MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 7 No.1 Tahun 2019*
ISSN 2301-9115

KEKONVEKSAN SUATU FUNGSI PADA RUANG METRIK KONVEKS

Alfira Rahmah
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: alfirarahmah@mhs.unesa.ac.id

Dr. Manuharawati, M.Si.
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: manuharawati@unesa.ac.id

Abstrak

Suatu ruang metrik (X, d) dengan struktur konveks W disebut ruang metrik konveks dan dinotasikan dengan (X, W, d). Suatu fungsi di dalam ruang metrik konveks perlu di analisis kekonveksannya. Hal ini dapat diketahui menggunakan sifat-sifat fungsi di dalam ruang metrik konveks. Artikel ini relevan dengan penelitian Ahmed A. Abdelhakim yaitu menjelaskan tentang sifat-sifat kekonveksan suatu fungsi pada ruang metrik konveks, diantaranya adalah komposisi fungsi W-konveks, penjumlahan fungsi W-konveks dan perkalian skalar dengan fungsi W-konveks adalah W-konveks.

Kata kunci: ruang metrik konveks, kekonveksan

Abstract

A metric spaces (X, d) with convex structure W is called convex metric spaces and denoted by (X, W, d). Convexity of some functions in convex metric spaces is needed to be analyzed. It can be proved by some properties of function in convex metric spaces. This article is relevant to Ahmed A. Abdelhakim research that explain about convexity's properties of some functions in convex metric spaces, some of them are composition of W-convex functions is W-convex, sum of W-convex functions is W-convex and scalar multiplication with W-convex function is W-convex.

Keywords : convex metric spaces; convexity

1. PENDAHULUAN

Himpunan konveks merupakan himpunan yang unik, yakni himpunan yang memuat penggal garis antara kedua titik di dalam himpunan tersebut. Pada tahun 1970, Takahashi memperkenalkan suatu konsep konveksitas dalam ruang metrik yang di sebut struktur konveks. Suatu ruang metrik yang memenuhi struktur konveks disebut ruang metrik konveks.

Dalam artikel ini akan dibahas lebih rinci mengenai sifat-sifat kekonveksan suatu fungsi pada ruang metrik konveks yang relevan dengan penelitian Ahmed. A. Abdelhakim (2016).

2. KAJIAN TEORI

A. Ruang Metrik

Definisi 2.1

Diberikan suatu himpunan tak kosong X. Fungsi $d : X \times X \to \mathbb{R}$ disebut fungsi jarak atau metrik pada X jika untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku :

i) $d(x, y) \geq 0$
ii) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
iii) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetris)
iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$(ketaksamaan segitiga)

$d(x, y)$ disebut jarak dari x ke y dan pasangan (X, d) disebut ruang metrik.

(Kreyszig, 1978:3)

Definisi 2.2 (Bola Terbuka)

Diketahui ruang metrik $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d}), \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0}$. Bola terbuka dengan pusat $\mathbf{p}$ dan jari-jari $\boldsymbol{\varepsilon}$ dinotasikan dengan $\boldsymbol{B_\varepsilon(p)} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} : \boldsymbol{d(x, p)} < \boldsymbol{\varepsilon}\}$.

(Manuharawati, 2013:197)

Definisi 2.3 (*Sphere*)

Diketahui ruang metrik $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d}), \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{X}$ dan dan $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0}$. *Sphere* dengan pusat $\boldsymbol{p}$ dan jari-jari $\boldsymbol{\varepsilon}$ dinotasikan dengan $\boldsymbol{S_\varepsilon(p)} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} : \boldsymbol{d(x, p)} = \boldsymbol{\varepsilon}\}$.

(Sohrab, 2014:185)

Definisi 2.4 (Kombinasi Kerucut)

Diberikan $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_k} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ dan $\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}, \dots, \boldsymbol{\lambda_k} \in \mathbb{R}$.

$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\lambda_i x_i}$ disebut kombinasi kerucut jika $\boldsymbol{\lambda_i} \geq \mathbf{0}$.

(Paffenholz, 2010:1)

B. Fungsi

Definisi 2.5 (Fungsi Kontinu)

Diketahui suatu himpunan $X \in \mathbb{R}$ dan $I = [\ 0{,}1\ ]$ $A = \{(x, y; t){:}\ x,\ y \in X,\ t \in I\}$ dan metrik pada A dan X berturut-turut adalah d_A, d_X. Fungsi $f{:}\,A \to X$ dikatakan kontinu di $(x_0, y_0; t) \in A$ jika untuk sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, terdapat $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ sedemikian hingga untuk semua
$(x,\ y;\ t) \in\ A, d_A\big((x,\ y;\ t), (x_0,\ y_0;\ t)\big) < \delta$ berlaku $d_X\big(f\ (x,\ y;\ t), f\ (x_0,\ y_0;\ t)\big) < \varepsilon$.

(Kreyszig, 1978:20)

Definisi 2.6 (Kontinu Lipschitz dan Lipschitz Lokal)

Diberikan ruang metrik $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d_X})$ dan $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{d_Y})$.
Fungsi $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ dikatakan kontinu Lipschitz jika terdapat suatu konstanta $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{K} \geq \mathbf{0}$ sedemikian hingga untuk semua $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{X}$ berlaku $\boldsymbol{d_Y}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})\big) \leq \boldsymbol{Kd}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$.
Fungsi $\boldsymbol{f}$ dikatakan Lipschitz lokal jika untuk suatu $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{X}$ terdapat suatu konstanta $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{K} \geq \mathbf{0}$ dan $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$ sedemikian hingga $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) < \boldsymbol{\delta} \Rightarrow \boldsymbol{d_Y}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})\big) \leq \boldsymbol{Kd}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$.

(Sohrab, 2014:163)

3. PEMBAHASAN

A. Ruang Metrik Konveks

Definisi 3.1

Diketahui (X, d) suatu ruang metrik dan $I = [0{,}1]$. Suatu fungsi kontinu $W : X \times X \times I \to X$ disebut struktur konveks pada X jika untuk setiap $x, y \in X$ dan untuk semua $t \in I$, berlaku $d\big(v, W(x, y; t)\big) \leq (1-t)d(v, x) + td(v, y)$ (1) untuk semua $v \in X$. Suatu ruang metrik (X, d) dengan struktur konveks disebut ruang metrik konveks dan dinotasikan dengan $(X, W; d)$. Himpunan X disebut konveks jika untuk setiap $x, y \in X$ dan $t \in I$ berlaku
$W(x, y; t) = (1-t)x + ty \in X$.

(Abdelhakim, 2016:348)

Contoh 3.1

Diketahui $X \subset \mathbb{R}$, $I = [0{,}1]$ dan $A = \{(x, y; t){:}\ x,\ y \in X,\ t \in I\}$. Diberikan fungsi $W{:}\,A \to X$ dengan $W(x, y; t) = (1-t)x + ty$.

Jika diberikan ruang metrik (X, d) dengan $d(x, y) = |x - y|$, dapat dibuktikan dengan mudah bahwa W adalah fungsi kontinu.
Selanjutnya ambil suatu $x, y \in X$ dan $t \in I$.
untuk semua $v \in X$,

$$
\begin{aligned}
& d\big(v, W(x, y; t)\big) \\
&= |v\ - W(x,\ y;\ t)\ | \\
&= \big|v\ - \big((1-t)\ x + t\ y\big)\big| \\
&= |2v\ - (1-t)\ x - v - t\ y| \\
&= |2v\ - (1-t)\ v + (1-t)\ v - (1-t)\ x - v \\
&\qquad - t\ v + t\ v - t\ y| \\
&= |2v - v\ + t\ v + (1-t)\ (v - x) -\ v - t\ v \\
&\qquad + t(v - y)| \\
&= |\ v + t\ v -\ v - t\ v + (1-t)\ (v - x) \\
&\qquad + t\ (v - y)| \\
&= |(1-t)\ (v - x) + t\ (v - y)| \\
&\leq |(1-t)\ (u - x)| + |t\ (u - y)| \\
&= (1-t)\ |v - x| + t\ |v - y| \\
&= (1-t)\ d(v,\ x) + t\ d(v,\ y)
\end{aligned}
$$

Karena ruang metrik (X, d) memenuhi struktur konveks W (bersadarkan Definisi 3.1), maka (X, W, d) merupakan suatu ruang metrik konveks.
Untuk kasus yang sama dengan metrik yang berbeda, misalkan $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$. Dapat dibuktikan dengan mudah bahwa W adalah fungsi kontinu dan

$$
\begin{aligned}
& d\big(v, W(x, y; t)\big) \\
&= \sqrt{|u - W(x, y; t)|}
\end{aligned}
$$

Analog dengan cara di atas diperoleh

$$
\begin{aligned}
& d\big(v, W(x, y; t)\big) \\
&= \sqrt{|(1-t)(v - x) + t(v - y)|} \\
&\leq \sqrt{|(1-t)(v - x)| + |t(v - y)|} \\
&= \sqrt{(1-t)|v - x| + t|v - y|} \\
&\leq (1-t)\sqrt{|v - x|} + t\sqrt{|v - y|} \\
&\leq (1-t)d(v, x) + td(v, y)
\end{aligned}
$$

Karena ruang metrik (X, d) dengan $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ memenuhi struktur konveks W maka (X, W, d) merupakan ruang metrik konveks.

Lemma 3.1

Diberikan ruang metrik konveks (X, W, d).
Untuk sebarang $x, y \in X$ dan sebarang $t \in I$ berlaku
$d\big(x, W(x, y; t)\big) = t\ d(x, y)$,
$d\big(y, W(x, y; t)\big) = (1-t)\ d(x, y)$.

(Abdelhakim, 2016:349)

Bukti :

Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $t \in I$

Misalkan $d(x, W(x,y;t)) = k$,
$d(y, W(x,y;t)) = l$ dan $d(x,y) = m$.
Berdasarkan Defінsi 3.1,
$d(v, W(x,y;t)) \leq (1-t)d(v,x) + td(v,y)$,
untuk setiap $v \in X$.
Selanjutnya, untuk $v = x$,
$d(x, W(x,y;t)) \leq (1-t)\ d(x,x) + td(x,y)$
$d(x, W(x,y;t)) \leq td(x,y)$

$$k \leq tm \tag{2}$$

Untuk $v = y$,
$d(y, W(x,y;t)) \leq (1-t)d(y,x) + td(y,y)$
$d(y, W(x,y;t)) \leq (1-t)d(x,y)$

$$l \leq (1-t)m \tag{3}$$

Dari (2) dan (3) diperoleh
$k + l \leq (1-t)\ m + tm$

$$k + l \leq m \tag{4}$$

Dari ketaksamaan segitiga diperoleh
$d(x,y) \leq d(x, W(x,y;t)) + d(W(x,y;t), y)$
$d(x,y) \leq d(x, W(x,y;t)) + d(y, W(x,y;t))$

$$m \leq k + l \tag{5}$$

Dari (4) dan (5) diperoleh $m \leq k + l \leq m$,
akibatnya $k + l = m$ (6)
Andaikan $k \neq tm$ dan $l \neq (1-t)m$,
maka $k < tm$ atau $k > tm$ dan $l < (1-t)m$ atau $l > (1-t)m$, sehingga $k + l < (1-t)m + tm$ dan $k + l > (1-t)m + tm$.
$k + l < m - tm + tm$

$$k + l < m \tag{7}$$

dan
$k + l > m - tm + tm$

$$k + l > m \tag{8}$$

Pernyataan (6) dan (7) adalah suatu kontradiksi.
Pernyataan (6) dan (8) adalah suatu kontradiksi.
Oleh karena itu, yang benar adalah $k = tm$ dan $l = (1-t)m$.
Dengan kata lain,
$d(x, W(x,y;t)) = td(x,y)$,
$d(y, W(x,y;t)) = (1-t)d(x,y)$
Jadi, Lemma 3.1 terbukti.

B. Kekonveksan Fungsi

Definisi 3.2

Suatu fungsi $f : X \to \mathbb{R}$ pada ruang metrik konveks (X, W, d) adalah konveks jika untuk semua $x, y \in X$ dan $t \in I = [0,1]$ berlaku
$f(W(x,\ y;\ t)) \leq (1-t)\ f(x) + t\ f(x)$.
Fungsi f disebut W-konveks kuat
Jika untuk semua $x, y \in X$ dan setiap $t \in I^o = (0,1)$ berlaku $f(W(x,y,t)) < (1-t)f(x) + tf(x)$.

(Abdelhakim, 2016:349)

Contoh 3.2

Diberikan $X \subset \mathbb{R}$ dan untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ metrik d didefinisikan dengan $d(x,y) = |x - y|$. Dapat dibuktikan dengan mudah bahwa (X, d) merupakan suatu ruang metrik. Diberikan suatu pemetaan kontinu $W: X \times X \times I \to X$ dan didefinisikan dengan $W(x,y;t) = (1-t)\ x + t\ y$.
Karena untuk semua $t \in I = [0,1]$ dan sebarang $v \in X, d(v, W(x,y;t)) = |v - W(x,y;t)|$.
Berdasarkan Contoh 3.1, (X, W, d) merupakan ruang metrik konveks. Fungsi $f: X \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = |x|$ adalah $W-$ konveks.

Proposisi 3.1 (Komposisi fungsi konveks naik)

Diberikan $f : X \to \mathbb{R}$ suatu fungsi W-konveks pada ruang metrik konveks (X, W_X, d_X) dan $g : f(X) \to \mathbb{R}$ naik dan konveks, maka $g \circ f$ adalah W-konveks. Komposisi $g \circ f$ W-konveks kuat jika g W-konveks kuat atau f W-konveks kuat dan g naik kuat.

(Abdelhakim, 2016:350)

Bukti :

Misalkan $x, y \in X$ dan $t \in I, f$ fungsi W-konveks, maka berdasarkan Definisi 3.2 berlaku
$f(W_X(x,y;t)) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.
Misalkan $x, y \in X$.
Diketahui $g : f(X) \to \mathbb{R}$ naik , maka untuk setiap $f(x), f(y) \in f(X)$, $f(x) < f(y)$ berlaku
$g(f(x)) \leq g(f(y))$.
Karena g fungsi W-konveks, maka

$$g(W(f(x), f(y); t)) \leq (1-t)g(f(x)) + t\ g(f(y)).$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(W(x,y;t)) &= g\left(f(W_X(x,y;t))\right) \\ &< g((1-t)f(x) + t\ f(y)) \\ &= g(W(f(x), f(y); t)) \\ &\leq (1-t)g(f(x)) + tg(f(y)).\end{aligned}$$

Jadi $g \circ f$ fungsi W-konveks.
Akan dibuktikan jika g W-konveks kuat atau f W-konveks kuat dan g naik kuat maka $g \circ f$ W-konveks kuat. Karena f W-konveks kuat, maka
$f(W_X(x,y;t)) < (1-t)f(x) + t\ f(y)$.
Karena g W-konveks kuat , maka

$$g(W(f(x), f(y); t)) < (1-t)g(f(x)) + t\ g(f(y)).$$

Karena g naik kuat, maka untuk setiap $f(x), f(y) \in f(X)$, $f(x) < f(y)$ berlaku $g\big(f(x)\big) < g\big(f(y)\big)$.

Kasus 1 (g W-konveks kuat, f W-konveks kuat dan g naik kuat)

$$\begin{aligned}(g \circ f)\big(W(x,y;t)\big) &= g\left(f\big(W_X(x,y;t)\big)\right)\\ &< g\big((1-t)f(x) + tf(x)\big)\\ &= g\big(W(f(x), f(y); t)\big)\\ &< (1-t)g\big(f(x)\big) + tg\big(f(x)\big).\end{aligned}$$

Kasus 2 (g W-konveks kuat, f W-konveks dan g naik kuat)

$$\begin{aligned}(g \circ f)\big(W(x,y;t)\big) &= g\left(f\big(W_X(x,y;t)\big)\right)\\ &< g\big((1-t)f(x) + tf(x)\big)\\ &= g\big(W(f(x), f(y); t)\big)\\ &< (1-t)g\big(f(x)\big) + tg\big(f(x)\big).\end{aligned}$$

Kasus 3 (g W-konveks, f W-konveks kuat dan g naik kuat)

$$\begin{aligned}(g \circ f)\big(W(x,y;t)\big) &= g\left(f\big(W_X(x,y;t)\big)\right)\\ &< g\big((1-t)f(x) + tf(x)\big)\\ &= g\big(W(f(x), f(y); t)\big)\\ &< (1-t)g\big(f(x)\big) + tg\big(f(x)\big).\end{aligned}$$

Jadi, proposisi 3.1 terbukti.

Proposisi 3.2

Diketahui (X, W, d) suatu ruang metrik konveks. Jika fungsi $f : X \to \mathbb{R}$ W-konveks dan $C \subset X$, maka fungsi $g = f|_C : C \to \mathbb{R}$ adalah W-konveks.

(Abdelhakim, 2016:350)

Bukti :

Ambil sebarang $x, y \in C$.

Karena f W-konveks,

maka $f\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.

Karena fungsi $C \subset X$,

maka $g\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)g(x) + tg(y)$.

Jadi, terbukti bahwa fungsi g W-konveks.

Proposisi 3.3

Diketahui (X, W, d) suatu ruang metrik konveks. Jika f suatu fungsi W-konveks pada X dan $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, maka αf juga suatu fungsi W-konveks pada X.

(Abdelhakim, 2016:350)

Bukti :

Misalkan $x, y \in X$ dan $t = [0,1]$.

f fugsi W-konveks pada X,

maka $f\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.

Diketahui, $\alpha \geq 0$,

$$\begin{aligned}\alpha f\big(W(x,y;t)\big) &\leq \alpha\big((1-t)f(x) + tf(y)\big)\\ &\leq (1-t)\alpha f(x) + t\alpha f(y).\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa αf fungsi W-konveks.

Proposisi 3.4

Jumlah berhingga fungsi W-konveks pada X adalah W-konveks.

(Abdelhakim, 2016:350)

Bukti :

Misalkan $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ adalah fungsi-fungsi W-konveks.

Jika $f_1\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)f_1(x) + tf_1(y)$

$f_2\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)f_2(x) + tf_2(y)$

.

$f_n\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)f_n(x) + tf_n(y)$

maka

$$\begin{aligned}&f_1\big(W(x,y;t)\big) + f_2\big(W(x,y;t)\big) + \cdots\\ &\qquad + f_n\big(W(x,y;t)\big)\\ &\leq \big((1-t)f_1(x) + tf_1(y)\big)\\ &\qquad + \big((1-t)f_2(x) + tf_2(y)\big) + \cdots\\ &\qquad + \big((1-t)f_n(x) + tf_n(y)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n)\big(W(x,y;t)\big)\\ &\leq (1-t)\big(f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x)\big)\\ &\qquad + t\big(f_1(y) + f_2(y) + f_3(y) + \cdots\\ &\qquad + f_n(y)\big)\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa jumlah berhingga fungsi W-konveks adalah W-konveks.

Proposisi 3.5

Kombinasi kerucut fungsi W-konveks adalah W-konveks.

(Abdelhakim, 2016:350)

Bukti :

Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $t \in I$.

Jika diketahui $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n \in \mathbb{R}^n$ fungsi W-konveks dan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \geq 0$. Akan dibuktikan kombinasi kerucut dari fungsi W-konveks adalah W-konveks. Misalkan $x \in \mathbb{R}, f_i(x) = z_i$, maka

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \cdots + \alpha_n z_n$

Kombinasi kerucut fungsi W-konveks sebagai berikut,

$$\begin{aligned}&\alpha_1 z_1\big(W(x,y;t)\big) + \alpha_2 z_2\big(W(x,y;t)\big)\\ &\qquad + \alpha_3 z_3\big(W(x,y;t)\big) + \cdots\\ &\qquad + \alpha_n z_n\big(W(x,y;t)\big)\end{aligned}$$

$$\leq \alpha_1\big((1-t)z_1(x)+tz_1(y)\big) + \alpha_2\big((1-t)z_2(x)+tz_2(y)\big) + \alpha_3\big((1-t)z_3(x)+tz_3(y)\big) + \cdots + \alpha_n\big((1-t)z_n(x)+tz_n(y)\big)$$

$$\leq (1-t)\alpha_1 z_1(x) + t\alpha_1 z_1(y) + (1-t)\alpha_2 z_2(x) + t\alpha_2 z_2(y) + (1-t)\alpha_3 z_3(x) + t\alpha_3 z_3(y) + \cdots + (1-t)\alpha_n z_n(x) + t\alpha_n z_n(y)$$

$$\leq (1-t)\big(\alpha_1 z_1(x) + \alpha_2 z_2(x) + \alpha_3 z_3(x) + \cdots + \alpha_n z_n(x)\big) + t\big(\alpha_1 z_1(y) + \alpha_2 z_2(y) + \alpha_3 z_3(y) + \cdots + \alpha_n z_n(y)\big)$$

Jadi, terbukti bahwa kombinasi kerucut fungsi W-konveks adalah W-konveks.

Proposisi 3.6
Maksimum sejumlah berhingga fungsi W-konveks adalah W-konveks.

(Abdelhakim, 2016:350)

Bukti :
Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $t \in I$.
Misalkan $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ adalah fungsi W-konveks,
maka $f_1\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)f_1(x) + tf_1(y)$

$f_2\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)f_2(x) + tf_2(y)$

.

.

$f_n\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)f_n(x) + tf_n(y)$

Karena fungsi $g = maks\,\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$, maka $g \leq f_{i,\ i=1,2,3,\dots,n}$

$$g\big(W(x,y;t)\big) \leq f_i\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)f_i(x) + tf_i(y).$$

Jadi, terbukti bahwa maksimum dari sejumlah berhingga fungsi W-konveks adalah W-konveks.

Proposisi 3.7
Jika (f_n) suatu barisan fungsi W-konveks dan $f(x) = \lim(f_n(x))$, maka $f(x)$ W-konveks.

(Abdelhakim, 2016:350)

Bukti :
Misalkan f_n fungsi W-konveks, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan $\lim\,(f_n(x)) = f(x)$ fungsi W-konveks.
Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $t \in I = [0,1]$
Karena fungsi f_n W-konveks,
maka $f_n\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)f_n(x) + t\,f_n(y)$.
Berdasarkan sifat limit barisan, diperoleh

$$\lim\Big(f_n\big(W(x,y;t)\big)\Big) \leq \lim\Big((1-t)\big(f_n(x)\big) + t\,\big(f_n(y)\big)\Big) = (1-t)\lim\big(f_n(x)\big) + t\,\lim\big(f_n(y)\big)$$

Karena $\lim\,(f_n(x)) = f(x)$, $\lim\,(f_n(y)) = f(y)$ maka $\lim\Big(f_n\big(W(x,y;t)\big)\Big) = f\big(W(x,y;t)\big)$.
Sehingga, $f\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$
Jadi, terbukti bahwa $f(x)$ fungsi W-Konveks.

Proposisi 3.8
Misalkan (Y_n) adalah suatu barisan himpunan konveks, $Y_n \subset X$, f_n adalah fungsi W-Konveks pada Y_n, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Jika $S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(Y_n)$ dan $M = \{x \in X : \sup f_n(x) < \infty\}$, maka :

a. $M \cap S$ adalah konveks
b. $f(x) = sup\{f_n(x) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ merupakan fungsi W-Konveks.

(Abdelhakim, 2016:350)

Bukti :
Ambil $x, y \in S$, maka $x, y \in Y_n$ untuk semua $n \geq 1$, $\sup f_n(x) < \infty$ dan $\sup f_n(y) < \infty$.
Karena Y_n konveks, maka Y_n memuat $W(x,y;t)$, sehingga $W(x,y;t) \in S$.

a. Akan dibuktikan $M \cap S$ konveks.
Sebelumnya harus dibuktikan bahwa $W(x,y;t) \in M$.
Karena f_n fungsi konveks pada Y_n, maka $f_n(x)$ merupakan fungsi W-konveks pada Y_n dengan $x \in X$, sehingga,
$M = \{x \in X : sup_n f_n(x) < \infty\}$ merupa-kan himpunan W-konveks, sehingga jika diambil $x, y \in X$ dengan $sup_n f_n(x), sup_n f_n(y) < \infty$, maka $W(x,y;t) \in M$.
Jadi, $W(x,y;t) \in M \cap S$ dan terbukti bahwa $M \cap S$ konveks.

b. Akan dibuktikan $f(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ merupakan fungsi W-Konveks.
Karena fungsi f_n W-konveks, maka
$f_n\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)f_n(x) + tf_n(y)$
Berdasarkan sifat supremum,

$$\sup f_n\,\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)\sup f_n\,(x) + t\sup f_n\,(y)$$

$$f\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)f(x) + t\,f(y).$$

Jadi, terbukti bahwa f merupakan fungsi W-Konveks.

Proposisi 3.9

Jika $f: X \to \mathbb{R}$ suatu fungsi W-konveks kuat maka f mempunyai paling banyak satu peminimum global.

(Abdelhakim, 2016:350)

Bukti:

Diketahui fungsi f W-konveks kuat.

Akan dibuktikan bahwa f mempunyai paling banyak satu peminimum global. Andaikan f mempunyai 2 peminimum global $x, y \in X, x \neq y$, maka $f(x) = f(y) = \min_{x \in X} f(x)$.

Ambil $t = \frac{1}{2}$.

Karena X konveks, maka untuk setiap $x, y \in X$ dan $t \in I = [0,1]$, $W\left(x, y; \frac{1}{2}\right) \in X$.

Karena f W-konveks kuat, maka diperoleh

$$f(W(x,y;t)) < (1-t)f(x) + tf(y)$$

$$f\left(W\left(x,y;\frac{1}{2}\right)\right) < \left(1-\frac{1}{2}\right)f(x) + \frac{1}{2}f(y)$$

$$f\left(W\left(x,y;\frac{1}{2}\right)\right) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = \min f(x)$$

Karena $\min_{x \in X} f(x)$ merupakan nilai paling minimum, maka perolehan di atas salah, yang benar adalah $x = y$, sehingga $f(x) = f(y) = \min_{x \in X} f(x)$.

Jadi, terbukti bahwa f mempunyai paling banyak satu peminimum global.

Proposisi 3.10

Diketahui (X, W, d) suatu ruang metrik konveks. Jika untuk setiap $x, y \in X$ dan $x \neq y$, maka fungsi W-konveks $f : \mathcal{L}(x,y) \to \mathbb{R}$ dengan $\mathcal{L}(x,y) = \{W(x,y;\lambda):\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ adalah kontinu Lipschitz pada $\mathcal{L}(x,y)$. Selanjutnya, jika untuk suatu $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ berlaku $|f(x) - f(y)| \leq \alpha d(x,y)$, maka $|f(z) - f(w)| \leq \alpha d(z,w)$ untuk semua $z, w \in \mathcal{L}(x,y)$.

(Abdelhakim, 2016:350)

Bukti :

$$\begin{aligned} \text{Diketahui } \mathcal{L}(x,y) &= \{W(x,y;\lambda) : 0 \leq \lambda \leq 1\} \\ &= \{W(y,x;1-\lambda) : 0 \leq \lambda \leq 1\} \\ &= \mathcal{L}(y,x) \end{aligned}$$

Karena $\mathcal{L}(x,y) = \mathcal{L}(y,x)$,

maka berdasarkan Definisi 3.1 dan Lemma 3.1,

$$\begin{aligned} &d\big(W(x,y;\lambda), W(y,x;1-\lambda)\big) \\ &\leq (1-\lambda)d\big(y, W(x,y;\lambda)\big) + \lambda\, d\big(x, W(x,y;\lambda)\big) \\ &= (1-\lambda)\big((1-\lambda)d(x,y)\big) + \lambda\big(\lambda\, d(x,y)\big) \\ &= (1-\lambda)^2 d(x,y) + \lambda^2 d(x,y) \\ &= ((1-\lambda)^2 + \lambda^2)d(x,y) \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

$$d\big(W(x,y;\lambda), W(y,x;1-\lambda)\big) < 2\, d(x,y)$$

Karena $v \in \mathcal{L}(x,y)$,

maka dapat dinyatakan $v = W\left(x, y; \frac{d(x,v)}{d(x,y)}\right)$.

Berdasarkan Lemma 3.1,

$$\begin{aligned} d(x,v) &= d\left(x, W\left(x,y;\frac{d(x,v)}{d(x,y)}\right)\right) \\ &\leq \frac{d(x,v)}{d(x,y)}\ d(x,y) \\ &\leq d(x,y). \end{aligned}$$

Jika (z_n) suatu barisan dengan $z_n \in \mathcal{L}(x,y)$, maka $z_n = W\left(x, y; \frac{d(x,z_n)}{d(x,y)}\right)$ untuk $n \geq 1$.

Jika $z_n \to z$ dengan $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} \text{maka } z &= \lim_{n\to\infty} W\left(x,y;\frac{d(x,z_n)}{d(x,y)}\right) \\ &= W\left(x,y;\ \frac{d\left(x, \lim_{n\to\infty} z_n\right)}{d(x,y)}\right) \\ &= W\left(x,y;\frac{d(x,z)}{d(x,y)}\right) \end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa $z \in \mathcal{L}(x,y)$. Karena $d(x,z_n) \leq d(x,y)$, maka diperoleh $d(x,z) \leq id(x,y)$. Jadi, terbukti bahwa $z \in \mathcal{L}(x,y)$.

Selanjutnya, ambil sebarang $x, y \in X$ sedemikian hingga $d(x,y) > 0$. Misalkan $z, w \in \mathcal{L}(x,y)$ dengan $z \neq w$.

Berdasarkan kekonveksan fungsi f (Definisi 3.2), diperoleh

$$\begin{aligned} f(z) &= f\left(W\left(x,y;\frac{d(x,z)}{d(x,y)}\right)\right) \\ &\leq \left(1-\frac{d(x,z)}{d(x,y)}\right)f(x) + \frac{d(x,z)}{d(x,y)}f(y) \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dan } f(w) &= f\left(W\left(x,y;\frac{d(x,w)}{d(x,y)}\right)\right) \\ &\leq \left(1-\frac{d(x,w)}{d(x,y)}\right)f(x) \\ &\quad + \frac{d(x,w)}{d(x,y)}f(y) \quad (10) \end{aligned}$$

Berdasarkan (9) dan (10) diperoleh 2 kemungkinan,

$$\begin{aligned} f(z) - f(w) &\leq \frac{-d(x,z) + d(x,w)}{d(x,y)}f(x) \\ &\quad + \frac{d(x,z) - d(x,w)}{d(x,y)}f(y) \\ &= \frac{d(x,w) - d(x,z)}{d(x,y)}\big(f(x) - f(y)\big) \\ &\leq \frac{d(w,x) + d(x,z)}{d(x,y)}\big(f(x) - f(y)\big) \\ &\leq \frac{1}{d(x,y)}|f(x) - f(y)|d(z,w) (11) \end{aligned}$$

dan

$$f(w)-f(z) \le \frac{-\,d(x,w)+\ d(x,z)}{d(x,y)} f(x) + \frac{d(x,w)-d(x,z)}{d(x,y)} f(y)$$
$$= \frac{d(x,z)-\ d(x,w)}{d(x,y)}\big(f(x)-f(y)\big)$$
$$\le \frac{d(z,x)+\ d(x,w)}{d(x,y)}\big(f(x)-f(y)\big)$$
$$\le \frac{1}{d(x,y)}|f(x)-f(y)|\, d(z,w) \quad (12)$$

Dari (11) dan(12) diperoleh

$$|f(z)-\ f(w)| \le \frac{1}{d(x,y)}|f(x)-f(y)|\, d(z,w)$$
$$|f(z)-\ f(w)| \le \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}\ d(z,w)$$
$$|f(z)-\ f(w)| \le \frac{ad(x,y)}{d(x,y)}\ d(z,w)$$
$$|f(z)-\ f(w)| \le \alpha d(z,w)$$

Jadi, Proposisi 3. 10 terbukti.

Akibat 3.1

Diketahui (X, W, d) suatu ruang metrik konveks. Jika suatu fungsi W-konveks $f : \mathcal{L}(x,y) \to \mathbb{R}$ sedemikian hingga $f(x) = f(y)$ maka f konstan pada $\mathcal{L}(x,y)$.

(Abdelhakim, 2016:351)

Bukti :

Berdasarkan Proposisi 3.3,

$$|f(z)-\ f(w)| \le \frac{d(z,w)}{d(x,y)}|f(x)-f(y)|$$

Karena $f(x) = f(y)$, maka

$$|f(z)-\ f(w)|\ \le \frac{d(z,w)}{d(x,y)}|f(x)-f(y)|$$
$$\le \frac{d(z,w)}{d(x,y)}|f(x)-f(x)|$$
$$\le \frac{d(z,w)}{d(x,y)}(0)$$
$$\le 0$$
$$|f(z)-\ f(w)| = 0$$

Jadi, terbukti bahwa f konstan pada $\mathcal{L}(x,y)$.

Proposisi 3.11

Diketahui (X, W, d) suatu ruang metrik konveks dan suatu fungsi $f : X \to \mathbb{R}$ kontinu pada X. Jika untuk setiap $x, y \in X, \mu, v \in I$, berlaku $f\left(W\left(x,y;\frac{\mu+v}{2}\right)\right) \le \frac{1}{2} f\big(W(x,y;\mu)\big) + \frac{1}{2} f\big(W(x,y;v)\big)$, maka f merupakan fungsi W-konveks.

(Abdelhakim, 2016:352)

Bukti :

Ambil sebarang $x, y \in X$.

Diberikan n suatu bilangan bulat tak negatif dan $\wedge_n = \left\{\frac{m}{2^n}, m = 0,1,2,\dots,2^n\right\}$.

Berdasarkan Definisi 3.2,

untuk setiap $x, y \in X$ dan $\lambda \in \wedge_n$, berlaku

$$f\ \big(W\ (x,y;\lambda)\big) \le (1-\lambda)\ f(x) + \lambda\ f(y) \qquad (13)$$

Berdasarkan Lemma 3.1, misalkan $n = 0$, maka $x\ = W(x,y;0)$ dan $y =\ W(x,y;1)$.

Oleh karena itu, $f\big(W(x,y;\lambda)\big) \le (1-\lambda)\ f(x) + \lambda\ f(y)$ benar untuk $n = 0$, $\wedge_0 = \{0,1\}$.

Diasumsikan (13) benar untuk sebarang $\lambda \in \wedge_k, k \in \mathbb{N}$.

Diberikan $x, y \in X$ dan misalkan $\lambda \in \wedge_{k+1}$

Terdapat $\mu, w \in \wedge_{k+1}$ sedemikian sehingga $\lambda = \frac{\mu+w}{2}$.

Induksi di atas mengakibatkan

$$\big(W(x,y;v)\big) \le (1-v)f(x) + v\ f(y) \qquad (14)$$

dengan $v \in \{\mu, w\}$.

Berdasarkan asumsi pada (13), diperoleh

$$f(W\ (x,y;\lambda) \le \frac{1}{2}\ f\big(W(x,y;\mu)\big) + \frac{1}{2} f\big(W(x,y;v)\big) \qquad (15)$$

Akan dibuktikan bahwa $\big(W(x,y;\lambda)\big)\ \le (1-\lambda)f(x)\ + \lambda\ f(y)$ berlaku untuk setiap $\mu, w \in \wedge_{k+1}$ sedemikian hingga $\lambda = \frac{\mu+w}{2}$.

Dari (2) dan (3) diperoleh,

$$f(W\ (x,y;\lambda) \le \frac{1}{2}\Big(f\big(W(x,y;\mu)\big) + f\big(W(x,y;w)\big)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\big((2-(\mu+t))f(x) + (\mu+w)f(y)\big)$$
$$= \left(1-\frac{\mu+w}{2}\right)f(x) + \frac{\mu+w}{2} f(y)$$
$$= (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Jadi, terbukti bahwa $\big(W\ (x,y;\lambda)\big) \le (1-\lambda)f(x) + \lambda\ f(y)$ berlaku untuk setiap $\mu, w \in \wedge_{k+1}$ sedemikian hingga $\lambda = \frac{\mu+w}{2}$.

Lemma 3.2

Diberikan ruang metrik konveks (X, W, d) dan $x_0 \in X$. Jika $f : X \to \mathbb{R}$ adalah fungsi W-konveks sedemikian hingga $|f(x)| \le M$ pada $B(x_0, r)$, maka f merupakan $\frac{2M}{\rho} - Lipschitz$ pada $B(x_0, r-\rho)$, untuk sebarang p dengan $0 < \rho < r$.

(Abdelhakim, 2016:352)

Bukti :

Diketahui ruang metrik (X, W, d). Ambil sebarang $x, y \in X$, $x \ne y$ sehingga untuk setiap $\lambda \in (0,1)$

terdapat $\xi, \mu \in X$ sedemikian hingga

$x = W(y, \xi; \lambda)$ (16)

dan $y = W(x, \mu; \lambda)$ (17)

Andaikan $\xi, \mu \notin X$ (18)

maka ξ dan μ tidak memenuhi (16) dan (17).

Karena $W\ (x, y; t) = (1-t)\ x + t\ y$, maka

$x\ = (1-\lambda)y + \lambda\xi$ dan $y = (1-\lambda)x + \lambda\mu$

$x\ = y - \lambda y + \lambda\xi$ $\quad y = x - \lambda x + \lambda\mu$

$\lambda y - \lambda\xi = y - x$ $\quad \lambda x - \lambda\mu = x - y$

$\lambda(y-\xi) = y - x$ $\quad \lambda(x-\mu) = x - y$

$y - \xi = \lambda^{-1}(y-x)$ $\quad x - \mu = \lambda^{-1}(x-y)$

$\xi = \lambda^{-1}(x-y) + y \in X$ (19)

dan $\mu = \lambda^{-1}(y-x) + x \in X$ (20)

Karena $\xi\ = \lambda^{-1}\ (x-y) + y \in X$ dan $\mu = \lambda^{-1}(y-x) + x \in X$

Karena (18) dan (19), (20) adalah suatu kontradiksi maka pengandaian salah, sehingga yang benar adalah terdapat $\xi, \mu \in X$ sedemikian hingga

$x = W\left(y, \xi; \frac{d(x,y)}{\rho + d(x,y)}\right)$ dan

$y = W\left(x, \mu; \frac{\rho}{\rho + d(x,y)}\right)$, $x, y \in X$.

Karena f merupakan fungsi W-konveks, maka

$$f(x) \ \leq \left(1 - \frac{d(x,y)}{\rho +\ d(x,y)}\right) f(y) + \frac{d(x,y)}{\rho + d(x,y)} f(\xi)$$

$$= \frac{\rho + d(x,y) - d(x,y)}{\rho + d(x,y)} f(y) + \frac{d(x,y)}{\rho + d(x,y)} f(\xi)$$

$$= \frac{\rho}{\rho + d(x,y)} f(y) + \frac{d(x,y)}{\rho + d(x,y)} f(\xi) \qquad (21)$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$f(y) \leq \frac{d(x,y)}{\rho + d(x,y)} f(x) + \frac{\rho}{\rho + d(x,y)} f(\mu) \qquad (22)$$

Dari (21) dan (22) diperoleh

$$\big(f(x) - f(y)\big) \leq \frac{f(\xi) - f(x)}{\rho}\ d(x,y)$$

dan

$$\big(f(y) - f(x)\big) \leq \frac{f(\mu) - f(y)}{d(x,y)} \rho$$

Selanjutnya, akan dibuktikan $\xi \in B(x_0, r)$.

Berdasarkan Lemma 3.1, diperoleh

$$d(\xi, x) \ = d\left(\xi, W\left(y, \xi; \frac{d(x,y)}{\rho +\ d(x,y)}\right)\right)$$

$$= \left(1 - \frac{d(x,y)}{\rho + d(x,y)}\right)\ d(\xi, y)$$

$$= \frac{\rho}{\rho +\ d(x,y)} d(\xi, y)$$

$$\leq \frac{\rho}{\rho +\ d(x,y)} \big(d(\xi, y) + d(x,y)\big)$$

$$\leq \frac{\rho}{\rho +\ d(x,y)} d(\xi, x)$$

$$d(\xi, x) - \frac{\rho}{\rho +\ d(x,y)} d(\xi, x) \leq 0$$

$$\frac{d(x,y)}{\rho +\ d(x,y)} d(\xi, x) \leq 0$$

$$d(\xi, x) \leq 0$$

$$d(\xi, x) \leq \rho$$

Sehingga,

$d(\xi, x_0) \leq d(\xi, x) + d(x, x_0) < \rho + r - \rho = r.$

Jadi, terbukti $\xi \in B(x_0, r)$.

Karena $\xi \in B(x_0, r)$, maka $|f(x)| \leq M$.

Oleh karena itu,

$$|f(x) - f(y)| \ \leq \left|\frac{f(\xi) -\ f(x)}{\rho}\ d(x,y)\right|$$

$$\leq \ \frac{|f(\xi) -\ f(x)|}{\rho}\ d(x,y)$$

$$\leq \frac{|f(\xi)| + |f(x)|}{\rho} d(x,y)$$

$$= \frac{2M}{\rho}\ d(x,y)$$

Jadi, terbukti bahwa fungsi f merupakan $\frac{2M}{\rho}$ – *Lipschitz* pada $B(x_0, r-\rho)$, untuk sebarang p dengan $0 < \rho < r$.

Definisi 3.3

Suatu ruang metrik konveks (X, W, d) adalah kuat jika untuk setiap $x_0 \in X$ dan dua titik berbeda $x, y \in S(x_0, p)$ dengan $p \in \mathbb{R}, p > 0$ dan untuk setiap $t \in I^0 = (0,1)$ berlaku $W(x, y; t) \in B(x_0, p)$.

(Abdelhakim, 2016:354)

Contoh 3.3

Diketahui (X, W, d) ruang metrik konveks. Jika diberikan $X = [a, c], x, y \in X, x, y \in S(x_0, |c - x_0|)$, $x_0 \in X$ dan fungsi $W : X \times X \times I \rightarrow X$ dengan $W(x, y; t) = (1-t)x + t\ y, x, y \in X$ dan $t \in (0,1)$ maka (X, W, d) adalah ruang metrik konveks kuat.

Bukti :

Ambil $x = a, y = c \in X$ dan $x = a, y = c \in S(x_0, p)$, dan $t \in (0,1)$

$W(a, c; t) = (1-t)a + tc$

Karena untuk $t \in (0,1), W(a, c; t) \in X$ maka $B(x_0, |c - x_0|)$ pasti memuat $W(a, c; t)$.

Jadi, terbukti bahwa (X, W, d) ruang metrik konveks kuat.

Definisi 3.4

Diberikan (X, W, d) suatu ruang metrik konveks. $x_0 \in X$, $p > 0$ dan $\sigma \in (0, p)$. Fungsi real pada

$\overline{B(x_0,p)}$ dikatakan W-konveks pada *sphere* jika $\forall x,y \in S(x_0,\sigma), t \in I$,
$f\big(W(x,y;t)\big) \leq (1-t)f(x) + t\, f(x)$
dan dikatakan W-konveks kuat pada sfer jika untuk setiap $x,y \in S(x_0,\sigma),\ x \neq y,\ \forall t \in I^0$,
$f\big(W(x,y;t)\big) < (1-t)f(x) + t\, f(x)$.

(Abdelhakim, 2016:350)

Contoh 3.4

Diketahui (X,W,d) ruang metrik konveks. Diberikan $X = [a,c] \subset \overline{B(x_0,p)}$ dan $a,c \in S(x_0,p)$, $x_0 \in X, p \in \mathbb{R}, p > 0$ dan suatu fungsi $W : X \times X \times I \to X$ dengan $W(x,y;t) = (1-t)x + ty, x,y \in S(x_0,p), t \in I = [0,1]$.
Jika fungsi $f : X \to \overline{B(x_0,p)}$ dan $f(x) = x, x \in X$, maka f merupakan fungsi W-konveks.

Bukti :

Ambil $x = a, y = b \in S(x_0,p)$ dan $t \in I$
$W(x,y;t) = (1-t)a + tb \in \overline{B(x_0,p)}$
Karena $W(x,y;t) \in \overline{B(x_0,p)}$,
maka
$$\begin{aligned} W(x,y;t) &= W(a,b;t) \\ &= (1-t)a + tb \\ &\leq (1-t)f(a) + tf(b) \end{aligned}$$
Jadi, f merupakan fungsi W-konveks pada *sphere*.

Proposisi 3.12

Diberikan (X,W,d) suatu ruang metrik konveks dan fungsi $f : X \to [0,\infty)$ didefinisikan dengan $f(x) = d(x,x_0)$ untuk setiap $x_0 \in X$. Jika f merupakan fungsi W-konveks kuat pada $S(x_0,\sigma)$ dengan $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ maka ruang metrik (X,W,d) adalah W-konveks kuat.

Bukti :

Ambil sebarang $x,y \in S(x_0,\sigma)$ dan $t \in I^0 = (0,1)$.
Karena $f(x) = d(x,x_0)$ merupakan fungsi W-konveks kuat pada $S(x_0,\sigma)$, maka
$$\begin{aligned} f\big(W(x,y;t)\big) &< (1-t)f(x) + tf(y) \\ &= (1-t)d(x,x_0) + td(y,y_0) \end{aligned}$$
Karena $d(y,y_0) \leq d(y,x) + d(x,y_0)$, maka
$$\begin{aligned} &f\big(W(x,y;t)\big) \\ &\quad < (1-t)d(x,x_0) + t\,\big(d(x,y) + d(x,y_0)\big) \\ &\quad = (1-t)d(x,x_0) + t\, d(x,y_0) + t\, d(x,y) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &f\big(W(x,y;t)\big) - t\, d(x,y) \\ &\quad < (1-t)d(x,x_0) + t\, d(x,y_0) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &f\big(W(x,y;t)\big) - d\big(x,\ W(x,y;t)\big) \\ &\qquad < (1-t)d(x,x_0) + t\, d(x,y_0) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &d\big(W(x_0,y_0;t),\ W(x,y;t)\big) - d\big(x,\ W(x,y;t)\big) \\ &\qquad < (1-t)d(x,x_0) + t\, d(x,y_0) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &d\big(W(x_0,y_0;t),\ W(x,y;t)\big) - d\big(x,\ W(x,y;t)\big) \\ &\qquad < (1-t)\ d(x,x_0) + t\, d(x,y_0) \end{aligned}$$

Kasus 1 :
$$\begin{aligned} &d\big(W(x_0,y_0;t),\ W(x,y;t)\big) - d\big(x,\ W(x,y;t)\big) \\ &\qquad \geq d\big(x,\ W(x_0,y_0;t)\big) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &d\big(W(x_0,y_0;t),\ W(x,y;t)\big) \\ &\qquad \geq d\big(x,\ W(x_0,y_0;t)\big) + d\big(x,\ W(x,y;t)\big) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &d\big(W(x_0,y_0;t),\ W(x,y;t)\big) \\ &\qquad \geq d\big(W(x_0,y_0;t),\ x\big) + d\big(x,\ W(x,y;t)\big) \end{aligned}$$
Andaikan terdapat $x_0 = 2, y_0 = 3, x = 1, y = 5 \in X$ dan $t = \frac{1}{2}$, maka
$$\begin{aligned} &d\left(W\ \left(x_0,y_0;\frac{1}{2}\right), W\left(x,y;\frac{1}{2}\right)\right) \\ &\quad \geq d\left(W\ \left(x_0,y_0;\frac{1}{2}\right), x\right) + d\left(x, W\left(x,y;\frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} d(x_0+y_0, x+y) &\geq d(x_0+y_0, x) + d(x,\ x+y) \\ d(2+3,1+5) &\geq d(2+3,1) + \ d(1,1+5) \\ d(5,6) &\geq \ d(5,1) + \ d(1,6) \\ 1 &\geq 4+5 \qquad (*) \end{aligned}$$
Karena $(*)$ tidak sesuai dengan ketaksamaan segitiga, maka kasus 1 salah.

Kasus 2 :
$$\begin{aligned} &d\big(W(x_0,y_0;t),\ W(x,y;t)\big) - d\big(x,\ W(x,y;t)\big) \\ &\qquad \leq d\big(x,\ W(x_0,y_0;t)\big) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &d\big(W(x_0,y_0;t), W(x,y;t)\big) \\ &\qquad \leq d\big(x, W(x_0,y_0;t)\big) + d\big(x,\ W(x,y;t)\big) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &d\big(W(x_0,y_0;t), W(x,y;t)\big) \\ &\qquad \leq d\big(W(x_0,y_0;t), x\big) + d\big(x,\ W(x,y;t)\big) \end{aligned}$$
Sesuai dengan sifat ruang metrik (ketaksamaan segitiga), sehinngga
$$\begin{aligned} &d\big(W(x_0,y_0;t), W(x,y;t)\big) - d\big(x,\ W(x,y;t)\big) \\ &\qquad \leq d\big(x, W(x_0,y_0;t)\big) \\ &\qquad < (1-t)d(x,x_0) + t\ d(x,y_0) \end{aligned}$$
Jadi, terbukti bahwa ruang metrik (X,W,d) adalah W-konveks kuat.

4. PENUTUP

Simpulan

Beberapa sifat kekonveksan suatu fungsi yang telah dibahas dalam artikel ini adalah sebagai berikut.

a. Komposisi fungsi W-Konveks, fungsi W-Konveks kuat dan fungsi naik kuat adalah W-Konveks.
b. Restriksi suatu fungsi W-Konveks adalah W-Konveks.
c. Perkalian scalar dengan suatu fungsi W-Konveks adalah W-Konveks.
d. Jumlah berhingga fungsi W-Konveks adalah W-Konveks. Kombinasi kerucut dari fungsi W-Konveks adalah W-Konveks.

e. Kombinasi kerucut dari fungsi W-Konveks adalah W-Konveks.
f. Maksimum dari sejumlah berhingga fungsi W-Konveks adalah W-Konveks.
g. Limit suatu barisan fungsi W-Konveks adalah W-Konveks. Irisan dua himpunan konveks adalah konveks dan supremum dari barisan fungsi W-Konveks adalah W-Konveks.
h. Suatu fungsi W-Konveks kuat mempunyai paling banyak satu $x \in X$ yang membuat nilai f paling minimum.
i. Suatu fungsi W-Konveks adalah kontinu Lipschitz.
j. Suatu fungsi kontinu dikatakan W-konveks jika untuk setiap $x, y \in X, \mu, v \in I$, berlaku

$$f\left(W\left(x, y; \frac{\mu + v}{2}\right)\right) \leq \frac{1}{2} f\big(W(x, y; \mu)\big) + \frac{1}{2} f\big(W(x, y; v)\big)$$

k. Jika suatu fungsi merupakan fungsi W-konveks pada sfer, maka ruang metrik (X, W, d) adalah fungsi W-konveks kuat.

Saran

Artikel ini hanya dibahas mengenai sifat-sifat kekonveksan suatu fungsi dengan kodomain himpunan semua bilangan real pada ruang metrik konveks. Oleh karena itu, dapat dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai sifat-sifat lain pada kekonveksan fungsi dengan domain dan kodomain himpunan bilangan real atau domain dan kodomain selain himpunan bilangan real.

DAFTAR PUSTAKA

Abdelhakim, Ahmed A. 2016. “A Convexity of Functions on Convex Metric Spaces of Takahashi and Applications” Journal of The Egyptian Mathematical Society, 24 : 384-354.

Kreyszig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. United States of America: John Wiley & Sons.

Manuharawati. 2013. *Analisis Real I*. Sidoarjo: Zifatama.

Paffenholz, Andreas. 2010. *Polyhedral Geometry and Linear Optimization*: Summer Semester.

Sohrab, Houshang H. 2014. *Basic Real Analysis.* London: Brikhäuser.

Takahashi, Wataru. 1970. “A Convexity in Metric Spaces and Nonexpansive Mappings” Kodai Math. Sem. Rep, 22 : 142-149.