MATH*unesa*

Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 3 No.6 Tahun 2017*

ISSN 2301-9115

KETUNGGALAN TITIK TETAP PADA KONTRAKTIF-(ψ, ϕ, A, B) SIKLIK DI RUANG METRIK PARSIAL

Muhammad Syauqi Rozzaqillah

(S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)

Email : uqickgogle@gmail.com

Manuharawati

(Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)

Email : manuhara1@yahoo.co.id

Abstrak

Diketahui ruang metrik parsial (X, p) dan pemetaan $T: X \to X$ merupakan kontraktif-(ψ, ϕ, A, B) siklik. Ruang metrik pasial merupakan generalisasi dari ruang metrik. Pemetaan kontraktif-(ψ, ϕ, A, B) siklik merupakan pemetaan kontraktif-(ψ, ϕ, A, B) yang memenuhi kondisi siklik. Oleh karena itu dirasa perlu menganalisis ketunggalan titik tetap pada kontraktif-(ψ, ϕ, A, B) siklik di ruang metrik parsial. Titik $x \in X$ disebut titik tetap pada pemetaan T jika dan hanya jika $T: X \to X$ dengan $T(x) = x$. Hasil penelitian menjelaskan mengenai kekonvergenan di ruang metrik parsial, barisan Cauchy di ruang metrik parsial dan ruang metrik parsial lengkap yang dibutuhkan untuk membuktikan ketunggalan titik tetap pada kontraktif-(ψ, ϕ, A, B) siklik di ruang metrik parsial serta disajikan contoh yang terkait dengan titik tetap di ruang metrik parsial.

Kata Kunci: ruang metrik parsial, kontraktif-(ψ, ϕ, A, B) siklik, titik tetap

Abstract

Let (X, p) be partial metric spaces and $T: X \to X$ be a mapping is cyclic (ψ, ϕ, A, B)-contraction. The partial metric space is a generalization of the metric space. A mapping cyclic (ψ, ϕ, A, B)-contraction is a (ψ, ϕ, A, B)-contractive mapping that satisfies cyclic conditions so it is necessary to analyze the unique fixed point for cyclic (ψ, ϕ, A, B)-contraction in partial metric spaces. Point $x \in X$ is fixed point of T if $T(x) = x$. The research's result explain the properties of convergence in partial metric space, Cauchy sequence in partial metric space and complete partial metric space that is needed to prove a unique fixed point for cyclic (ψ, ϕ, A, B)-contraction in partial metric spaces also presented an example is related with fixed point in partial metric spaces.

Keywords: partial metric spaces, cyclic (ψ, ϕ, A, B)-contraction, fixed point

PENDAHULUAN

Pada tahun 1994, Matthews memperkenalkan konsep ruang metrik parsial. Ruang metrik parsial merupakan generalisasi dari ruang metrik. Misalkan $\boldsymbol{X}$ adalah sebarang himpunan tak kosong dan $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}^+$, $\boldsymbol{p}$ disebut metrik parsial pada $\boldsymbol{X}$ jika untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{X}$ berlaku (i) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$; (ii) $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$; (iii) $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ dan (iv) $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})$. Kemudian pasangan $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{p})$ disebut ruang metrik parsial.

Kirk-Srinavasan-Veeramani memperkenalkan konsep pemetaan kontraktif siklik yaitu pemetaan kontraktif yang memenuhi kondisi siklik pada tahun 2003. Kemudian pada tahun 2012, Shatanawi dan Manro memperkenalkan konsep pemetaan kontraktif-$(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ siklik di ruang metrik parsial serta menganalisis ketunggalan titik tetap pada kontraktif-$(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ siklik di ruang metrik parsial. Kontraktif-$(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ siklik merupakan konsep pemetaan kontraktif-$(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ yang memenuhi kondisi siklik

Pada makalah ini menjelaskan mengenai bukti teorema ketunggalan titik tetap pada kontraktif-(ψ, ϕ, A, B) siklik di ruang metrik parsial serta kekonvergenan di ruang metrik parsial, barisan Cauchy di ruang metrik parsial dan ruang metrik parsial lengkap sebelum mengalanilis ketunggalan titik tetap pada kontraktif-(ψ, ϕ, A, B) siklik di ruang metrik parsial.

LANDASAN TEORI

A. Ruang Metrik

Definisi 2.1 *Jika X sebarang himpunan tak kosong, maka fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut fungsi jarak atau metrik pada X jika untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku :*

i. $d(x,y) \geq 0$
ii. $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$
iii. $d(x,y) = d(y,x)$
iv. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$d(x,y)$ disebut jarak dari x ke y. Pasangan (X,d) disebut ruang metrik.

(Kreyszig, 1978:3)

Definisi 2.2 *Diketahui (X,d) adalah ruang metrik. Untuk suatu $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, persekitaran titik $x_0 \in X$ dengan jari-jari ε didefinisikan sebagai himpunan*

$$V_\varepsilon(x_0) = \{x \in X: d(x_0,x) < \varepsilon\}$$

(Bartle dan Sherbert, 2000:329)

Definisi 2.3 *Diketahui barisan (x_n) pada ruang metrik (X,d). Barisan (x_n) dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, terdapat $K \in N$ sedemikian hingga (x_n) pada $V_\varepsilon(x)$ untuk setiap $n \geq K$. Barisan (x_n) yang tidak konvergen dikatakan divergen.*

(Sherbet dan Bartle, 2000:329)

Definisi 2.4 *Diketahui (X,d) adalah ruang metrik. Barisan (x_n) pada X dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, terdapat $H \in N$ sedemikian hingga $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ untuk semua $n \geq H$ dan $m \geq H$.*

(Sherbert dan Bartle, 2000:330)

Definisi 2.5 *Ruang metrik (X,d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy pada X konvergen ke $x \in X$.*

(Sherbert dan Bartle, 2000:330)

B. Konsep Kontraktif Banach

Definisi 2.6 *Diketahui (X,d) adalah ruang metrik. Pemetaan $T: X \to X$ dikatakan pemetaan kontraktif jika terdapat $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1$, sedemikian hingga untuk setiap $x,y \in X$ berlaku*

$$d\big(T(x),T(y)\big) \leq \alpha\, d(x,y)$$

(Kreyszig, 1978:300)

Definisi 2.7 *Titik $x \in X$ disebut titik tetap pada pemetaan $T: X \to X$ jika dan hanya jika $T(x) = x$*

(Kreyszig, 1978:299)

Definisi 2.8 *Diketahui (X,d) adalah ruang metrik. Jika A dan B sebarang himpunan tak kosong subset X dan $T: A \cup B \to A \cup B$, maka T dikatakan pemetaan siklik jika $T(A) \subset B$ dan $T(B) \subset A$*

(Shatanawi dan Manro, 2012:2)

C. Fungsi Peubah Jarak

Definisi 2.9 *Fungsi $\phi: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ dikatakan fungsi peubah jarak jika memenuhi :*

1. *ϕ merupakan fungsi kontinu dan fungsi naik pada $[0,+\infty)$*
2. *$\phi(t) = 0$ jika dan hanya jika $t = 0$*

(Shatanawi dan Manro, 2012:3)

PEMBAHASAN

A. Ruang Metrik Parsial

Definisi 3.1 *Misalkan X adalah sebarang himpunan tak kosong dan $p: X \times X \to \mathbb{R}^+$, p disebut metrik parsial pada X jika untuk setiap $x,y,z \in X$ berlaku*

i. $x = y$ *jika dan hanya jika* $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$
ii. $p(x,x) \leq p(x,y)$
iii. $p(x,y) = p(y,x)$
iv. $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$

Kemudian pasangan (X,p) disebut ruang metrik parsial. Jika p adalah metrik parsial pada X maka fungsi $d_p: X \times X \to \mathbb{R}^+$ dengan $d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$ merupakan metrik pada X

(Matthews, 1994:186)

Definisi 3.2 *Diketahui (X,p) ruang metrik parsial. Untuk suatu bilangan $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, bola terbuka titik $x \in X$ dengan jari-jari ε merupakan himpunan*

$$B_p(x,\varepsilon) = \{y \in X: p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon\}$$

(Shatanawi dan Manro, 2012:2)

Definisi 3.3 *Barisan $X = (x_n)$ pada ruang metrik parsial (X,p) dikatakan konvergen ke $y \in X$ jika*

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n,y) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,x_n) = p(y,y)$$

(Matthews, 2009:711)

Definisi 3.4 *Diketahui ruang metrik parsial (X,p) dan A sebarang himpunan tak kosong subset X. Himpunan A dikatakan tertutup jika setiap barisan x_n pada A konvergen ke $x \in X$, maka $x \in A$.*

(Matthews, 2009:711)

Definisi 3.5 *Barisan $X = (x_n)$ pada ruang metrik parsial (X,p) dikatakan barisan Cauchy jika terdapat $a \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, sehingga untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, terdapat $k \in N$ sedemikian hingga untuk semua $n,m > k$ berlaku $|p(x_n,x_m) - a| < \varepsilon$.*

(Matthews, 2009:711)

Definisi 3.6 *Ruang metrik parsial (X,p) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy pada X konvergen ke $x \in X$ sehingga*

$$p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m).$$

(Shatanawi dan Manro, 2012:2)

Lemma 3.1 *Barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy pada ruang metrik parsial (X,p) jika dan* *hanya jika barisan* (x_n) *merupakan barisan Cauchy pada ruang metrik* (X, d_p).

Lemma 3.2 *Ruang metrik parsial* (X, p) *dikatakan lengkap jika dan hanya jika ruang metrik* (X, d_p) *merupakan ruang metrik lengkap.*

Dengan kata lain, $\lim_{n\to\infty} d_p(x_n, x) = 0 \leftrightarrow$

$$p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$$

B. Kontraktif-$(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ Siklik

Definisi 3.5 *Diketahui* (X, p) *adalah ruang metrik parsial.* A *dan* B *sebarang himpunan tak kosong subset tertutup* X. *Pemetaan* $T: X \to X$ *dikatakan kontraktif-*(ψ, ϕ, A, B) *siklik jika untuk setiap* $x \in A$ *dan* $y \in B$ *berlaku*

1. ψ *dan* ϕ *merupakan fungsi peubah jarak*
2. $T: A \cup B \to A \cup B$ *merupakan pemetaan siklik sehingga* $T(A) \subset B$ *dan* $T(B) \subset A$
3. $\psi\big(p(T(x), T(y))\big) \leq \psi\left(maks \begin{Bmatrix} p(x,y), p\big(x, T(x)\big), p\big(y, T(y)\big), \\ \frac{1}{2}\big(p(x, T(y)) + p(T(x), y)\big) \end{Bmatrix} \right) - \phi\big(maks\{p(x,y), p(y, T(y))\}\big)$

(Shatanawi dan Manro, 2012:2)

Teorema 3.1 *Diketahui* (X, p) *merupakan ruang metrik parsial lengkap. Misalkan* A *dan* B *sebarang himpunan tak kosong subset tertutup* X *dan* $T: X \to X$ *merupakan pemetaan kontraktif-*(ψ, ϕ, A, B) *siklik maka* T *memiliki titik tetap tunggal pada* $u \in A \cap B$.

Bukti:

Misalkan $x_0 \in A$. Karena $T(A) \subset B$, maka terdapat $x_1 \in B$ sehingga $T(x_0) = x_1$ dan karena $T(B) \subset A$ maka terdapat $x_2 \in A$ sehingga $T(x_1) = x_2$. Dengan melanjutkan proses ini, dapat dikonstruksi barisan $x_n \in X$ sedemikian hingga $x_{2n} \in A$, $x_{2n+1} \in B$, $x_{2n+1} = T(x_{2n})$ dan $x_{2n+2} = T(x_{2n+1})$. Jika $x_{2n_0+1} = x_{2n_0+2}$ untuk suatu $n_0 \in N$ maka $x_{2n_0+1} = T(x_{2n_0+1})$. Dengan demikian, maka $x_{2n_0+1} \in A \cap B$ merupakan titik tetap pada T.

Asumsikan $x_{2n+1} \neq x_{2n+2}$ untuk semua $n \in N$.

Diberikan sebarang $n \in N$. Jika n genap, maka $n = 2t$ untuk suatu $t \in N$.

Karena $T: X \to X$ merupakan pemetaan kontraktif-(ψ, ϕ, A, B) siklik maka berlaku

$$\psi(p(x_{n+1}, x_{n+2}))$$
$$= \psi(p(x_{2t+1}, x_{2t+2}))$$
$$= \psi(p(T(x_{2t}), T(x_{2t+1})))$$
$$\leq \psi\left(maks \begin{Bmatrix} p(x_{2t}, x_{2t+1}), p\big(x_{2t}, T(x_{2t})\big), \\ p\big(x_{2t+1}, T(x_{2t+1})\big), \\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p\big(x_{2t}, T(x_{2t+1})\big) \\ + p\big(T(x_{2t}), x_{2t+1}\big) \end{pmatrix} \end{Bmatrix} \right)$$
$$- \phi(maks\{p(x_{2t}, x_{2t+1}), p(x_{2t+1}, T(x_{2t+1}))\})$$
$$= \psi\left(maks \begin{Bmatrix} p(x_{2t}, x_{2t+1}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2}), \\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p(x_{2t}, x_{2t+2}) + \\ p(x_{2t+1}, x_{2t+1}) \end{pmatrix} \end{Bmatrix} \right)$$
$$- \phi(maks\{p(x_{2t}, x_{2t+1}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2})\})$$
$$\leq \psi\left(maks \begin{Bmatrix} p(x_{2t}, x_{2t+1}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2}), \\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p(x_{2t}, x_{2t+1}) + \\ p(x_{2t+1}, x_{2t+2}) - \\ p(x_{2t+1}, x_{2t+1}) + \\ p(x_{2t+1}, x_{2t+1}) \end{pmatrix} \end{Bmatrix} \right)$$
$$- \phi(maks\{p(x_{2t}, x_{2t+1}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2})\})$$
$$\leq \psi\left(maks \begin{Bmatrix} p(x_{2t}, x_{2t+1}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2}), \\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p(x_{2t}, x_{2t+1}) + \\ p(x_{2t+1}, x_{2t+2}) \end{pmatrix} \end{Bmatrix} \right)$$
$$- \phi(maks\{p(x_{2t}, x_{2t+1}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2})\})$$
$$\leq \psi(maks\{p(x_{2t}, x_{2t+1}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2})\})$$
$$- \phi(maks\{p(x_{2t}, x_{2t+1}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2})\})$$
$$\leq \psi(maks\{p(x_{2t}, x_{2t+1}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2})\})$$

Jika

$$maks\{p(x_{2t}, x_{2t+1}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2})\} = p(x_{2t+1}, x_{2t+2})$$

maka

$$\psi(p(x_{2t+1}, x_{2t+2}) \leq \psi\big(p(x_{2t+1}, x_{2t+2})\big) - \phi(p(x_{2t+1}, x_{2t+2}))$$

Karena $\phi(p(x_{2t+1}, x_{2t+2})) = 0$ maka

$p(x_{2t+1}, x_{2t+2}) = 0$. Berdasarkan Teorema 3.1, maka $x_{2t+1} = x_{2t+2}$. Hal ini kontrakdiksi dengan assumsi bahwa $x_{2t+1} \neq x_{2t+2}$ sehingga

$$maks\{p(x_{2t}, x_{2t+1}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2})\} = p(x_{2t}, x_{2t+1})$$

Oleh karena itu,

$$p(x_{n+1}, x_{n+2}) = p(x_{2t+1}, x_{2t+2}) \leq p(x_{2t}, x_{2t+1}) = p(x_n, x_{n+1}) \qquad (3.3.1)$$

dan

$$\psi(p(x_{n+1}, x_{n+2})) \leq \psi\big(p(x_n, x_{n+1})\big) - \phi(p(x_n, x_{n+1})) \qquad (3.3.2)$$

Jika n ganjil, maka $n = 2t + 1$ untuk suatu $t \in N$.

Karena $T: X \to X$ merupakan pemetaan kontraktif-(ψ, ϕ, A, B) siklik maka berlaku

$$\psi(p(x_{n+1}, x_{n+2}))$$
$$= \psi(p(x_{2t+2}, x_{2t+3}))$$

$= \psi(p(x_{2t+3}, x_{2t+2}))$

$= \psi(p(T(x_{2t+2}), T(x_{2t+1})))$

$$\leq \psi\left(maks \left\{ \begin{matrix} p(x_{2t+2}, x_{2t+1}), \\ p\big(x_{2t+2}, T(x_{2t+2})\big), \\ p\big(x_{2t+1}, T(x_{2t+1})\big), \\ \frac{1}{2}\left(\begin{matrix} p\big(x_{2t+2}, T(x_{2t+1})\big) + \\ p(T(x_{2t+2}), x_{2t+1}) \end{matrix} \right) \end{matrix} \right\} \right)$$

$- \phi(maks\{p(x_{2t+2}, x_{2t+1}), p(x_{2t+1}, T(x_{2t+1}))\})$

$$= \psi\left(maks \left\{ \begin{matrix} p(x_{2t+2}, x_{2t+3}), \\ p(x_{2t+1}, x_{2t+2}), \\ \frac{1}{2}\left(\begin{matrix} p(x_{2t+2}, x_{2t+2}) + \\ p(x_{2t+3}, x_{2t+1}) \end{matrix} \right) \end{matrix} \right\} \right)$$

$- \phi(maks\{p(x_{2t+2}, x_{2t+1}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2})\})$

$$\leq \psi\left(maks \left\{ \begin{matrix} p(x_{2t+2}, x_{2t+3}), \\ p(x_{2t+1}, x_{2t+2}), \\ \frac{1}{2}\left(\begin{matrix} p(x_{2t+3}, x_{2t+2}) + \\ p(x_{2t+2}, x_{2t+1}) - \\ p(x_{2t+2}, x_{2t+2}) + \\ p(x_{2t+2}, x_{2t+2}) \end{matrix} \right) \end{matrix} \right\} \right)$$

$-\phi\big(p(x_{2t+2}, x_{2t+1})\big)$

$$\leq \psi\left(maks \left\{ \begin{matrix} p(x_{2t+2}, x_{2t+3}), \\ p(x_{2t+1}, x_{2t+2}), \\ \frac{1}{2}\left(\begin{matrix} p(x_{2t+3}, x_{2t+2}) + \\ p(x_{2t+2}, x_{2t+1}) \end{matrix} \right) \end{matrix} \right\} \right)$$

$-\phi\big(p(x_{2t+2}, x_{2t+1})\big)$

$\leq \psi(maks\{p(x_{2t+2}, x_{2t+3}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2})\})$

$-\phi\big(p(x_{2t+2}, x_{2t+1})\big)$

$\leq \psi(maks\{p(x_{2t+2}, x_{2t+3}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2})\})$

Jika

$$maks\{p(x_{2t+2}, x_{2t+3}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2})\} = p(x_{2t+2}, x_{2t+3})$$

maka

$\psi(p(x_{2t+3}, x_{2t+2})$

$\leq \psi(p(x_{2t+3}, x_{2t+2}) - \phi\big(p(x_{2t+2}, x_{2t+1})\big)$

Karena $\phi(p(x_{2t+1}, x_{2t+2})) = 0$ maka

$p(x_{2t+1}, x_{2t+2}) = 0$. Berdasarkan Teorema 3.1, maka $x_{2t+1} = x_{2t+2}$. Hal ini kontrakdiksi dengan assumsi bahwa $x_{2t+1} \neq x_{2t+2}$ sehingga

$maks\{p(x_{2t+2}, x_{2t+3}), p(x_{2t+1}, x_{2t+2})\} = p(x_{2t+2}, x_{2t+1})$

Oleh karena itu,

$$p(x_{n+1}, x_{n+2}) = p(x_{2t+2}, x_{2t+3}) \leq p(x_{2t+2}, x_{2t+1}) = p(x_{n+1}, x_n) \qquad (3.3.3)$$

dan

$$\psi(p(x_{n+1}, x_{n+2})) \leq \psi\big(p(x_n, x_{n+1})\big) - \phi(p(x_n, x_{n+1})) \qquad (3.3.4)$$

Dari (3.3.1) dan (3.3.3), $\{p(x_n, x_{n+1}): n \in N\}$ merupakan barisan tidak naik. Oleh karena itu, terdapat $r \geq 0$ sedemikian hingga

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = r$$

Dari (3.3.2) dan (3.3.4) diperoleh

$$\psi(p(x_{n+1}, x_{n+2})) \leq \psi\big(p(x_n, x_{n+1})\big) - \phi(p(x_n, x_{n+1})), \forall n \in N \qquad (3.3.5)$$

Jika pada (3.3.5) $n \to \infty$ dan karena ψ dan ϕ merupakan fungsi kontinu maka diperoleh

$$\psi(r) \leq \psi(r) - \phi(r)$$

Karena $\phi(r) = 0$ maka $r = 0$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0 \qquad (3.3.6)$$

Dengan demikian

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0 \qquad (3.3.7)$$

Karena $d_p(x, y) \leq 2p(x, y)$ untuk semua $x, y \in X$ maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} d_p(x_n, x_{n+1}) = 0 \qquad (3.3.8)$$

Kemudian, untuk menunjukkan bahwa barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy di ruang metrik $(A \cup B, d_p)$, maka cukup dengan menunjukkan bahwa barisan (x_{2n}) merupakan barisan Cauchy di ruang metrik $(A \cup B, d_p)$.

Andaikan (x_{2n}) bukan barisan Cauchy, maka terdapat bilangan real $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga dua subbarisan dari (x_{2n}) misalkan $\big(x_{2m(i)}\big)$ dan $\big(x_{2n(i)}\big)$ dengan $n(i)$ indeks terkecil sehingga berlaku

$$d_p\big(x_{2m(i)}, x_{2n(i)}\big) \geq \varepsilon \text{ , } n(i) > m(i) > i \qquad (3.3.9)$$

Hal ini menunjukkan bahwa

$$d_p\big(x_{2m(i)}, x_{2n(i)-2}\big) < \varepsilon \qquad (3.3.10)$$

Berdasarkan (3.3.6), (3.3.7) dan ketaksamaan segitiga maka

$\varepsilon \leq d_p\big(x_{2m(i)}, x_{2n(i)}\big)$

$\leq d_p\big(x_{2m(i)}, x_{2n(i)-2}\big) + d_p\big(x_{2n(i)-2}, x_{2n(i)-1}\big) + d_p\big(x_{2n(i)-1}, x_{2n(i)}\big)$

$< \varepsilon + d_p\big(x_{2n(i)-2}, x_{2n(i)-1}\big) + d_p\big(x_{2n(i)-1}, x_{2n(i)}\big)$

Berdasarkan (3.3.8) dan untuk $i \to +\infty$ maka diperoleh

$$\lim_{i\to+\infty} d_p\big(x_{2m(i)}, x_{2n(i)}\big) = \varepsilon \qquad (3.3.11)$$

Selain itu, berdasarkan (3.3.9) dan ketaksamaan segitiga juga diperoleh

$$\varepsilon \le d_p\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)}\right)$$
$$\le d_p\left(x_{2n(i)}, x_{2n(i)-1}\right) + d_p\left(x_{2n(i)-1}, x_{2m(i)}\right)$$
$$\le d_p\left(x_{2n(i)}, x_{2n(i)-1}\right) + d_p\left(x_{2n(i)-1}, x_{2m(i)+1}\right) + d_p\left(x_{2m(i)+1}, x_{2m(i)}\right)$$
$$\le d_p\left(x_{2n(i)}, x_{2n(i)-1}\right) + d_p\left(x_{2n(i)-1}, x_{2m(i)}\right) + 2d_p\left(x_{2m(i)+1}, x_{2m(i)}\right)$$
$$\le 2d_p\left(x_{2n(i)}, x_{2n(i)-1}\right) + d_p\left(x_{2n(i)}, x_{2m(i)}\right) + 2d_p\left(x_{2m(i)+1}, x_{2m(i)}\right)$$

Berdasarkan (3.3.8), (3.3.11) dan untuk $i \to +\infty$ maka diperoleh

$$\lim_{i\to+\infty} d_p\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)}\right)$$
$$= \lim_{i\to+\infty} d_p\left(x_{2m(i)+1}, x_{2n(i)-1}\right)$$
$$= \lim_{i\to+\infty} d_p\left(x_{2m(i)+1}, x_{2n(i)}\right)$$
$$= \lim_{i\to+\infty} d_p\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)-1}\right)$$
$$= \varepsilon$$

Karena $d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$ untuk semua $x, y \in X$, maka

$$\lim_{i\to+\infty} p\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)}\right) = \lim_{i\to+\infty} p\left(x_{2m(i)+1}, x_{2n(i)-1}\right)$$
$$= \lim_{i\to+\infty} p\left(x_{2m(i)+1}, x_{2n(i)}\right)$$
$$= \lim_{i\to+\infty} p\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)-1}\right)$$
$$= \frac{\varepsilon}{2}$$

Selanjutnya, karena $T: X \to X$ merupakan pemetaan kontraktif-(ψ, ϕ, A, B) siklik maka berlaku

$$\psi\left(p\left(x_{2m(i)+1}, x_{2n(i)}\right)\right)$$
$$= \psi\left(p\left(T\left(x_{2m(i)}\right), T\left(x_{2n(i)-1}\right)\right)\right)$$
$$\le \psi\left(maks\left\{ \begin{array}{c} p\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)-1}\right), \\ p\left(x_{2m(i)}, T\left(x_{2m(i)}\right)\right), \\ p\left(x_{2n(i)-1}, T\left(x_{2n(i)-1}\right)\right), \\ \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} p\left(x_{2m(i)}, T\left(x_{2n(i)-1}\right)\right) + \\ p\left(x_{2n(i)-1}, T\left(x_{2m(i)}\right)\right) \end{array}\right) \end{array} \right\}\right)$$
$$- \phi\left(maks\left\{ \begin{array}{c} p\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)-1}\right), \\ p\left(x_{2n(i)-1}, T\left(x_{2n(i)-1}\right)\right) \end{array}\right\}\right)$$

$$\le \psi\left(maks\left\{ \begin{array}{c} p\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)-1}\right), \\ p\left(x_{2m(i)}, x_{2m(i)+1}\right), \\ p\left(x_{2n(i)-1}, x_{2n(i)}\right), \\ \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} p\left(x_{2m(i)}, T\left(x_{2n(i)-1}\right)\right) + \\ p\left(x_{2n(i)-1}, T\left(x_{2m(i)}\right)\right) \end{array}\right) \end{array} \right\}\right)$$
$$- \phi\left(maks\left\{ \begin{array}{c} p\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)-1}\right), \\ p\left(x_{2n(i)-1}, T\left(x_{2n(i)-1}\right)\right) \end{array}\right\}\right)$$

Untuk $i \to +\infty$ dan karena ψ dan ϕ kontinu maka diperoleh

$$\psi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \le \psi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Sehingga diperoleh $\phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$, maka $\varepsilon = 0$. Karena $\varepsilon = 0$ maka hal ini kontradiksi sehingga (x_{2n}) merupakan barisan Cauchy. Dengan kata lain, barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy di $(A \cup B, d_p)$. Karena (X, p) lengkap dan $A \cup B$ subset tertutup X maka $(A \cup B, p)$ lengkap.

Berdasarkan Lemma 3.2, barisan (x_n) konvergen di ruang metrik $(A \cup B, d_p)$, katakan $\lim_{n\to\infty} d_p(x_n, u) = 0$ dan

$$p(u,u) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, u) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) \qquad (3.3.12)$$

Selain itu, karena barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy di ruang metrik $(A \cup B, d_p)$ maka

$$\lim_{n,m\to\infty} d_p(x_n, x_m) = 0 \qquad (3.3.13)$$

Berdasarkan definisi d_p maka diperoleh

$$d_p(x_n, x_m) = 2p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m)$$

Berdasarkan (3.3.7), (3.3.13) dan untuk $n, m \to +\infty$ maka diperoleh

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$$

Dengan demikian, dari (3.3.12) diperoleh

$$p(u,u) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, u) = 0 \qquad (3.3.14)$$

Karena $p(x_n, u) \to 0 = p(u,u)$, barisan (x_{2n}) pada A, dan A tertutup pada (X, p) maka $u \in A$. Demikian juga, $u \in B$ sehingga $u \in A \cap B$.

Berdasarkan definisi ruang metrik parsial (X, p) maka

$$p\left(x_n, T(u)\right) \le p(x_n, u) + p\left(u, T(u)\right) - p(u,u)$$
$$\le p(x_n, u) + p(u, x_n) + p\left(x_n, T(u)\right) - p(x_n, x_n) - p(u,u)$$

Berdasarkan (3.3.8) dan (3.3.14), untuk $n \to +\infty$ maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, T(u)) = p(u, T(u))$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $T(u) = u$

Karena $x_{2n} \in A$ dan $u \in B$ maka diperleh

$$\psi\left(p(x_{2n+1}, T(u))\right)$$

$$= \psi\left(p(T(x_{2n}), T(u))\right)$$

$$\leq \psi\left(maks \left\{ \begin{matrix} p(x_{2n}, u), p(T(x_{2n}), x_{2n}), \\ p(T(u), u), \frac{1}{2}\left(\begin{matrix} p(x_{2n}, T(u)) + \\ p(u, T(x_{2n}) \end{matrix} \right) \end{matrix} \right\} \right)$$
$$- \phi(maks\{p(x_{2n}, u), p(T(u), u)\})$$

$$= \psi\left(maks \left\{ \begin{matrix} p(x_{2n}, u), p(x_{2n}, x_{2n+1}), \\ p(T(u), u), \frac{1}{2}\left(\begin{matrix} p(x_{2n}, T(u)) + \\ p(u, x_{2n+1} \end{matrix} \right) \end{matrix} \right\} \right)$$
$$- \phi(maks\{p(x_{2n}, u), p(T(u), u)\})$$

Untuk $n \to +\infty$ diperoleh

$$\psi\left(p(u, T(u))\right)$$

$$\leq \psi\left(p(u, T(u))\right) - \phi\left(p(u, T(u))\right)$$

Sehingga diperoleh $\phi\left(p(u, T(u))\right) = 0$. Karena ϕ merupakan fungsi peubah jarak maka $p(u, T(u)) = 0$ sehingga $T(u) = u$. Dengan demikian, u merupakan titik tetap dari T.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa u merupakan titik tetap tunggal dari T

Andaikan terdapat titik tetap dari T pada $A \cap B$ selain u, misalkan v, dengan mengulangi proses sebelumnya maka terbukti bahwa $p(v, v) = 0$

Karena $u \in A \cap B \subseteq A$ dan $v \in A \cap B \subseteq B$ maka

$$\psi(p(u, v)) = \psi(p(T(u), T(v))$$

$$\leq \psi(maks\{p(u, v), p(u, u), p(v, v)\})$$
$$- \phi(maks\{p(u, v), p(v, v)\})$$

$$= \psi(p(u, v)) - \phi(p(u, v))$$

Sehingga diperoleh $\phi(p(u, v)) = 0$. Karena $p(u, v) = 0$ maka $u = v$

Jadi terbukti bahwa T memiliki titik tetap tunggal pada $u \in A \cap B$

Dengan menerapkan fungsi identitas $\psi = I_{[0,+\infty]}$ yaitu fungsi $\psi: [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ dengan $\psi(x) = x$ pada Teorema 3.4 maka berlaku Teorema berikut.

Teorema 3.2 *Diketahui* (X, p) *merupakan ruang metrik parsial lengkap. Misalkan* A *dan* B *sebarang himpunan tak kosong subset tertutup* X *dan* $T: X \to X$ *merupakan pemetaan siklik. Misalkan terdapat fungsi peubah jarak* ϕ *sehingga*

$$p(T_x, T_y)$$
$$\leq max\left\{p(x, y), p(x, T_x), p(y, T_y), \frac{1}{2}\left(p(x, T_y)\right.\right.$$
$$\left.\left. + p(T_x, y)\right)\right\} - \phi(max\{p(x, y), p(y, T_y)\})$$

maka T *memiliki titik tetap tunggal pada* $u \in A \cap B$

Teorema 3.3 *Diketahui* (X, p) *merupakan ruang metrik parsial lengkap. Misalkan* A *dan* B *sebarang himpunan tak kosong subset tertutup* (X, p) *dengan* $A, B \subset X$ *dan* $T: X \to X$ *merupakan pemetaan siklik. Misalkan terdapat fungsi peubah jarak* ϕ *sehingga*

$$p(T_x, T_y)$$
$$\leq max\{p(x, y), p(x, T_x), p(y, T_y)\}$$
$$- \phi(max\{p(x, y), p(x, T_x), p(y, T_y)\})$$

maka T *memiliki titik tetap tunggal pada* $u \in A \cap B$

PENUTUP

A. Kesimpulan

1. Kekonvergenan di ruang metrik parsial, barisan Cauchy di ruang metrik parsial dan ruang metrik parsial lengkap mempunyai hubungan dengan kekonvergenan di ruang metrik, barisan Cauchy di ruang metrik dan ruang metrik lengkap.
2. Ketunggalan titik tetap pada kontraktif-(ψ, ϕ, A, B) siklik di ruang metrik parsial dibuktikan dengan mongkontruksi suatu barisan. Kemudian menunjukkan bahwa barisan tersebut merupakan barisan Cauchy, karena barisan tersebut pada ruang metrik parsial lengkap maka barisan tersebut konvergen. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa terdapat titik tetap pada pemetaan tersebut. Langkah terakhir yaitu dengan membuktikan ketunggalannya sehingga terbukti bahwa titik tetapnya tunggal.
3. Selanjutnya dengan menerapkan fungsi identitas $\psi = I_{[0,+\infty]}$ diperoleh beberapa Teorema ketunggalan titik tetap yang berlaku.

B. Saran

Pada jurnal ini hanya membahas mengenai ketunggalan titik tetap pada kontraktif-$(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ siklik di ruang metrik parsial. Oleh karena itu, dapat dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai sifat-sifat lain yang berlaku pada ruang metrik parsial dan perluasan pemetaan kontraktif siklik selain kontraktif-$(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ siklik, sehingga dapat menganalisis ketunggalan titik tetapnya.

DAFTAR PUSTAKA

Biswas, R. 1990. "Fuzzy Subgroups and Anti Fuzzy Subgroups". *Fuzzy Set and System*. Vol.35 : hal. 121-124.

Bartle, Robert G. dan Ronald R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis*. New York : Hamilton Printing Company.

Karapinar, E, Erhan, IM: *Best proximity point on different type contractions*. Appl. Math. Inf. Sci. 5, 342-353 (2011).

Khan, MS, Swaleh, M, Sessa, S: *Fixed point theorems by altering distances between the points*. Bull. Aust. Math. Soc. 30, 1-9 (1984).

Kirk, WA, Srinavasan, PS, Veeramani, P: *Fixed points for mapping satisfying cyclical contractive conditions*. Fixed Point Theory 4, 79-89 (2003).

Kreyszig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. United States of America : John Wiley & Sons.

Lebl, Jiri. 2014. *Basic Analysis*. USA : Jiri Lebl.

Manuharawati. 2013. *Analisis Real II*. Surabaya : Universitas Negeri Surabaya.

Matthews, SG: *Partial metric topology*. Proc. 8^{th} Summer Cnference on General Topology and Applications. Ann.N.Y. Acad. Sci. 728, 183-197 (1994).

Oltra, S, Valero, O: *Banach's fixed point theorem for partial metric spaces*. Rend. Lst. Mat. Univ. Trieste 36, 17-26 (2004).

Shatanawi and Manro. 2012: *Fixed point result for cyclic* $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$*-contraction in partial metric spaces*. Fixed Point Theory and Applications 2012:165.

Shatanawi, W, Samet, B: *On* $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi})$*-weakly contractive condition in partially ordered metric spaces*. Comput. Math. Appl. 6, 3204-3214 (2011).