

MODEL SIR PADA EPIDEMI PENYAKIT CAMPAK BERDASARKAN UMUR DENGAN PENGARUH IMUNISASI

Aisyah Noer Aziziah

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
 e-mail aisyahaziziah@mhs.unesa.ac.id

Abadi

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
 e-mail abadi@unesa.ac.id

Abstrak

Ada beberapa penyakit yang disebabkan oleh virus, salah satunya adalah penyakit campak. Virus dapat menyerang siapapun mulai dari anak-anak sampai orang dewasa. Program imunisasi sangat penting dilakukan untuk mencegah penularan virus. Pada skripsi ini akan dibahas tentang model SIR pada penyakit campak yang bergantung pada umur dengan adanya pengaruh imunisasi. Pada tahap simulasi, ditunjukkan grafik dari proporsi populasi *infective* yang dipengaruhi oleh imunisasi. Masing-masing grafik akan dibandingkan dengan perubahan parameter λ, γ , dan p . Program imunisasi yang mencapai 80% dapat menekan penularan penyakit dengan sangat baik. Semakin kecil tingkat serangan infeksi, maka semakin sedikit individu yang terserang infeksi. Semakin besar tingkat kesembuhan individu *infective*, maka semakin cepat pula penyakit hilang dari populasi.

Kata Kunci: Model SIR, Angka Reproduksi Dasar, Imunisasi.

Abstract

There are several diseases caused by viruses, one of them is measles disease. Viruses can attack anyone from children to adults. The immunization program is very important to prevent transmission of the virus. This thesis will discuss about the SIR model on measles disease that depend on age, with the ascendancy of immunization. At the simulation stage, will be shown graph of the proportion of infective population affected by immunization. Each other will be compared with the parameters λ, γ , and p . Immunization programs that reach 80% can suppress disease transmission very well. An increasingly small infection, resulting in a decrease in the number of individuals affected by the disease. Increased recovery rates accelerate the loss of disease from the population.

Keywords: SIR Model, Basic Reproduction Rate, Immunization.

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari, terdapat berbagai macam masalah yang dijumpai. Penggunaan matematika dalam kehidupan sehari-hari tampak pada pengembangan aplikasi matematika yang digunakan dalam aspek apapun. Berbagai masalah tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk model matematika. Salah satunya dalam memodelkan SIR pada epidemi penyakit campak berdasarkan umur dengan pengaruh imunisasi. Pada jurnal ini akan dibahas rekonstruksi model SIR pada epidemi penyakit campak berdasarkan umur dengan pengaruh imunisasi, kestabilan dan simulasinya

KAJIAN TEORI

1. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial dengan n buah

fungsi yang tidak diketahui (x_1, x_2, x_3) , dimana n merupakan bilangan bulat positif, $n \geq 2$ (Finizio dan

Ladas, 1988). Bentuk umum sistem persamaan diferensial orde pertama sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, x_3) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ adalah variabel terikat dan $t \in \mathbb{R}$ adalah variabel bebas, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$ merupakan turunan fungsi x_1, x_2, \dots, x_n terhadap t dan f_1, f_2, \dots, f_n

merupakan fungsi yang bergantung pada variabel x_1, x_2, \dots, x_n dan t .

Suatu sistem dikatakan nonlinier jika memenuhi beberapa kriteria berikut (Ross, 2004):

1. Memuat variabel tak bebas dari turunan-turunannya berpangkat lebih dari satu.
2. Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan/atau turunan-turunannya.
3. Terdapat fungsi transedental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

2. Model SIR

Berdasarkan diagram tersebut, dapat dinyatakan bentuk diferensialnya:

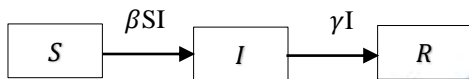


Diagram alur penyebaran penyakit dengan model SIR

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \end{aligned}$$

dimana:

- $\frac{dS}{dt}$ = laju perubahan jumlah individu rentan pada waktu t
- $\frac{dI}{dt}$ = laju perubahan jumlah individu terinfeksi pada waktu t
- $\frac{dR}{dt}$ = laju perubahan jumlah individu yang telah pulih/sembuh pada waktu t

- S = populasi individu rentan terhadap penyakit
- I = populasi individu terinfeksi penyakit
- R = populasi individu yang telah pulih
- β = tingkat serangan infeksi
- γ = tingkat penyembuhan infeksi

3. Model Epidemik Berdasarkan Umur

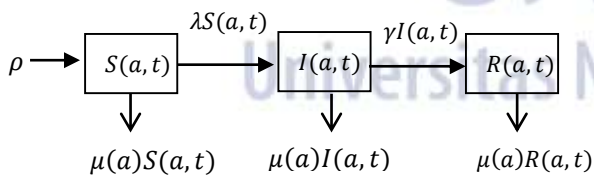


Diagram alur model epidemik SIR berdasarkan umur

dimana:

- ρ = laju kelahiran
- a = variabel umur sebelum terinfeksi
- t = variabel waktu
- λ = tingkat serangan infeksi

4. Titik Kesetimbangan

Misalkan suatu sistem persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x) \quad , x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Titik x^* merupakan titik kesetimbangan dari persamaan (1), jika

$$f(x^*) = 0$$

Titik kesetimbangan disebut juga titik tetap atau titik kritis.

5. Kestabilan

Misal diberikan sistem sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Melalui matriks Jacobi, yaitu matriks A , dapat dilakukan analisis kestabilan. Kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan melihat nilai eigen $\omega_i, i = 1, 2, \dots, n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik $\det(A - \omega I) = 0$. Berikut ini adalah sifat kestabilan berdasarkan nilai eigen menurut Boyce dan Diprima (2001):

Nilai Eigen	Kestabilan
Riil, berbeda, bertanda sama	<ul style="list-style-type: none"> • Stabil asimtotik untuk setiap nilai eigen bernilai negatif • Tidak stabil untuk setiap nilai eigen bernilai positif
Riil, Berbeda, Berlawanan tanda	Tidak stabil
Riil, Sama	<ul style="list-style-type: none"> • Stabil asimtotik untuk setiap nilai eigen bernilai negatif • Tidak stabil untuk setiap nilai eigen bernilai positif
Kompleks sekawan bukan imajiner murni	<ul style="list-style-type: none"> • Stabil asimtotik untuk bagian real negatif • Tidak stabil untuk bagian real positif
Imajiner murni	Stabil

Tabel Sifat Kestabilan

6. Angka Reproduksi Dasar (R_0)

R_0 dicari dengan mengasumsikan $I = I^*$ dengan $I^* > 0$, diperoleh:

1. Jika $R_0 < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakitnya (E_0) stabil asimtotik.
2. Jika $R_0 > 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakitnya (E_0) tidak stabil dan titik kesetimbangan endemiknya (E_1) stabil asimtotik.

PEMBAHASAN

1. Rekonstruksi Model

Model SIR berdasarkan umur memiliki beberapa asumsi sebagai berikut:

1. Semua bayi yang lahir merupakan *susceptible*.
2. Jumlah kelahiran ρ dan kematian μ sama, sehingga mengakibatkan jumlah populasi selalu konstan
3. Tidak ada migrasi, dalam arti populasi penduduk bersifat tertutup. Pertambahan dan pengurangan jumlah penduduk hanya melalui kelahiran dan kematian.
4. Kematian terjadi secara alami, bukan karena penyakit.
5. Penyakit dapat disembuhkan.

- Individu yang telah pulih (recovered) tidak dapat menularkan penyakit.
- Variabel waktu diabaikan.

Adapun variabel serta parameter sebagai berikut:

- S menyatakan populasi *susceptible* (individu yang kekebalan tubuhnya lemah sehingga rentan terhadap penyakit), dengan $S > 0$.
- I menyatakan populasi *Infective* (individu yang sedang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit kepada *susceptible*), dengan $I > 0$.
- R menyatakan populasi *recovered* (individu yang kekebalan tubuhnya kembali (pulih) sehingga tidak dapat menularkan penyakit), dengan $R \geq 0$.
Dengan proporsi $S + I + R = 1$
- μ menyatakan laju kematian, dengan $\mu > 0$.
- ρ menyatakan laju kelahiran, dengan $\rho > 0$.
- λ menyatakan laju serangan infeksi, dengan $\lambda > 0$.
- γ menyatakan laju kesembuhan individu terinfeksi, dengan $\gamma > 0$.
- p menyatakan proporsi populasi yang telah diimunisasi, dengan $0 < p < 1$.

Dalam hal ini, imunisasi hanya dilakukan oleh individu yang baru lahir atau anak-anak. Diasumsikan vaksinasi telah sukses sebesar 80%. Hal tersebut mengakibatkan individu yang telah melakukan imunisasi akan kebal terhadap penyakit dan masuk dalam populasi *recovered*.

Diasumsikan p adalah proporsi individu yang sukses melakukan imunisasi. Individu yang telah melakukan imunisasi sebanding dengan laju kelahiran μ , sehingga jumlah individu yang kebal terhadap penyakit adalah $p\mu$. Jumlah individu yang belum mendapat vaksin atau belum melakukan imunisasi adalah $\mu - \mu p = (1 - p)\mu$ dan masuk dalam populasi *susceptible* serta berpotensi terinfeksi penyakit dari populasi *infective*.

alur perubahan individu *susceptible* menjadi *infective* dan menjadi *recovered* ditunjukkan pada gambar berikut:

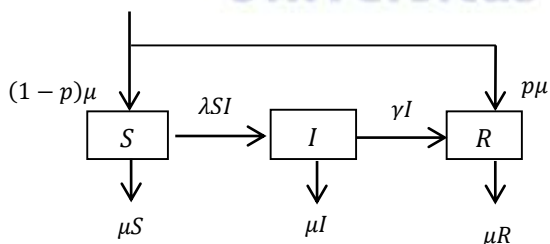


Diagram alur model epidemi SIR berdasarkan umur dengan pengaruh imunisasi

Laju perubahan individu pada populasi *susceptible*:

$$\frac{dS}{da} = (1 - p)\mu - (\lambda I + \mu)S \quad (2)$$

Laju perubahan individu pada populasi *infective*:

$$\frac{dI}{da} = \lambda IS - [\gamma + \mu]I \quad (3)$$

Laju perubahan individu pada populasi *recovered*:

$$\frac{dR}{da} = p\mu + \gamma I - \mu R \quad (4)$$

Sehingga diperoleh sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{da} &= (1 - p)\mu - (\lambda I + \mu)S \\ \frac{dI}{da} &= \lambda IS - [\gamma + \mu]I \\ \frac{dR}{da} &= p\mu + \gamma I - \mu R \end{aligned} \quad (5)$$

Sistem (5) merupakan sistem persamaan nonlinear yang mempresentasikan model SIR pada epidemi penyakit campak berdasarkan umur dengan pengaruh imunisasi.

2. Titik Kesetimbangan

Untuk menentukan titik kesetimbangan dari persamaan (5) dapat dilakukan dengan memisalkan $\frac{dS}{da} = 0$ dan $\frac{dI}{da} = 0$.

$$\begin{aligned} (1 - p)\mu - (\lambda I + \mu)S &= 0 \\ \lambda IS - [\gamma + \mu]I &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Ada dua titik kesetimbangan, yaitu:

- Titik kesetimbangan bebas penyakit
- Titik kesetimbangan tidak bebas penyakit (endemik).

Bukti:

- Untuk menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit, dimisalkan $I = 0$ yang disubstitusikan pada $\frac{dS}{da}$.

$$\begin{aligned} (1 - p)\mu - (\lambda I + \mu)S &= 0 \\ S &= 1 - p \end{aligned}$$

sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = (1 - p, 0)$$

- Untuk menentukan titik kesetimbangan tidak bebas penyakit (endemik), dimisalkan $I \neq 0$.

$$\lambda IS - [\gamma + \mu]I = 0$$

$$I = \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{(1 + p)\lambda}{(\gamma + \mu)} - 1 \right)$$

sehingga diperoleh titik kesetimbangan tidak bebas penyakit (endemik)

$$E_1 = \left(\frac{\gamma + \mu}{\lambda}, \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{(1 + p)\lambda}{(\gamma + \mu)} - 1 \right) \right)$$

3. Angka Reproduksi Dasar

Untuk menentukan angka reproduksi dasar, dicari I^* dengan mengasumsikan $I^* > 0$

$$\lambda IS - [\gamma + \mu]I = 0$$

$$\lambda IS = [\gamma + \mu]I$$

$$\frac{\lambda(1 - p)\mu - \mu(\gamma + \mu)}{\lambda(\gamma + \mu)} = I = I^*$$

karena

$$R_0 = I^* > 0$$

sehingga

$$\frac{\lambda(1-p)\mu - \mu(\gamma + \mu)}{\lambda(\gamma + \mu)} > 0$$

$$\lambda(1-p)\mu > \mu(\gamma + \mu)$$

$$\frac{\lambda(1-p)}{(\gamma + \mu)} > 1$$

Jadi, $R_0 = \frac{\lambda(1-p)}{(\gamma + \mu)}$

4. Analisis kestabilan

1. Untuk kestabilan pada titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0)

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\lambda(1-p) \\ 0 & \lambda(1-p) - (\gamma + \mu) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$$

$$(-\mu - \omega)(\lambda(1-p) - (\gamma + \mu) - \omega) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen:

$$\omega_1 = -\mu$$

$$\omega_2 = \lambda(1-p) - (\gamma + \mu)$$

E_0 akan bersifat stabil asimtotik jika $\omega_{1,2} < 0$. Nilai $\mu > 0$, sehingga $\omega_1 = -\mu < 0$. Agar E_0 stabil asimtotik, haruslah $\omega_2 < 0$, akibatnya $\lambda(1-p) < (\gamma + \mu)$, sehingga

$$\frac{\lambda(1-p)}{(\gamma + \mu)} < 1$$

$\frac{\lambda(1-p)}{(\gamma + \mu)}$ merupakan bilangan reproduksi (R_0) setelah imunisasi. Oleh karena itu, titik kesetimbangan E_0 bersifat stabil asimtotik untuk $R_0 < 1$.

2. Untuk kestabilan pada titik kesetimbangan endemik (E_1)

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -(\lambda I + \mu) & -\lambda S \\ \lambda I & \lambda S - (\gamma + \mu) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen:

$$\omega_{1,2} = \frac{-\mu R_0 \pm \sqrt{\mu^2 R_0^2 - 4(R_0 - 1)(\gamma + \mu)\mu}}{2}$$

Misal $g_1 = \mu R_0$ dan $g_2 = (R_0 - 1)(\gamma + \mu)\mu$, sehingga

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(-g_1 + \sqrt{g_1^2 - 4g_2} \right)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left(-g_1 - \sqrt{g_1^2 - 4g_2} \right)$$

Diberikan nilai parameter sebagai berikut:

$$\lambda = 0.4, \mu = 0.02, \gamma = 0.04, p = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$$

Substitusikan nilai parameter ke nilai eigen $\omega_{1,2}$, diperoleh:

Saat $p = 0.2$, nilai eigen:

$$\omega_1 = -0.0533 + 0.0485i$$

$$\omega_2 = -0.0533 - 0.0485i$$

Saat $p = 0.4$, nilai eigen:

$$\omega_1 = -0.04 + 0.0447i$$

$$\omega_2 = -0.04 - 0.0447i$$

Saat $p = 0.6$, nilai eigen:

$$\omega_1 = -0.0266 + 0.0359i$$

$$\omega_2 = -0.0266 - 0.0359i$$

Saat $p = 0.8$, nilai eigen:

$$\omega_1 = -0.0133 + 0.0149i$$

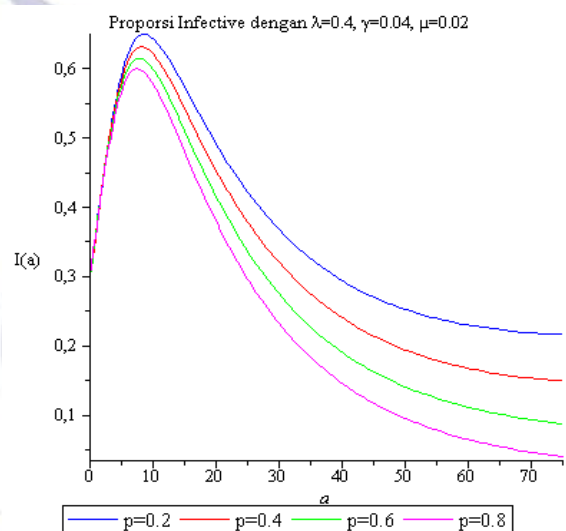
$$\omega_2 = -0.0133 - 0.0149i$$

Karena semua bagian realnya negative, sehingga titik kesetimbangan endemik (E_1) bersifat stabil asimtotik.

5. Simulasi

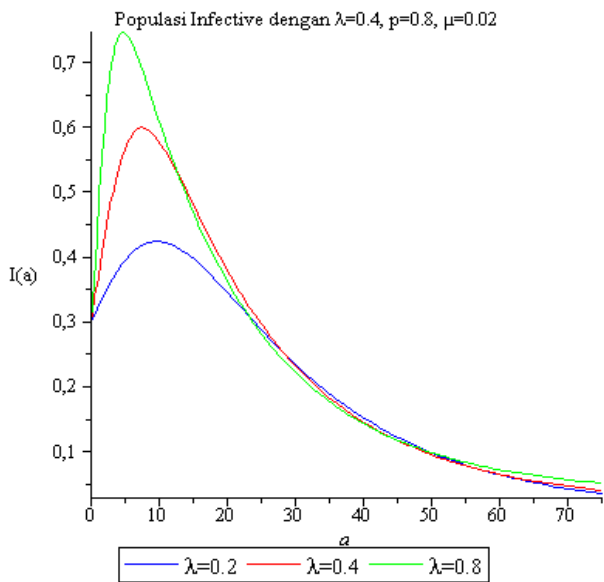
Untuk mengamati pengaruh imunisasi terhadap dinamika populasi *susceptible* dan *infective* pada umur a , maka akan dibuat grafik yang menunjukkan hubungan antar populasi terhadap umur. Misal diambil populasi *susceptible* dan *infective* masing-masing 70% dan 30%. Pada tahap ini akan dianalisis dinamika populasi dengan perubahan parameter λ yang menunjukkan laju serangan infeksi dan γ yang menunjukkan laju kesembuhan dengan pengaruh imunisasi pada tingkat p .

Nilai awal $S(0) = 0.7, I(0) = 0.3, R(0) = 0, a = 75, \mu = 0.2$, dengan menggunakan *Maple 13* diperoleh grafik sebagai berikut:



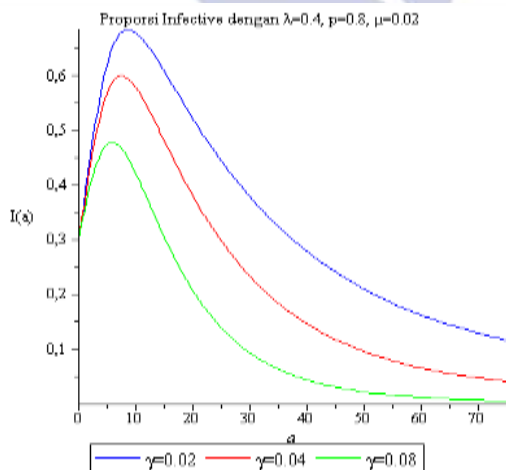
Gambar 1 Dinamika Proporsi Populasi *Infective* dengan Perubahan Tingkat Imunisasi $p = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$

Gambar 1 menunjukkan hubungan populasi *infective* terhadap umur a . Grafik tersebut dibandingkan dengan perubahan parameter p . Berdasarkan grafik tersebut dapat dilihat bahwa anak-anak lebih rentan terhadap penyakit, dan dengan bantuan program imunisasi yang mencapai 80%, dapat menekan penularan penyakit dengan sangat baik, semakin dewasa umur individu, maka semakin kecil pula untuk terserang penyakit, bahkan tidak akan menyerang orang dewasa karena sudah kebal terhadap penyakit. Terlihat pada grafik berwarna magenta yang semakin menuju ke 0.



Gambar 2 Dinamika Proporsi Populasi Infective dengan Perubahan Tingkat Interaksi antar individu $\lambda = 0.2, 0.4, 0.8$

Gambar 2 menunjukkan hubungan populasi infective terhadap umur a . Grafik tersebut dibandingkan dengan perubahan parameter λ . Berdasarkan grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin kecil laju serangan infeksi, maka semakin sedikit individu yang terserang infeksi. Pada grafik dapat dilihat bahwa penyakit akan cepat hilang jika yang terinfeksi semakin sedikit.



Gambar 3 Dinamika Proporsi Populasi Infective dengan Perubahan Tingkat kesembuhan $\gamma = 0.02, 0.04, 0.06$

Gambar 3 menunjukkan hubungan populasi infective terhadap umur a . Grafik tersebut dibandingkan dengan perubahan parameter γ . Berdasarkan grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin besar tingkat kesembuhan individu infective, maka semakin cepat pula penyakit hilang dari populasi.

PENUTUP

Kesimpulan

1. Berdasarkan rekonstruksi, diperoleh model epidemi SIR berdasarkan kelompok umur dengan pengaruh imunisasi:

$$\frac{dS}{da} = (1 - p)\mu - (\lambda I + \mu)S$$

$$\frac{dI}{da} = \lambda IS - [\gamma + \mu]I$$

$$\frac{dR}{da} = p\mu + \gamma I - \mu R$$

2. Hasil dari analisis kestabilan, diperoleh:

1. Titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = (1 - p, 0)$$

Titik kesetimbangan endemik

$$E_1 = \left(\frac{\gamma + \mu}{\lambda}, \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{(1 - p)\lambda}{(\gamma + \mu)} - 1 \right) \right)$$

2. Angka reproduksi dasar $R_0 = \frac{\lambda(1-p)}{(\gamma + \mu)}$
3. Titik kesetimbangan E_0 bersifat stabil asimtotik untuk $R_0 < 1$ sedangkan titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik jika $R_0 > 1$.
3. Simulasi dari model epidemi SIR berdasarkan kelompok umur dengan pengaruh imunisasi menggunakan Maple dengan perbedaan parameter, menunjukkan bahwa:

1. Program imunisasi yang mencapai 80%, dapat menekan penularan penyakit dengan sangat baik, bahkan tidak akan menyerang orang dewasa karena sudah kebal terhadap penyakit.
2. Semakin kecil tingkat serangan infeksi, maka semakin sedikit individu yang terserang infeksi.
3. Semakin besar tingkat kesembuhan individu infective, maka semakin cepat pula penyakit hilang dari populasi.

Saran

Pada penelitian selanjutnya, peneliti menyarankan agar dilakukan pengambilan data real dan menggunakan asumsi μ yang tidak konstan sehingga dapat dilihat perbandingannya lebih baik lagi.

Daftar Pustaka

Anderson, R.M., May, R.M. 1983. *Vaccination Against Rubella and Measles: Quantitative Investigation of Different Policies*. J. Hyg. 90, 259-325.

Boyce, William E. and Diprima, Richard C. 2001. *Elementary Differential Equation an Boundary Value Problems*. Seventh Edition. United State of America: John Wiley & Sons, Inc.

Brauer, F. 2008. *Mathematical Epidemiology*. Verlag Berlin Heidelberg: Springer.

Dietz, K. 1975. *Transmission and Control of Arbovirus Disease. Society for Industrial and Applied Mathematics*. Philadelphia.

- Lestari, Dwi. 2013. Diktat Persamaan Diferensial. Yogyakarta.
- May, R. M. 1986. *Population Biology of Microparasitic Infections*. Verlag Berlin Heidelberg: Springer.
- Ross, C. C. 2004. *Differential Equation*. Second Edition. New York: Springer.

