MATH*unesa*
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 3 No.6 Tahun 2017*
ISSN 2301-9115

SIFAT-SIFAT TURUNAN MUTLAK FUNGSI PADA RUANG METRIK

Wicitra Diah Kusuma
(S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)
E-mail: wicitrakusuma@mhs.unesa.ac.id

Dwi Nur Yunianti
(Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)
E-mail: nian_zalpha@yahoo.com

Abstrak

Konsep turunan telah diperkenalkan pada studi tentang fungsi bernilai real. Namun, pada turunan fungsi bernilai real terdapat fungsi-fungsi yang tidak mempunyai turunan. Sebagai contoh fungsi bernilai mutlak $f(s) = |s|$ untuk setiap $s \in \mathbb{R}$. Fungsi f tidak mempunyai turunan di $0 \in \mathbb{R}$. Sehingga diperlukan suatu konsep turunan yang baru sedemikian hingga f mempunyai turunan. Pada tahun 2012, Charatonik dan Insall memperkenalkan turunan mutlak fungsi pada sebarang ruang metrik (A, d_A) dengan A sebarang himpunan tak kosong dan d_A sebarang metrik pada A. Berdasarkan konsep tersebut, fungsi f mempunyai turunan mutlak di $0 \in \mathbb{R}$ dengan nilai turunan mutlaknya sama dengan satu.

Artikel ini terinspirasi dari Charatonik dan Insall (2012). Di dalam artikel ini dibahas sifat-sifat turunan mutlak fungsi pada ruang metrik, seperti kekontinuan fungsi yang mempunyai turunan mutlak, sifat turunan mutlak saat nilai turunan mutlaknya tak nol, sifat aturan rantai pada turunan mutlak suatu fungsi, sifat turunan mutlak pada $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}^n$. Sebagai tambahan juga dibahas sifat-sifat lain meliputi hubungan turunan mutlak dan turunan mutlak kuat, kekontinuan fungsi yang mempunyai turunan mutlak kuat, sifat operasi penjumlahan dan pengurangan turunan mutlak suatu fungsi.
Kata kunci: metrik, ruang metrik, turunan, turunan mutlak, dan turunan mutlak kuat.

Abstract

The concept of a derivative was introduced in the context of the study of real-valued functions of a real variable. But, some real valued functions didn't have derivatives. For example, absolute valued function $f(s) = |s|$ for each $s \in \mathbb{R}$. This function doesn't have derivatif at $0 \in \mathbb{R}$. Therefore, we need new derivative concept that make the absolute valued function has derivative. In 2012, Charatonik and Insall introduce the new concept of absolute derivative in any metric spaces (A, d_A) where A is any non-empty set and d_A is any metric on A. Based on the concept, absolute valued function has an absolute derivative at $0 \in \mathbb{R}$ with its absolute derivative value equal to one.

This article was inspired by article was written by Charatonik and Insall (2012). The result of this article discuss about the charactheristics of absolute derivative in metric spaces. These properties are continuity of the absolutly differentiable function, property when absolute derivative is non-zero, chain rule, and properties on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^n$. For more details, this article disscuss some properties that not exist before. These are relation bertween absolute derivative and strong absolute derivative, continuity of the strong absolutly differentiable function, addition and subtraction.
Keywords: metric, metric spaces, derivative, absolute derivative, and strong absolute derivative.

PENDAHULUAN

Konsep turunan telah diperkenalkan pada studi tentang fungsi bernilai real. Namun, pada turunan fungsi bernilai real terdapat fungsi-fungsi yang tidak mempunyai turunan. Sebagai contoh fungsi bernilai mutlak $f(s) = |s|$ untuk setiap $s \in \mathbb{R}$. Fungsi f tidak mempunyai turunan di $0 \in \mathbb{R}$ (Bartle and Sherbert, 2000: 159). Sehingga diperlukan suatu konsep turunan yang baru sedemikian hingga f mempunyai turunan.

Ruang metrik merupakan suatu generalisasi dari konsep jarak yang dikenal dalam praktek sehari-hari. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh Maurice Fréchet pada tahun 1906 (Kreyszig, 1978: 2). Seperti yang sudah diketahui, himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan suatu metrik d merupakan salah satu contoh ruang metrik dan ditulis $(\mathbb{R}, d)$. Oleh karena itu, pengertian turunan suatu fungsi bernilai real dapat dikembangkan menjadi turunan fungsi pada sebarang ruang metrik (A, d_A) dengan A sebarang himpunan tak kosong dan d_A sebarang metrik pada A.

Pada tahun 2012, Charatonik dan Insall telah memperkenalkan konsep turunan mutlak Berdasarkan konsep tersebut, fungsi berniali mutlak $f(s) = |s|$ untuk setiap $s \in \mathbb{R}$ mempunyai turunan mutlak di $0 \in \mathbb{R}$ dengan nilai turunan mutlaknya sama dengan satu (Charatonik dan Insall, 2012: 1319). Selain itu, konsep turunan mutlak ini lebih umum dibandingkan konsep turunan pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ maupun konsep turunan pada himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$. Berdasarkan artikel tersebut, artikel ini membahas sifat-sifat turunan mutlak fungsi pada ruang metrik.

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan dikaji mengenai beberapa definisi dan teorema pendukung yang diperlukan untuk membahas turunan mutlak fungsi pada sebarang ruang metrik (A, d_A).

Definisi 2.1 Diketahui $s \in \mathbb{R}$. Notasi $|s|$ disebut nilai mutlak s dan didefinisikan sebagai

$$|s| = \begin{cases} s & \text{untuk } a \geq 0 \\ -s & \text{untuk } a < 0 \end{cases}$$

(Bartle and Sherbert, 2000: 31)

Interpretasi dari nilai mutlak $|s|$ dari suatu elemen $s \in \mathbb{R}$ adalah jarak s ke titik origin 0. Secara umum, jarak s dan t untuk setiap $s, t \in \mathbb{R}$ adalah $|s - t|$.

Teorema 2.1 Untuk setiap $s, t \in \mathbb{R}$ berlaku $t \geq 0$ maka $|s| \leq t \Leftrightarrow -t \leq s \leq t$.

(Bartle and Sherbert, 2000: 31)

Definisi 2.2 Diberikan A sebarang himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$. Jika A memiliki batas atas, maka s disebut supremum dari A dinotasikan $\sup A = s$ jika memenuhi:

i) untuk $a \in A$ berlaku $x \leq s$ (u disebut batas atas A),
ii) jika t batas atas A, maka $s \leq t$.

(Bartle and Sherbert, 2000: 35)

Teorema 2.2 Batas atas s dikatakan sebagai supremum suatu himpunan tak kosong $A \subseteq \mathbb{R}$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ ada suatu $a' \in A$ sedemikian hingga $s - \varepsilon < a'$.

(Bartle and Sherbert, 2000: 36)

Berikut ini diberikan beberapa definisi terkait dengan raung metrik beserta sifat-sifatnya.

Definisi 2.3 Diketahui A sebarang himpunan tak kosong. Fungsi $d: A \times A \to \mathbb{R}$ disebut metrik pada A (atau fungsi jarak pada A) jika untuk setiap $a, b, c \in A$ berlaku

i) $d(a, b) \geq 0$,
ii) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$,
iii) $d(a, b) = d(b, a)$,
iv) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

Pasangan (A, d) disebut ruang metrik dan $d(a, b)$ disebut jarak a ke b.

(Kreyszig, 1978: 3)

Definisi 2.4 Diberikan ruang metrik (A, d) dan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Bola terbuka dengan pusat $a_0 \in X$ dan jari-jari ε didefinisikan sebagai

$$\mathcal{B}(a_0; \varepsilon) = \{a \in A : d(a, a_0) < \varepsilon\}.$$

(Kreyszig, 1978: 18)

Definisi 2.5 Diketahui ruang metrik (A, d) dan $M \subseteq A$. Titik $a_0 \in A$ disebut titik interior M, jika ada bilangan real $r > 0$ berlaku $\mathcal{B}(a_0; r) \subseteq M$. Himpunan semua titik interior M dinotasikan dengan $Int(M)$.

(Kreyszig, 1978: 18)

Definisi 2.6 Diberikan ruang metric (A, d_A) dan (B, d_B). Fungsi $f: A \to B$ kontinu di $a \in A$ jika untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$, bola terbuka dengan pusat $f(a) \in B$ yaitu $\mathcal{B}(f(a); \varepsilon) = \{b \in B : d_B(f(a), b) < \varepsilon\}$ maka ada bilangan real $\delta > 0$, bola terbuka dengan pusat $a \in X$ yaitu

$$\mathcal{B}(a; \delta) = \{a' \in A : d_A(a, a') < \delta\}$$

sehingga untuk setiap $a \in A \cap \mathcal{B}(a; \delta)$ berlaku $f(a') \in \mathcal{B}(f(a); \varepsilon)$. Selanjutnya juga dapat ditulis sebagai

$$f\big(A \cap \mathcal{B}(a; \delta)\big) \subseteq \mathcal{B}(f(a); \varepsilon).$$

(Shirali dan Vasudeva, 2006: 105)

Definisi 2.7 Diberikan ruang metric (A, d_A) dan (B, d_B). Fungsi $f: A \to B$ kontinu di $a \in A$ jika untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$, ada bilangan real $\delta > 0$, sehingga untuk $a \in A$ dan $d_A(a', a) < \delta$ maka

$$d_B\big(f(a'), f(a)\big) < \varepsilon.$$

(Pugh, 2003: 55)

Definisi 2.8 Diketahui ruang metrik (A, d_A) dan (B, d_B). Fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi injektif lokal di $a' \in A$ jika terdapat suatu bilangan real $r_0 > 0$ sehingga untuk setiap $s, t \in \mathcal{B}(a'; r_0)$ berlaku jika $s \neq t$ maka

$$f(s) \neq f(t).$$

(Villanacci, 2002: 69)

Berikut ini diberikan beberapa definisi dan teorema mengenai ruang bernorma dan sifat-sifatnya.

Definisi 2.9 Diberikan suatu himpunan tak kosong F dengan dua operasi biner $\circ$ dan $*$ disebut lapangan (*field*) ditulis $(F, \circ, *)$, jika untuk setiap $a, b, c \in F$ memenuhi sifat-sifat:

i) $a \circ b \in F$.
ii) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
iii) Terdapat $0 \in F$ sedemikian hingga
$$a \circ 0 = 0 \circ a = a.$$
iv) Terdapat $a^{-1} \in F$ sedemikian hingga
$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = 0.$$
v) $a \circ b = b \circ a$.
vi) $a * b \in F$.
vii) $a * (b * c) = (a * b) * c$.
viii) $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$.
ix) $(a \circ b) * c. = (a * c) \circ (b * c)$.
x) $a * b = b * a$
xi) Terdapat $1 \in F$ sedemikian hingga
$$a * 1 = 1 * a = a.$$
xii) Untuk setiap $a \in F$ dengan $a \neq 0$, maka
$$a^{-1} \in F.$$
(Heirstein, 1996: 256)

Definisi 2.10 Diberikan suatu himpunan tak kosong A dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian skalar disebut ruang linier atas lapangan $\mathbb{R}$ jika untuk setiap $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$ dan $u, v, w \in A$ memenuhi:
i) $u + v \in A$.
ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$.
iii) Terdapat $0 \in A$ sedemikian hingga
$$u + 0 = 0 + u = u.$$
iv) Terdapat $-u \in A$ sedemikian hingga
$$u + (-u) = (-u) + u = 0.$$
v) $u + v = v + u$.
vi) $\alpha u \in X$.
vii) Terdapat $1 \in A$ sedemikian hingga
$$u1 = 1u = u.$$
viii) $\alpha(u + v) = (\alpha u) + (\alpha v)$.
ix) $(\alpha + \beta)u = (\alpha u) + (\beta u)$.
x) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.
(Kreyszig, 1978: 50)

Definisi 2.11 Diketahui A ruang linier. Fungsi $\|.\|: A \to \mathbb{R}$ dengan sifat-sifat:
i) $\|u\| \geq 0$ untuk setiap $u \in A$,
ii) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
iii) $\|\boldsymbol{\alpha} u\| = |\boldsymbol{\alpha}|\|u\|$ untuk setiap $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ dan setiap $u \in A$,
iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ untuk setiap $u \in A$.
disebut *norm* pada A. Ruang linier A dengan *norm* $\|.\|$ dan ditulis dengan $(A, \|.\|)$ disebut ruang bernorma.
(Kesavan, 2009: 26)

Teorema 2.3 Diberikan ruang bernorma $(A, \|.\|)$. Jika untuk setiap $a, b \in A$ didefinisikan $d(a, b) = \|a - b\|$, maka d merupakan metrik pada $(A, \|.\|)$.

Teorema 2.4 (*Translation Invariance*)
Suatu metrik yang diinduksi dengan *norm* tertentu pada ruang bernorma A memenuhi
i) $d(u + w, v + w) = d(u, v)$
ii) $d(\alpha u, \alpha v) = |\alpha| d(u, v)$
untuk setiap $u, v, w \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.
(Kreyszig, 1978: 63)

Definisi 2.12 Diketahui A dan B ruang linier. Fungsi $f: A \to B$ dikatakan linier jika memenuhi:
i) $f(u + v) = f(u) + f(v)$ untuk setiap $u, v \in A$.
ii) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ untuk setiap $u \in A$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.
(Kreyszig, 1978: 83)

Selanjutnya diberikan definisi turunan pada $\mathbb{R}$ dan turunan berarah pada ruang bernorma, khususnya $\mathbb{R}^n$. Hal ini dikarenakan kekhasan dari $\mathbb{R}^n$ yang merupakan ruang linier, ruang bernorma, sekaligus ruang metrik.

Definisi 2.13 Diketahui $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, dan a titik interior I. Bilangan real L disebut turunan f di a, jika diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$, ada bilangan real $\delta > 0$, sehingga untuk $a' \in A$ memenuhi $0 < |a' - a| < \delta$ maka
$$\left|\frac{f(a') - f(a)}{a' - a} - L\right| < \varepsilon$$
Dalam kasus ini, f dikatakan mempunyai turunan di c, dan ditulis $f'(a) = L$. Secara ekivalen, turunan f di a dapat ditulis sebagai limit, yaitu
$$f'(a) = \lim_{a' \to a} \frac{f(a') - f(a)}{a' - a}$$
bilamana limit tersebut ada.
(Bartle and Sherbert, 2000:158)

Definisi 2.14 Diketahui $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, p titik interior X, dan u sebarang vektor di A. Fungsi linier $\mathcal{L}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dikatakan sebagai turunan berarah f di $p \in A$ dengan arah u jika untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$, ada bilangan real $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $t \in \mathbb{R}$, $0 < |t| < \delta$, maka
$$\left\|\frac{f(p + tu) - f(p)}{t} - \mathcal{L}(u)\right\| < \varepsilon. \qquad (2.14.1)$$
Secara ekivalen, persamaan (2.14.1) dapat ditulis sebagai limit, yaitu
$$\mathcal{L}(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tu) - f(p)}{t}$$
(Bartle, 1975: 348)

Pada saat $u = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ vektor di X maka $\mathcal{L}(e_1)$ menjadi
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)$$
atau yang lebih dikenal sebagai turunan parsial fungsi f terhadap variabel x_1. Jadi, secara umum turunan parsial fungsi f terhadap variabel x_j dapat didefinisikan sebagai

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + te_j) - f(p)}{t} \qquad (2.14.2)$$

Untuk $t = x - p \in \mathbb{R}$ dan f fungsi linier maka persamaan (2.14.2) dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x)e_j - f(p)e_j}{x - p} \qquad (2.14.3)$$

PEMBAHASAN

Bagian ini menjelaskan hasil penelitian berupa sifat-sifat yang berlaku pada turunan mutlak kuat suatu fungsi pada ruang metrik. Di bawah ini definisi turunan mutlak dan turunan mutlak kuat suatu fungsi pada ruang metrik.

Definisi 3.1 Diberikan ruang metrik (A, d_A) dan (B, d_B). Bilangan real K dikatakan turunan mutlak dari fungsi $f: A \to B$ di $p \in A$ jika diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$, ada bilangan real $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $a \in A$ memenuhi $d_A(a, p) < \delta$ berlaku

$$\left| \frac{d_B(f(a), f(p))}{d_A(a, p)} - K \right| < \varepsilon$$

Dalam kasus ini, f dikatakan mempunyai turunan mutlak di $p \in A$, dan ditulis $K = f^{|\prime|}(p)$.
Dengan kata lain, turunan mutlak f di $p \in A$ dapat ditulis sebagai limit, yaitu

$$\lim_{a \to p} \frac{d_B(f(a), f(p))}{d_A(a, p)}.$$

Nilai limit tersebut bilamana ada disebut turunan mutlak f di $p \in A$.

(Charatonik dan Insall, 2012: 1315)

Contoh 3.1
Diketahui ruang metrik $(\mathbb{R}^2, d)$ dan fungsi $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dengan $g(u, v) = (u, v)$ dengan $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ dan $u, v \in \mathbb{R}$. Dapat dibuktikan bahwa g mempunyai turunan mutlak di $p = (0,0) \in \mathbb{R}^2$dan $0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lim_{\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{p}} \frac{d(g(\boldsymbol{u}), g(\boldsymbol{p}))}{d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})} &= \lim_{(u,v) \to (0,0)} \frac{d((u,v),(0,0))}{d((u,v),(0,0))} \\ &= \lim_{(u,v) \to (0,0)} \frac{\sqrt{(u-0)^2 + (v-0)^2}}{\sqrt{(u-0)^2 + (v-0)^2}} \\ &= \lim_{(u,v) \to (0,0)} 1 = 1 \end{aligned}$$

Jadi, f mempunyai turunan mutlak di $\boldsymbol{p} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Definisi 3.2 Diberikan ruang metrik (A, d_A) dan (B, d_B). Bilangan real T dikatakan turunan mutlak kuat dari fungsi $f: A \to B$ di $p \in A$ jika diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$, ada bilangan real $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $a, b \in A$, $a \neq b$ memenuhi $d_A(a, b) < \delta$ maka

$$\left| \frac{d_B(f(a), f(b))}{d_A(a, b)} - T \right| < \varepsilon$$

Dalam kasus ini, f dikatakan mempunyai turunan mutlak kuat di $p \in A$, dan ditulis $T = F^{|\prime|}(p)$.
Dengan kata lain, turunan mutlak f di $p \in A$ dapat ditulis sebagai limit, yaitu

$$\lim_{\substack{(a,b) \to (p,p) \\ a \neq b}} \frac{d_B(f(a), f(b))}{d_A(a, b)}.$$

Nilai limit tersebut bilamana ada disebut turunan mutlak kuat f di $p \in A$.

(Charatonik dan Insall, 2012: 1316)

Berikut diberikan hubungan antara fungsi yang mempunyai turunan mutlak, fungsi yang mempunyai mutlak kuat, dan kekontinuan fungsi.

Teorema 3.1 Diketahui ruang metrik (A, d_A) dan (B, d_B). Jika fungsi $f: A \to B$ mempunyai turunan mutlak kuat di $p \in A$ maka f mempunyai turunan mutlak di $p \in A$.

Turunan mutlak kuat suatu fungsi merupakan perumuman dari turunan mutlak suatu fungsi. Oleh karena itu, setiap fungsi yang mempunyai turunan mutlak kuat maka fungsi tersebut merupakan fungsi yang mempunyai turunan mutlak (Charatonik dan Insall, 2012: 1316). Tetapi, kebalikannya belum tentu berlaku. Sebagai contoh fungsi bernilai mutlak $f(a) = |a|$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ mempunyai turunan mutlak di titik nol, tetapi f tidak mempunyai turunan mutlak kuat di titik tersebut.

Teorema 3.2 Diketahui ruang metrik (A, d_A) dan (B, d_B). Jika fungsi $f: A \to B$ mempunyai turunan mutlak di $p \in A$, maka f kontinu di $p \in A$.

(Charatonik dan Insall, 2012:1317)

Teorema 3.3 Diketahui ruang metrik (A, d_A) dan (B, d_B). Jika fungsi $f: A \to B$ mempunyai turunan mutlak kuat di $p \in A$, maka f kontinu di $p \in A$.

Bukti:
Karena fungsi f mempunyai turunan mutlak kuat di $p \in A$, maka berdasarkan Teorema 3.1 maka fungsi f mempunyai turunan mutlak di $p \in A$.
Selanjutnya, berdasarkan Teorema 3.2 maka fungsi f kontinu di $p \in A$.
Jadi, f kontinu di $p \in A$. ■

Selanjutnya berturut-turut pada Teorema 3.4 dan Teorema 3.5 akan dibahas mengenai sifat turunan mutlak kuat dan turunan mutlak suatu fungsi saat nilai turunan mutlak fungsinya tak nol.

Teorema 3.4 Diketahui ruang metrik (A, d_A) dan (B, d_B). Jika fungsi $f: A \to B$ mempunyai turunan mutlak kuat di $p \in A$ dan $f^{|\prime|}(p)$ tak nol, maka fungsi f injektif lokal di $p \in A$.

(Charatonik dan Insall, 2012: 1317)

Teorema 3.5 Diketahui ruang metrik (A, d_A) dan (B, d_B). Jika fungsi $f: A \to B$ mempunyai turunan mutlak di $p \in A$ dan $f^{|\prime|}(p)$ tak nol, maka terdapat bola terbuka $\mathcal{B}(p;\delta)$ sehingga untuk setiap $a \in \mathcal{B}(p;\delta) - \{p\}$ berlaku $f(a) \neq f(p)$

(Charatonik dan Insall, 2012: 1318)

Berikut akan dijelaskan sifat turunan mutlak pada suatu komposisi fungsi. Sebelumnya, akan diberikan Teorema 3.6 yang merupakan perluasan dari Teorema Caratheodory pada $\mathbb{R}$.

Teorema 3.6 Diketahui ruang metrik (A, d_A) dan (B, d_B). Fungsi $f: A \to A$ mempunyai turunan mutlak di $p \in A$ jika dan hanya jika terdapat suatu fungsi φ pada A kontinu di $p \in A$ dan $d_B\big(f(a), f(p)\big) = \varphi(a) d_A(a, p)$ untuk setiap $a \in A$. Lebih lanjut $\varphi(p) = f^{|\prime|}(p)$.

Teorema 3.7 Diketahui ruang metrik (A, d_A), (B, d_B). dan (C, d_c). Jika fungsi $f: A \to B$ mempunyai turunan mutlak di $p \in A$ dan fungsi $g: B \to C$ mempunyai turunan mutlak di $f(p) \in B$, maka komposisi fungsi $g \circ f: A \to C$ mempunyai turunan mutlak di $p \in A$ dan

$$(g \circ f)^{|\prime|}(p) = g^{|\prime|}(f(p)) \cdot f^{|\prime|}(p).$$

(Charatonik dan Insall, 2012: 1318)

Selanjutnya akan dibahas mengenai sifat operasi penjumlahan dan pengurangan perkalian skalar turunan mutlak suatu fungsi.

Teorema 3.8 Diketahui ruang metrik (A, d_A) dan (B, d_B). Jika fungsi $f: A \to B$ dan $g: A \to B$ masing-masing mempunyai turunan mutlak di $p \in A$, maka fungsi $(f + g)$ mempunyai turunan mutlak di $p \in A$ dan

$$(f \pm g)^{|\prime|}(p) = f^{|\prime|}(p) \pm g^{|\prime|}(p).$$

Di bawah ini sifat turunan mutlak dengan mengambil kasus khusus yaitu $X \subseteq \mathbb{R}$ dan d metrik biasa.

Teorema 3.9 Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan ruang metrik (A, d) dengan d metrik biasa. Jika fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ mempunyai turunan di $p \in A$, maka f mempunyai turunan mutlak di $p \in A$, dan berlaku $f^{|\prime|}(p) = |f'(p)|$

(Charatonik dan Insall, 2012: 1321)

Turunan mutlak kuat suatu fungsi merupakan perumuman dari turunan suatu fungsi. Oleh karena itu, setiap fungsi yang mempunyai turunan mutlak kuat maka fungsi tersebut mempunyai turunan mutlak (Charatonik dan Insall, 2012: 1320). Tetapi, kebalikannya belum tentu berlaku. Sebagai contoh fungsi bernilai mutlak $f(a) = |a|$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ mempunyai turunan mutlak di titik nol, tetapi f tidak mempunyai turunan di titik tersebut.

Berikut ini sifat turunan mutlak dengan mengambil kasus ruang metrik $(\mathbb{R}^n, d)$. Pada Teorema 3.10 dibahas mengenai sifat perkalian skalar turunan mutlak suatu fungsi. Sedangkan Teorema 3.11 membahas tentang turunan mutlak pada ruang metrik $(\mathbb{R}^n, d)$.

Teorema 3.10 Diketahui ruang metrik (A, d_A) dan (B, d_B). dengand_A dan d_B adalah metrik yang diinduksi oleh *norm*. Jika fungsi $f: A \to B$ dan $g: A \to B$ masing-masing mempunyai turunan mutlak di $p \in A$, maka untuk setiap $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$, fungsi $\boldsymbol{\alpha} f$ mempunyai turunan mutlak di $p \in X$ dan $(\boldsymbol{\alpha} f)^{|\prime|}(p) = |\boldsymbol{\alpha}|\left[f^{|\prime|}(p)\right]$

Teorema 3.11 Jika fungsi linier $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mempunyai turunan mutlak di $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$, dan $f = (u_1, \dots, u_m)$ dengan $u_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mempunyai turunan parsial pertama di $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$, maka untuk setiap $k \leq n$, berlaku

$$f^{|\prime|}(\boldsymbol{x_0}) = \left\| \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{x_0}) \boldsymbol{e_j} \right\|$$

dengan $1 \leq j \leq n$ maka $\boldsymbol{e_1} = (1,0, \dots, 0), \boldsymbol{e_2} = (0,1, \dots, 0)$, ..., $\boldsymbol{e_n} = (0,0, \dots, 1)$.

(Charatonik dan Insall, 2012: 1320)

Bukti:

Diketahui $S \subseteq \mathbb{R}^n$ dan ruang metrik (S, d) dengan d metrik pada S . Selanjutnya, didefinisikan $\boldsymbol{x_0} = ({x_1}^{(0)}, \dots, {x_n}^{(0)}) \in S$.

Karena $S \subseteq \mathbb{R}^n$ merupakan ruang bernorma maka berdasarkan Teorema 2.3 (hubungan ruang metrik dengan ruang bernorma) diperoleh turunan mutlak f di $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$ sebagai berikut

$$f^{|\prime|}(\boldsymbol{x_0}) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} \frac{d\big(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x_0})\big)}{d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_0})} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} \frac{\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_0})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\|}$$

Selanjutnya, karena $f = (u_1, \dots, u_m)$ dengan $u_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dan $\boldsymbol{e_1} = (1,0, \dots, 0)$ berlaku

$$f^{|\prime|}(\boldsymbol{x_0}) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} \frac{\left\|\sum_{j=1}^{m} u_j(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e_j} - \sum_{j=1}^{m} u_j(\boldsymbol{x_0}) \boldsymbol{e_j}\right\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\|}$$

Sehingga, untuk setiap $k \leq n$, berlaku

$$f^{|\prime|}(\boldsymbol{x_0}) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} \frac{\left\|\sum_{j=1}^{m} \left[u_j(\boldsymbol{x}) - u_j(\boldsymbol{x_0})\right] \boldsymbol{e_j}\right\|}{\left|x_k - {x_k}^{(0)}\right|}$$

$$= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} \left\| \frac{\sum_{j=1}^{m} [u_j(\boldsymbol{x}) - u_j(\boldsymbol{x_0})]}{|x_k - x_k{}^{(0)}|} \boldsymbol{e_j} \right\|$$

Berdasarkan persamaan (2.14.3) diperoleh

$$f^{|\prime|}(\boldsymbol{x_0}) = \left\| \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} (\boldsymbol{x_0}) \boldsymbol{e_j} \right\|. \blacksquare$$

PENUTUP

Simpulan

Dalam jurnal ini telah dibahas mengenai konsep turunan mutlak suatu fungsi pada ruang metrik beserta sifat-sifatnya. Berdasarkan pembahasan tersebut dapat diperoleh simpulan sebagai berikut:

1. Fungsi yang mempunyai turunan mutlak kuat adalah fungsi yang mempunyai turunan mutlak. Fungsi yang mempunyai turunan mutlak adalah fungsi kontinu.
2. Fungsi yang mempunyai turunan mutlak kuat dan turunan mutlaknya tak nol adalah fungsi injektif lokal.
3. Suatu komposisi fungsi $g \circ f$ mempunyai turunan mutlak di p dengan $(g \circ f)^{|\prime|}(p) = g^{|\prime|}(f(p)) \cdot f^{|\prime|}(p)$.
4. Pada turunan mutlak fungsi adalah $(f \pm g)^{|\prime|}(p) = f^{|\prime|}(p) \pm g^{|\prime|}(p)$.
5. Fungsi f yang mempunyai turunan adalah fungsi f yang mempunyai turunan mutlak dengan $|f'(p)| = f^{|\prime|}(p)$. Turunan mutlak fungsi f pada ruang metrik dan dilengkapi metrik yang diinduksi oleh *norm* adalah $(\alpha f)^{|\prime|}(p) = |\alpha|[f^{|\prime|}(p)]$. Sedangkan, turunan mutlak suatu fungsi linier f pada $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$ adalah

$$f^{|\prime|}(\boldsymbol{x_0}) = \left\| \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} (\boldsymbol{x_0}) \boldsymbol{e_j} \right\|.$$

Saran

Pada artikel ini, sifat-sifat yang belum dibahas dapat dikembangkan lebih lanjut pada ruang yang lain, seperti ruang Banach, ruang Bernorma, ruang Hilbert, dan lain-lain.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, Robert G. 1975. *The Element of Real Analysis.* United State of America: John Wiley & Sons.

Bartle, Robert G and Sherbert, Ronald R. 2000. *Introduction to Real Analysis*. New York: Hamilton Printing Company.

Charatonik, Wlodzimierz J. and Insall, Matt. 2012. “Absolute Differentiation in Metric Spaces”. *Houston Journal of Mathematics*. Vol. 38(4): hal 1313-1328.

Friedberg, Stephen H. et al. 1989. *Linear Algebra.* New Jersey: Prentice Hall.

Heirstein, I.N. 1996. *Abstract Algebra.* New Jersey: Prentice Hall.

Kesavan, S. 2009. *Functional Analysis.* New Delhi: Hindustan Book Agency.

Kreyszig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. United States of America: John Wiley & Sons.

Pugh, Charles Chapman. 2003. *Real Mathematical Analysis*. Berlin: Springer.

Shirali, Satish and Vasudeva, Harkrishan L. 2006. *Metric Spaces*. London: Springer.

Villanacci, Antonio et al. 2002. *Differential Topology and General Equilibrium with Complete and Incomplete Market*. Boston: Springer.