzy dengan Nilai Konstanta Sebelah Kanan (B_i) dan Koefisien A_{ij} dari Matriks Kendala adalah Bilangan Fuzzy

Bentuk persamaan program linear pada kasus ini adalah max $\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

dengan syarat $\sum_{j=1}^{n} \langle s_{ij} l_{ij} r_{ij} \rangle x_{ij} \leq \langle t_i u_i v_i \rangle (i \in N_m)$ (7)

$X_j \geq 0 \ (j \in N_n)$

$$\max \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

dengan syarat $\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_j \leq t_i$

$$\sum_{j=1}^{n} (s_{ij} - l_{ij}) x_j \leq t_i - u_i$$

$\sum_{j=1}^{n} (s_{ij} + r_{ij}) x_j \leq s_i + r_i \quad (i \in N_m)$ (8)

$X_j \geq 0 \ (j \in N_n)$

Contoh 3.2 $Max\ Z = 4.500\ x_1 + 6.000\ x_2$

dengan syarat

$\langle 60,2,2 \rangle x_1 + \langle 40,2,2 \rangle x_2 \leq \langle 90.000 ; 1.000 ; 10.000 \rangle$

$\langle 20,2,2 \rangle x_1 + \langle 30,2,2 \rangle x_2 \leq \langle 50.000 ; 1.000 ; 10.000 \rangle$

$x_1 x_2 \geq 0$

Dapat dirubah menjadi bentuk sebagai berikut :

$Max\ Z = 4.500\ x_1 + 6.000\ x_2$

Dengan kendala $60x_1 + 40x_2 \leq 90.000$

$20x_1 + 30\ x_2 \leq 50.000$

$58x_1 + 38x_2 \leq 89.000$

$18x_1 + 28x_2 \leq 49.000$

$62x_1 + 42x_2 \leq 100.000$

$22x_1 + 32x_2 \leq 60.000$

$x_1, x_2 \geq 0$

Diperoleh solusi sebagai berikut :

$x_1 = 700, \quad x_2 = 1.200, \quad z = 10.350.000$

Program Linear dengan Koefisien Fungsi Obyektif merupakan Bilangan Fuzzy

Max $z \gtrapprox \tilde{c}x$

Dengan batasan $Ax = b$ (8)

$x \geq 0$

Teorema 3.1

Asumsikan bahwa Program linear dengan bilangan fuzzy adalah masalah yang tidak merosot. Solusi yang mungkin $X_B = B^{-1}b$, $X_N = 0$ adalah optimal, jika $\tilde{z}_j \geq \tilde{c}_j$, untuk setiap $1 \leq j \leq n$.

Bukti. $x_* = (x_B^T\ x_N^T)^T$ adalah solusi dasar yang optimal dari max $\tilde{z} = \tilde{c}x$

Dengan batasan $Ax = b$

$x \geq 0$

Dimana $x_B = B^{-1}b$, $x_N = 0$

Maka $z_* = \tilde{c}_B x_B$

$z_* = \tilde{c}_B B^{-1} b$

Disisi lain $b = Ax$

$= Bx_B + Nx_N$

$$\tilde{z} = \tilde{c}x = \tilde{c}_B x_B + \tilde{c}_N x_N$$

$$= \tilde{c}_B x_B - \sum_{j \neq Bi} (\tilde{c}_B B^{-1} a_j - c_j) x_j$$

$= z_* - \sum_{j \neq Bi} (z_j - c_j) x_j$ ■

Teorema 3.2

Jika dalam tabel simplek, jika l sedemikian sehingga $z_{l-} c_i \geq 0$, dan ada indek basis i, dimana $y_{il} > 0$, maka baris pivot r pada y_{il} yang terkait dengan nilai obyektif fuzzy yang tak turun.

Bukti. Asumsikan kolom l adalah pivot kolom

$x \underset{\sim}{=} (x_B^T, x_N^T)^T$ adalah solusi dasar layak fuzzy dari program linear variabel fuzzzy, dengan $x_B \underset{\sim}{=} B^{-1}b$ dan $x_B \underset{\sim}{=} 0$

$$\tilde{z} \underset{\sim}{=} \tilde{C}_B B^{-1} b = \tilde{C}_B y_0$$

Disisi lain $x_B + \sum_{j \neq Bi} y_j x_j \underset{\sim}{=} y_0$

Dimana $y_j = B^{-1} a_j$

Maka, jika x_1 menjadi basis, $x_B \underset{\sim}{=} y_0 - y_l x_l$
x_B menjadi layak, jika $y_{i0} - y_{il} x_l \geq 0$ untuk setiap $i = 1,2,3,\ldots,m$
Jika $y_{il} \leq 0$, iterasi sebelumnya adalah optimal
Jika $y_{il} > 0$, maka $x_i \underset{\sim}{\leq} \frac{y_{i0}}{y_{il}}$

$$\frac{y_{r0}}{y_{rl}} \underset{\sim}{=} \min\{\frac{y_{i0}}{y_{il}} \mid y_{il} > 0\}$$

$$\tilde{z} \underset{\sim}{=} \tilde{C}_B y_0 - \sum_{j \neq Bi} (\tilde{z}_j - \tilde{c}_j) x_j$$

Jika x_B menjadi basis, maka

$$\tilde{z} \underset{\sim}{=} \tilde{c}_B y_0 - (\tilde{z}_j - \tilde{c}_j) x_j$$

Nilai obyektif tak turun :

$$\tilde{z} \underset{\sim}{=} \tilde{c}_B y_0 - (\tilde{z}_j - \tilde{c}_j) x_j \geq \tilde{c}_B y_0$$

Karena $(\tilde{z}_j - \tilde{c}_j) x_j \leq 0$ ■

Teorema 3.3
Jika untuk sebarang solusi dasar yang mugkin untuk masalah program linear dengan bilangan fuzzy, ada suatu kolom tidak di basis sedemikian sehingga $z_{l-}c_i \geq 0$ dan $y_{il} \leq 0$, $i = 1,\ldots,m$ maka program linear dengan bilangan fuzzy memiliki solusi tak terbatas.

Bukti. Misal x_B adalah solusi dasar dari masalah program linear dengan bilangan fuzzy.
Maka, $x_{Bi} + \sum_{j \neq Bi} y_{ij} x_j = y_{io}$, $i = 1,\ldots,m. j = k,\ldots,n.$
Atau $x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j \neq Bi} y_{ij} x_j$, $i = 1,\ldots,m$ $j = 1,\ldots,n.$
Jika x_1 sebagai basis, $x_1 > 0$ dan $x_j = 0$, untuk setiap $j \neq Bi \cup l$
$y_{il} \leq 0$, $i = 1,\ldots,m$ maka
$y_{i0} - y_{il} x_l \geq 0$

$$\begin{aligned}
\hat{z} \underset{\sim}{=} \tilde{c}_B x_B + \tilde{c}_N x_N &\underset{\sim}{=} \sum_{i=0}^{m} \tilde{c}_{Bi} (y_{i0} - y_{il} x_i) + \tilde{c}_l x_l \\
&\underset{\sim}{=} \sum_{i=0}^{m} \tilde{c}_{Bi} y_{i0} - \sum_{i=0}^{m} \tilde{c}_{Bi}\, y_{il} x_l + \tilde{c}_l x_l \\
&\underset{\sim}{=} \sum_{i=0}^{m} \tilde{c}_{Bi} y_{i0} - (\sum_{i=0}^{m} \tilde{c}_{Bi}\, y_{il} x_l - \tilde{c}_l) x_l \\
&\underset{\sim}{=} \tilde{c}_B y_0 - (\tilde{c}_{Bi} y_i - \tilde{c}_l) x_l \\
&\underset{\sim}{=} z - (\tilde{c}_{Bi} y_i - \tilde{c}_l) x_l \\
&\underset{\sim}{=} z - (z_l - c_l) x_l \qquad (9)
\end{aligned}$$

kita dapat memasukkan x ke dalam basis dengan sebarang nilai yang sangat besar, maka dari (9), didapatkan solusi tak terbatas. ■

Contoh 3.3

$$\max z = (4.300\,;\ 5.000\,;\ 500\,;500) x_1 + (5.800\,;\ 6.500\,;500\,;500) x_2$$

Dengan syarat
$$60 x_1 + 40\, x_2 \leq 90.000$$
$$20 x_1 + 30\, x_2 \leq 50.000$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Tabel 1. Penyelesaian program linear fuzzy

Basic	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
$\tilde{Z}$	(-5.000,-4.400,500,500)	(-6.500,-5.900,500,500)	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$
S_1	60	40	1	0	90.000
S_2	20	30	0	1	50.000

Karena,
$(\tilde{z}_1 - \tilde{c}_1, \tilde{z}_2 - \tilde{c}_2) \underset{\sim}{=}$
$((-5.000, -4.400, 500, 500),\ (-6.500, -5.900, 500, 500))$
$(\gamma_1, \gamma_2) = (\Re(\gamma_1), \Re(\gamma_2))$
$\Re(\gamma_1) = -8.900$
$\Re(\gamma_2) = -11.900$
Maka $\Re(\gamma_2) < \Re(\gamma_1)$, selanjutnya x_2 menjadi basis baru, dan S_2 meninggalkan basis, karena $(\frac{50.000}{30} < \frac{90.000}{40})$.

Tabel 2. Penyelesaian program linear fuzzy

Basic	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
$\tilde{Z}$	(-1.064,7; -64,5;833,5; 833,5)	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	(191,4;214,5;16,5;16,5)	(9.666.686; 10.833.355; 833.335; 833.335)
S_1	33,32	0	1	-1,32	23.333,2
x_2	0,667	1	0	0,033	1.666,67

$\Re(\gamma_1) < \Re(\gamma_3)$, selanjutnya x_1 menjadi basis baru, dan S_1 meninggalkan basis

Tabel 3. Penyelesaian program linear fuzzy

Basic	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
$\tilde{Z}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	(1,935; 31,941; 25,005; 25,005)	(149,24; 211,95; 49,50; 49,50)	(9.711.853,803; 11.578.938,86; 1.417.015,046; 1.417.015,046)
x_1	1	0	0,030	-0,0396	700,276
x_2	0	1	-0,02001	0,0594	16.199,58591

$\Re(\gamma_3)$ = $58,881 \geq 0$
$\Re(\gamma_4)$ = $410,69 \geq 0$, maka solusi sudah optimal yaitu sebagai berikut :

$x_1 = 700{,}276$
$x_2 = 16.199{,}58591$
$z =$ (9.711.853,803; 11.578.938,86; 1.417.015,046; 1.417.015,046)
Selanjutnya dilakukan proses defuzzyfikasi, yaitu menggunakan metode LOM (largest of maximum), jadi $z = 11.578.938{,}86$.

Program Linear dengan Variabel merupakan Bilangan Fuzzy

Max $\tilde{z} = c\tilde{x}$
Dengan batasan $A\tilde{X} = \tilde{b}$ (10)
$x \geq 0$

Teorema 3.4
Asumsikan bahwa Program linear dengan variabel fuzzy adalah masalah yang tidak merosot. Solusi yang mungkin $\tilde{x}_B = B^{-1}b$, $\tilde{x}_N = 0$ adalah optimal, jika $\tilde{z}_j \geq \tilde{c}_j$ untuk setiap $1 \leq j \leq n$.
Bukti. $x_* = (x_B^T \, x_N^T)^T$ adalah solusi dasar yang optimal dari max $\tilde{z} = c\tilde{x}$
Dengan batasan $A\tilde{x} = b$
$\tilde{x} \geq \tilde{0}$
Dimana $\tilde{x}_B = B^{-1}b$, $\tilde{x}_N = 0$
Maka $z_* = c_B\tilde{x}_B$
$z_* = c_B B^{-1} b$
Disisi lain $b = A\,\tilde{x} = B\tilde{x}_B + N\tilde{x}_N$
$z = c\tilde{x} = c_B\tilde{x}_B + c_N\tilde{x}_N$
$= c_B\tilde{x}_B - \sum_{j \neq Bi}(c_B B^{-1} a_j - c_j)\tilde{x}_j$
$= z_* - \sum_{j \neq Bi}(z_j - c_j)\tilde{x}_j$ ■

Teorema 3.5
Jika dalam tabel simplek, jika l sedemikian sehingga $z_{l-}c_i \geq 0$, dan ada indek basis i, dimana $y_{il} > 0$, maka baris pivot r pada y_{il} yang terkait dengan nilai obyektif fuzzy yang tak turun.
Bukti. Asumsikan kolom l adalah pivot kolom
$\tilde{x} \,\tilde{=}\, (\tilde{x}_B^T, \tilde{x}_N^T)^T$ adalah solusi dasar layak fuzzy dari program linear variabel fuzzzy, dengan $\tilde{x}_B \,\tilde{=}\, B^{-1}\tilde{b}$ dan $\tilde{x}_B \,\tilde{=}\, \tilde{0}$
$\tilde{z} \,\tilde{=}\, C_B B^{-1}\tilde{b} = C_B\tilde{y}_0$
Disisi lain $\tilde{x}_B + \sum_{j \neq Bi} y_j\tilde{x}_j \,\tilde{=}\, \tilde{y}_0$
Dimana $y_j = B^{-1}a_j$
Maka, jika $\tilde{x}_1$ menjadi basis, $\tilde{x}_B \,\tilde{=}\, \tilde{y}_0 - y_l\tilde{x}_l$
$\tilde{x}_B$ menjadi layak, jika $y_{i0} - y_{il}\tilde{x}_l \geq 0$ untuk setiap $i = 1,2,3,\dots,m$
Jika $y_{il} \leq 0$, iterasi sebelumnya adalah optimal
Jika $y_{il} > 0$, maka $\tilde{x}_i \,\tilde{\leq}\, \frac{\tilde{y}_{i0}}{y_{il}}$
$\frac{\tilde{y}_{r0}}{y_{rl}} \,\tilde{=}\, \min\{\frac{\tilde{y}_{i0}}{y_{il}} \mid y_{il} > 0\}$
$\tilde{z} \,\tilde{=}\, C_B y_0 - \sum_{j \neq Bi}(z_j - c_j)\tilde{x}_j$
Jika $\tilde{x}_B$ menjadi basis, maka
$\tilde{z} \,\tilde{=}\, C_B\tilde{y}_0 - (z_j - c_j)\tilde{x}_j$
Nilai obyektif tak turun :
$\tilde{z} \,\tilde{=}\, C_B\tilde{y}_0 - (z_j - c_j)\tilde{x}_j \geq C_B\tilde{y}_0$
Karena $(z_j - c_j)\tilde{x}_j \leq 0$ ■

Teorema 3.6
Jika untuk sebarang solusi dasar yang mugkin untuk masalah program linear dengan variabel fuzzy, ada suatu kolom tidak di basis sedemikian sehingga $z_{l-}c_i \geq 0$ dan $y_{il} \leq 0$, $i = 1,\dots,m$ maka program linear dengan bilangan fuzzy memiliki solusi tak terbatas.
Bukti.
Misal $\tilde{x}_B$ adalah solusi dasar dari masalah program linear dengan bilangan fuzzy.
Maka, $\tilde{x}_{Bi} + \sum_{j \neq Bi} y_{ij}\tilde{x}_j = \tilde{y}_{i0}$, i=1,...,m. j=k,...,n.
Atau
$$\tilde{x}_{Bi} = \tilde{y}_{i0} - \sum_{j \neq Bi} y_{ij}\tilde{x}_j, i = 1,\dots,m \; j = 1,\dots,n$$
Jika $\tilde{x}_1$ sebagai basis, $\tilde{x}_1 > 0$ dan $\tilde{x}_j = 0$, untuk setiap $j \neq Bi \cup l$
$y_{il} \leq 0$, $i = 1,\dots,m$ maka
$\tilde{y}_{i0} - y_{il}\tilde{x}_l \geq 0$
$$\hat{z} = c_B\tilde{x}_B + c_N\tilde{x}_N = \sum_{i=0}^{m} c_{Bi}(\tilde{y}_{i0} - y_{il}\tilde{x}_i) + c_l\tilde{x}_l$$
$$= \sum_{i=0}^{m} c_{Bi}\tilde{y}_{i0} - \sum_{i=0}^{m} c_{Bi}\, y_{il}x_i + c_l\tilde{x}_l$$
$$= \sum_{i=0}^{m} c_{Bi}\tilde{y}_{i0} - (\sum_{i=0}^{m} c_{Bi}\, y_{il}\tilde{x}_i - c_l)\tilde{x}_l$$
$$= c_B\tilde{y}_0 - (c_{Bi}y_i - c_l)\tilde{x}_l$$
$$= \tilde{z} - (z_l - c_l)\tilde{x}_l \quad (11)$$
kita dapat memasukkan x ke dalam basis dengan sebarang nilai yang sangat besar, maka dari (11), didapatkan solusi tak terbatas. ■
Contoh 3.4
$$\max z = 4500x_1 + 6000x_2$$
Dengan syarat
$60x_1 + 40\,x_2 \leq (8900{,}9600{,}100{,}100)$
$20x_1 + 30\,x_2 \leq (48000{,}60000{,}100{,}100)$
$x_1, x_2 \geq 0$

Tabel 4. Contoh program linear fuzzy

Basic	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	S_1	S_2	RHS	$\Re(RHS)$
Z	-4.500	-6.000	0	0	$\tilde{0}$	0
S_1	60	40	1	0	(8.900 ; 96.000 ; 100 ; 100)	185.100
$\tilde{x}_2$	20	30	0	1	(48.000 ; 60.000 ; 100; 100)	108.100

Tabel 5. Penyelesaian program linear fuzzy

Basic	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	S_1	S_2	RHS
Z	0	0	14,94	178,2792	(10.078.269,24 ; 12.126.411,48 ; 218.211,06; 218.211,06)
$\tilde{x}_1$	1	0	0,030	-0,0396	(270,11 ; 960,38;36,97; 36,97)
$\tilde{x}_2$	0	1	-0,02001	0,05941	(959,43; 932,8; 8,64; 8,64)

Didapatkan solusi sebagai berikut :
$x_1 = (270{,}11\ ;\ 960{,}38; 36{,}97; 36{,}97)$
$x_2 = (959{,}43;\ 932{,}8;\ 8{,}64;\ 8{,}64)$
z= (10.078.269,24; 12.126.411,48 ; 218.211,06; 218.211,06)
Selanjutnya dilakukan proses defuzzyfikasi, yaitu menggunakan metode LOM (largest of maximum), jadi $z = 12.126.411{,}48$

4. PENUTUP

Simpulan

Program linear fuzzy dapat digunakan untuk mengatasi ketidakpastian yang terjadi pada program linear. Ketidakpastian tersebut bisa terjadi pada fungsi obyektif, koefisien pada fungsi kendala, maupun pada batas persediaan. Program linear dengan ilustrasi permasalahan sebagai berikut :

$\max z = 4500x_1 + 6000x_2,$

dengan syarat $60x_1 + 40x_2 \ \leq\ 90000$

$$20x_1 + 30x_2 \ \leq\ 50000$$

$$x_1, x_2 \geq\ 0$$

Solusi program linear klasik di atas adalah sebagai berikut:

$$x_1 = 700$$
$$x_2 = 1.200$$
$$Z = 10.350.000$$

1. Program linear dengan batas persediaan berupa bilangan fuzzy dengan toleransi sebesar 10% didapatkan
$$x_1 = 955$$
$$x_2 = 1156{,}705$$
$$Z = 11.237.730$$
2. Program linear dengan konstanta pada fungsi kendala dan batas persediaan adalah himpunan fuzzy didapatkan solusi sebagai berikut :
$$x_1 = 700$$
$$x_2 = 1200$$
$$z = 10.350.000$$
3. Program linear dengan koefisien pada fungsi obyektif merupakan bilangan fuzzy, didapatkan solusi sebagai berikut :
$$x_1 = 700{,}276$$
$$x_2 = 16199{,}58591$$
$$z = 9711853{,}803$$
4. Program linear dengan variabel merupakan bilangan fuzzy, didapatkan solusi sebagai berikut:
$$x_1 = 960{,}38$$
$$x_2 = 959{,}43$$
$$z = 12.126.411{,}48$$

Saran

Penelitian ini masih dapat dikembangkan sehingga disarankan untuk penelitian selanjutnya dapat menggunakan metode Simpleks BIG-M dan diaplikasikan dengan kondisi di lapangan.

DAFTAR PUSTAKA

Dimyati, Tjuju Tarliah; Akhmad Dimyati. (2003). *Operations Research.* Bandung: Sinar Baru Algesindo.

George J. Klir, Bo Yuan. (1995). *Fuzzy Set and Fuzzy Logic.* United State of America: Prentice Hall PTR Prentice-Hall Inc.

Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis, Hanif D. Sherali. (2009). *Linear Programming and Network Flows.* State United of America: Wiley.

S. H. Nasseri, E. Ardil, A. Yazdani, and R. Zaefarian. (2007). Simplex Method for Solving Linear Programming Problems with Fuzzy Numbers. *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, 514.

S.H.Nasseri, E. Ardil. (2009). Simplex Method for Fuzzy Variable Linear Programming Problem. *World Academic of Science, Engineering and Technology International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, 885.

Sri Kusumadewi, Hari Purnomo. (2004). *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Zimmermann, H.-J. (1996). *Fuzzy Set Theory.* London: Kluwer Academic .