INTEGRAL H_1

Hilmi Nur Ardian
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: master.ardian@yahoo.co.id

Manuharawati
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: manuhara1@yahoo.co.id

Abstrak

E.H Moore dan H.L Smith mendefinisikan integral Riemann dengan menggunakan Moore-Smith limit. Integral Riemann dan integral Riemann dengan Moore-Smith limit memiliki ekuivalensi. Kemudian Ralph Henstock dan Jaroslav Kurzweil memperluas integral Riemann dengan menggunakan partisi tag δ-*fine* yang dikenal dengan integral Henstock. Dalam skripsi ini akan dijelaskan integral Henstock dengan Moore-Smith limit yang dikenal Integral H_1, sifat-sifat integral H_1 seperti: sifat perkalian dengan skalar, sifat kelinearan, kriteria Cauchy, sifat additif, Teorema Fundamental Kalkulus, dan bagaimana keterkaitan antara integral Henstock dan integral H_1.
Kata Kunci: Moore-Smith limit, Integral Riemann dengan Moore-Smith limit, Integral Henstock, Integral H_1.

Abstract

E.H Moore and H.L Smith define Riemann integral using Moore-Smith limit. Riemann integral and Riemann integral using Moore-Smith limit are equivalence. Ralph Henstock and Jaroslav Kurzweil generalize the Riemann integral using δ-*fine* tag partition and call itthe Henstock integral. This paper willbe explained that the Henstock integral can also be defined by Moore-Smith limit. The resulting integral is the so-called H_1 integral. Some properties of H_1 integral are as follows: Scalar multiplication, Linearity, Cauchy criteria, Additivity of H_1 integral, Fundamental Calculus Theorem, and the relation between Henstock integral and H_1 integral.
Keywords: Moore-Smith limit, Riemann integral using Moore-Smith limit, Henstock integral, H_1 integral.

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Integral merupakan salah satu dari bagian matematika yang aplikasinya sangat luas. Konsep integral pertama kali dikenalkan oleh Isaac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz, kemudian definisinya dipertajam oleh Benhard Riemann pada tahun 1850. Selain itu pada tahun 1952 E.H. Moore dan H.L. Smith mendefinisikan integral Riemann dengan Moore-Smith limit.

Selanjutnya Ralph Henstock dan Jaroslav Kurzweil mengembangkan suatu teori pengintegralan yang merupakan generalisasi dari konsep integral Riemann dan mampu menyelesaikan persoalan yang tidak dapat diselesaikan oleh integral Riemann, yakni Integral Henstock.

Garces, Lee dan Zhao memperkenalkan suatu integral Henstock dengan Moore-Smith limit, yakni Integral H_1 . Pada skripsi ini akan dikaji sifat-sifat integral H_1 seperti: sifat perkalian dengan skalar, sifat kelinearan, kriteria Cauchy, sifat additif, Teorema Fundamental Kalkulus. Selain itu akan dibahas keterkaitan antara integral H_1dan integral Henstock.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah skripsi adalah apakah sifatperkalian dengan skalar, sifat kelinearan, kriteria Cauchy, sifat additif, dan Teorema Fundamental Kalkulus berlaku pada integral H_1 dan bagaimana keterkaitan antara integral H_1 dan integral Henstock.

1.3 Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penulisan skripsi adalah mendeskripsikan sifat-sifat dari integral H_1 dan keterkaitannya dengan integral Henstock.

1.4 Manfaat Hasil Penulisan

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini antara lain:

1. Bagi penulis, sebagai tambahan informasi dan wawasan mengenai definisi dan sifat-sifat integral H_1 serta keterkaitannya dengan integral Henstock.
2. Bagi pengguna matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya bidang pengintegralan.

1.5 Batasan Masalah

Pada skripsi ini yang akan dibahas adalah sifat-sifat dari integral H_1 dan keterkaitannya dengan integral Henstock. Fungsi yang digunakan adalah fungsi bernilai real pada $[a, b]$.

1.6 Metode Penulisan

Metode yang digunakan di sini adalah metode kajian pustaka. Adapun langkah-langkah dalam penulisan ini adalah :

a. Mengumpulkan informasi yang berhubungan dengan materi terkait serta membaca, memahami dan menelaah beberapa buku dan referensi lain, seperti jurnal ilmiah, hasil penelitian terdahulu, dan lain-lain.
b. Menuliskannya ke dalam bentuk paper.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas definisi integral H_1 dan sifat-sifatnya beserta keterkaitannya dengan integral Henstock.

2.1 INTEGRAL H_1

Definisi 2.1

Diberikan *gauge* $\delta: [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $\mathbb{P}[a, b]$ adalah himpunan semua partisi tag δ-*fine* dari $[a, b]$.

Untuk $\dot{\mathcal{P}}_1, \dot{\mathcal{P}}_2 \in \mathbb{P}[a, b]$ dengan

$\dot{\mathcal{P}}_1 = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ dan $\dot{\mathcal{P}}_2 = \{([y_{j-1}, y_j], s_j)\}_{j=1}^{m}$

$\dot{\mathcal{P}}_1 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_2$ disebut $\dot{\mathcal{P}}_1$ menghaluskan (finer) $\dot{\mathcal{P}}_2$ jika memenuhi

a. $\dot{\mathcal{P}}_1 \succcurlyeq \dot{\mathcal{P}}_2$

b. i. Ketika $\dot{\mathcal{P}}_1 \neq \dot{\mathcal{P}}_2$

$\{s_j: ([y_{j-1}, y_j], s_j) \in \dot{\mathcal{P}}_2\} \subset \{t_i: ([x_{i-1}, x_i], t_i) \in \dot{\mathcal{P}}_1\}$

ii. Ketika $\dot{\mathcal{P}}_1 = \dot{\mathcal{P}}_2$

$\{s_j: ([y_{j-1}, y_j], s_j) \in \dot{\mathcal{P}}_2\} = \{t_i: ([x_{i-1}, x_i], t_i) \in \dot{\mathcal{P}}_1\}$.

Teorema 2.1

Diberikan *gauge* $\delta: [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $\mathbb{P}[a, b]$ adalah himpunan semua partisi tag δ-*fine* dari $[a, b]$ maka $(\mathbb{P}[a, b], \sqsupseteq)$ adalah himpunan berarah.

Bukti : Diberikan *gauge*$\delta: [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $\mathbb{P}[a, b]$ adalah himpunan semua partisi tag δ-*fine* dari $[a, b]$.

1. Akan dibuktikan memenuhi sifat refleksif. Diberikan $\dot{\mathcal{P}}_1 \in \mathbb{P}[a, b]$ dengan $\dot{\mathcal{P}}_1 = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ maka $\dot{\mathcal{P}}_1 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_1$ karena $[x_{i-1}, x_i] = [x_{i-1}, x_i], t_i = t_i$ untuk $i = 1, \ldots, n$ dan $\{t_i: ([x_{i-1}, x_i], t_i) \in \dot{\mathcal{P}}_1\} \subseteq \{t_i: ([x_{i-1}, x_i], t_i) \in \dot{\mathcal{P}}_1\}$.
2. Diberikan $\dot{\mathcal{P}}_1, \dot{\mathcal{P}}_2, \dot{\mathcal{P}}_3 \in \mathbb{P}[a, b]$ dengan

$\dot{\mathcal{P}}_1 = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$, $\dot{\mathcal{P}}_2 = \{([y_{j-1}, y_j], s_j)\}_{j=1}^{m}$, dan $\dot{\mathcal{P}}_3 = \{([z_{k-1}, z_k], u_k)\}_{k=1}^{p}$.

Akan dibuktikan jika $\dot{\mathcal{P}}_1 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_2$ dan $\dot{\mathcal{P}}_2 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_3$ maka $\dot{\mathcal{P}}_1 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_3$

a. Pertama akan dibuktikan $\dot{\mathcal{P}}_1 \succcurlyeq \dot{\mathcal{P}}_3$

$\dot{\mathcal{P}}_1 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_2$ maka $\dot{\mathcal{P}}_1 \succcurlyeq \dot{\mathcal{P}}_2$

Kasus 1

Ketika $[x_{i-1}, x_i] \neq [y_{j-1}, y_j]$ berarti untuk setiap $([x_{i-1}, x_i], t_i) \in \dot{\mathcal{P}}_1$ terdapat $([y_{j-1}, y_j], s_j) \in \dot{\mathcal{P}}_2$ sehingga $[x_{i-1}, x_i] \subset [y_{j-1}, y_j]$

Kasus 2

Ketika $[x_{i-1}, x_i] = [y_{j-1}, y_j]$ memenuhi $t_i = s_j$.

$\dot{\mathcal{P}}_2 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_3$ maka $\dot{\mathcal{P}}_2 \succcurlyeq \dot{\mathcal{P}}_3$.

Kasus 1

Ketika $[y_{j-1}, y_j] \neq [z_{k-1}, z_k]$ berarti untuk setiap $([y_{j-1}, y_j], s_j) \in \dot{\mathcal{P}}_2$ terdapat $([z_{k-1}, z_k], u_k) \in \dot{\mathcal{P}}_3$ sehingga $[y_{j-1}, y_j] \subset [z_{k-1}, z_k]$

Kasus 2

Ketika $[y_{j-1}, y_j] = [z_{k-1}, z_k]$ memenuhi $s_j = u_k$.

Karena $[x_{i-1}, x_i] \subset [y_{j-1}, y_j]$ dan $[y_{j-1}, y_j] \subset [z_{k-1}, z_k]$ maka $[x_{i-1}, x_i] \subset [z_{k-1}, z_k]$. Ketika $[x_{i-1}, x_i] = [y_{j-1}, y_j] = [z_{k-1}, z_k]$ memenuhi $t_i = s_j = u_k$.

b. Selanjutnya akan dibuktikan

$\{t_k: ([z_{k-1}, z_k], t_k) \in \dot{\mathcal{P}}_3\} \subseteq \{t_i: ([x_{i-1}, x_i], t_i) \in \dot{\mathcal{P}}_1\}$

$\dot{\mathcal{P}}_1 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_2$ dan $\dot{\mathcal{P}}_2 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_3$ diperoleh

$\{t_j: ([y_{j-1}, y_j], s_j) \in \dot{\mathcal{P}}_2\} \subseteq \{t_i: ([x_{i-1}, x_i], t_i) \in \dot{\mathcal{P}}_1\}$

dan

$\{t_k: ([z_{k-1}, z_k], u_k) \in \dot{\mathcal{P}}_3\} \subseteq \{t_j: ([y_{j-1}, y_j], s_j) \in \dot{\mathcal{P}}_2\}$

sehingga

$\{t_k: ([z_{k-1}, z_k], u_k) \in \dot{\mathcal{P}}_3\} \subseteq \{t_i: ([x_{i-1}, x_i], t_i) \in \dot{\mathcal{P}}_1\}$

3. Diberikan $\dot{\mathcal{P}}_1, \dot{\mathcal{P}}_2 \in \mathbb{P}[a, b]$ dengan $\dot{\mathcal{P}}_1 = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ dan $\dot{\mathcal{P}}_2 = \{([y_{j-1}, y_j], s_j)\}_{j=1}^{m}$

a. Akan dibuktikan jika $\dot{\mathcal{P}}_1 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_2$ dan $\dot{\mathcal{P}}_2 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_1$ maka $\dot{\mathcal{P}}_1 = \dot{\mathcal{P}}_2$

$\dot{\mathcal{P}}_1 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_2$ maka $\dot{\mathcal{P}}_1 \succcurlyeq \dot{\mathcal{P}}_2$

Kasus 1

Ketika $[x_{i-1}, x_i] \neq [y_{j-1}, y_j]$ berarti untuk setiap $([x_{i-1}, x_i], t_i) \in \dot{\mathcal{P}}_1$ terdapat $([y_{j-1}, y_j], s_j) \in \dot{\mathcal{P}}_2$ sehingga $[x_{i-1}, x_i] \subset [y_{j-1}, y_j]$

Kasus 2

Ketika $[x_{i-1}, x_i] = [y_{j-1}, y_j]$ memenuhi $t_i = s_j$.

$\dot{\mathcal{P}}_2 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_1$ maka $\dot{\mathcal{P}}_2 \succcurlyeq \dot{\mathcal{P}}_1$

Kasus 1

Ketika $[x_{i-1}, x_i] \neq [y_{j-1}, y_j]$ berarti untuk setiap $([y_{j-1}, y_j], s_j) \in \dot{\mathcal{P}}_2$ terdapat $([x_{i-1}, x_i], t_i) \in \dot{\mathcal{P}}_1$ sehingga $[y_{j-1}, y_j] \subset [x_{i-1}, x_i]$

Kasus 2

Ketika $[x_{i-1}, x_i] = [y_{j-1}, y_j]$ memenuhi $t_i = s$.

Dari beberapa kasus di atas diperoleh $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [y_{j-1}, y_j]$ dan $[y_{j-1}, y_j] \subset [x_{i-1}, x_i]$ sehingga $[x_{i-1}, x_i] = [y_{j-1}, y_j]$dan memenuhi $t_i = s_j$.

Jadi$\{s_j: ([y_{j-1}, y_j], s_j) \in \dot{\mathcal{P}}_2\} = \{t_i: ([x_{i-1}, x_i], t_i) \in \dot{\mathcal{P}}_1\}$.

4. Diberikan $\dot{\mathcal{P}}_1, \dot{\mathcal{P}}_2 \in \mathbb{P}[a, b]$ dengan $\dot{\mathcal{P}}_1 = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ dan $\dot{\mathcal{P}}_2 = \{[y_{j-1}, y_j], s_j\}_{j=1}^{m}$

Akan dikonstruksi $\dot{\mathcal{P}}_3 = \{(I_{ij}, t_{ij})\}_{i,j=1}^{\max(n,m)}$ dengan $I_{ij} \neq \emptyset$ dan $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \cap [y_{j-1}, y_j]$. Jika terdapat irisan yang sama maka hanya ditulis satu kali.

Kasus 1 yaitu ketika $t_i, s_j \in I_{ij}$.

- Jika $t_i = s_j$ maka dibentuk $M_1 = \{(I_{ij}, t_i)\}_{i,j=1}^{\max(n,m)}$
- Jika $t_i \neq s_j$ maka dibentuk $r = \frac{1}{2}(t_i + s_j)$ sehingga $M_1 = \{(I_{ij} \cap [a, r], \min\{t_i, s_j\}), (I_{ij} \cap [r, b], \max\{t_i, s_j\})\}_{i,j=1}^{\max(n,m)}$

Kasus 2 yaitu ketika $t_i \in I_{ij}, s_j \notin I_{ij}$.

Dibentuk $M_2 = \{(I_{ij}, t_i)\}_{i,j=1}^{\max(n,m)}$.

Kasus 3 yaitu ketika $t_i \notin I_{ij}, s_j \in I_{ij}$.

Dibentuk $M_3 = \{(I_{ij}, s_j)\}_{i,j=1}^{\max(n,m)}$.

Kasus 4 yaitu ketika $t_i \notin I_{ij}, s_j \notin I_{ij}$

Untuk setiap $m \in I_{ij}$ diberikan $L_m = \left(m - \frac{1}{2}\delta(m), m + \frac{1}{2}\delta(m)\right) \cap I_{ij}$. Pilih $m_k, 1 \leq k < l$ sedemikian hingga $\bigcup_{k=1}^{l} L_{m_k} = I_{ij}$. Misal $\overline{L_m}$ adalah interval tertutup dan $\overline{L_m} \subseteq L_m$. Pilih $M_4 = \{(\overline{L_{m_k}}, m_k)\}_{i,j=1}^{\max(n,m)}$.

Dalam kasus ini pilih $\dot{\mathcal{P}}_3 = \{(I_{ij}, t_{ij})\}_{i,j=1}^{\max(n,m)} = \bigcup_{r=1}^{4} M_r$. Karena $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \cap [y_{j-1}, y_j]$ dan untuk setiap tag $t_i, s_j \in I_{ij}$ maka $\dot{\mathcal{P}}_3 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_1$ dan $\dot{\mathcal{P}}_3 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_2$. Berdasarkan kasus 1-3 terlihat bahwa $\dot{\mathcal{P}}_3$ adalah partisi tag δ *-fine*. Untuk kasus 4, $m_k \in \overline{L_m} \subseteq \left(m - \frac{1}{2}\delta(m), m + \frac{1}{2}\delta(m)\right)$ sehingga $\dot{\mathcal{P}}_3$ merupakan partisi tag δ-*fine*.■

Teorema 2.2

Diberikan *gauge* $\delta, \delta' : [a, b] \to \mathbb{R}$. Jika $\dot{\mathcal{P}}_1$ adalah partisi tag δ-*fine* dan $\dot{\mathcal{P}}_2$ partisi tag δ'-*fine* maka terdapat partisi η *-fine* $\dot{\mathcal{P}}_3$ dengan $\eta = \min\{\delta, \delta'\}$ sedemikian hingga $\dot{\mathcal{P}}_3 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_1$ dan $\dot{\mathcal{P}}_3 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_2$.

Bukti : $\dot{\mathcal{P}}_1 = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah partisi tag δ-*fine* dan $\dot{\mathcal{P}}_2 = \{[y_{j-1}, y_j], s_j\}_{j=1}^{m}$ partisi tag δ'-*fine*

Karena $\eta = \min\{\delta, \delta'\}$ maka untuk setiap partisi η-*fine* $\dot{\mathcal{P}}_3$ maka $\dot{\mathcal{P}}_3$ partisi tag δ-*fine* dan partisi tag δ'-*fine*.

Akan dikonstruksi $\dot{\mathcal{P}}_3 = \{(I_{ij}, t_{ij})\}_{i,j=1}^{\max(n,m)}$ dengan $I_{ij} \neq \emptyset$ dan $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \cap [y_{j-1}, y_j]$. Jika terdapat irisan yang sama maka hanya ditulis satu kali.

Kasus 1 yaitu ketika $t_i, s_j \in I_{ij}$.

Jika $t_i = s_j$ maka dibentuk $M_1 = \{(I_{ij}, t_i)\}_{i,j=1}^{\max(n,m)}$

Jika $t_i \neq s_j$ maka dibentuk $r = \frac{1}{2}(t_i + s_j)$ sehingga $M_1 = \{(I_{ij} \cap [a, r], \min\{t_i, s_j\}), (I_{ij} \cap [r, b], \max\{t_i, s_j\})\}_{i,j=1}^{\max(n,m)}$

Kasus 2 yaitu ketika $t_i \in I_{ij}, s_j \notin I_{ij}$.

Dibentuk $M_2 = \{(I_{ij}, t_i)\}_{i,j=1}^{\max(n,m)}$.

Kasus 3 yaitu ketika $t_i \notin I_{ij}, s_j \in I_{ij}$.

Dibentuk $M_3 = \{(I_{ij}, s_j)\}_{i,j=1}^{\max(n,m)}$.

Kasus 4 yaitu ketika $t_i \notin I_{ij}, s_j \notin I_{ij}$

Untuk setiap $m \in I_{ij}$ diberikan $L_m = \left(m - \frac{1}{2}\delta(m), m + \frac{1}{2}\delta(m)\right) \cap I_{ij}$. Pilih $m_k, 1 \leq k < l$ sedemikian hingga $\bigcup_{k=1}^{l} L_{m_k} = I_{ij}$. Misal $\overline{L_m}$ adalah interval tertutup dan $\overline{L_m} \subseteq L_m$. Pilih $M_4 = \{(\overline{L_{m_k}}, m_k)\}_{i,j=1}^{\max(n,m)}$.

Dalam kasus ini pilih $\dot{\mathcal{P}}_3 = \{(I_{ij}, t_{ij})\}_{i,j=1}^{\max(n,m)} = \bigcup_{r=1}^{4} M_r$. Karena $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \cap [y_{j-1}, y_j]$ dan untuk setiap tag $t_i, s_j \in I_{ij}$ maka $\dot{\mathcal{P}}_3 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_1$ dan $\dot{\mathcal{P}}_3 \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_2$. Berdasarkan kasus 1-3 terlihat bahwa $\dot{\mathcal{P}}_3$ adalah partisi tag δ *-fine*. Untuk kasus 4, $m_k \in \overline{L_m} \subseteq \left(m - \frac{1}{2}\delta(m), m + \frac{1}{2}\delta(m)\right)$ sehingga $\dot{\mathcal{P}}_3$ merupakan partisi tag δ-*fine* ■

Definisi2.2

Fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral H_1 pada $[a, b]$ jika ada $L \in \mathbb{R}$ dan terdapat *gauge* $\delta(t)$ pada $[a, b]$ sedemikian hingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ sehingga

$$\left|S(\dot{\mathcal{P}}; f) - L\right| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$.

L disebut nilai integral H_1 fungsi f pada selang $[a, b]$ dan ditulis dengan lambang :

$$L = (H_1) \int_a^b f\, dx$$

Himpunan semua fungsi yang terintegral H_1 pada $[a, b]$ dinotasikan $H_1[a, b]$.

Contoh 2.1

Diberikan fungsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, x\ rasional \\ 0, x\ irrasional \end{cases}$$

Akan dibuktikan f terintegral H_1 pada $[0,1]$.

Bukti : Misal $B = \mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_1, r_2, \ldots\}$ dan $C = \mathbb{Q}^c \cap [0,1]$ sehingga $B \cup C = [0,1]$.

Pilih *gauge* pada $[0,1]$

$$\delta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+1}}, t = r_k \in B \\ 1, t \in C \end{cases}$$

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$. Berdasarkan Akibat Archimedes (Manuharawati, 2013: 44) terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{n} < \varepsilon$ maka pilih partisi δ *-fine* $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon = \left\{\left(\left[0, \frac{1}{n}\right], t_1\right), \left(\left[0, \frac{2}{n}\right], t_2\right), \ldots, \left(\left[\frac{n-1}{n}, 1\right], t_n\right)\right\}$ dengan

$t_i \in C, i = 1,2,\dots,n$ dan $\|\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon\| < \varepsilon$ sehingga untuk setiap partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}}$ dengan $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ berlaku

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

t_i rasional t_i irrasional

$$\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) < \sum_{k=1}^{\infty} 2\|\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon\|\delta(r_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Jadi f terintegral H_1 pada $[0,1]$ dengan $(H_1)\int_a^b f\,dx = 0$.

Teorema 2.3

Jika $f \in H_1[a,b]$ maka nilai integralnya tunggal.

Bukti : Misalkan L' dan L'' adalah nilai integral dari f pada $[a,b]$. Berdasarkan definisi 2.2 diperoleh

i. Terdapat *gauge* $\delta'(t)$ sehingga jika diberikan $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ terdapat partisi tag δ'-*fine* $\dot{\mathcal{P}}'_{\frac{\varepsilon}{2}}$ sedemikian hingga untuk setiap partisi tag δ'-*fine* $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ berlaku $|S(\dot{\mathcal{P}};f) - L'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

ii. Terdapat *gauge* $\delta''(t)$ sehingga jika diberikan $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ terdapat partisi tag δ'' -*fine* $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ sedemikian hingga untuk setiap partisi tag δ''-*fine* $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}''_{\frac{\varepsilon}{2}}$ berlaku $|S(\dot{\mathcal{P}};f) - L''| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pilih *gauge* $\delta(t) = \min\{\delta'(t), \delta''(t)\}, \forall t \in [a,b]$. Berdasarkan Teorema 2.2 maka dapat dilih partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ sedemikian hingga $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}'_{\frac{\varepsilon}{2}}$ dan $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}''_{\frac{\varepsilon}{2}}$ sehingga untuk setiap partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ diperoleh

$$|L' - L''| = |L' - S(\dot{\mathcal{P}};f) + S(\dot{\mathcal{P}};f) - L''|$$

$$\leq |L' - S(\dot{\mathcal{P}};f)| + |S(\dot{\mathcal{P}};f) - L''| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Berdasarkan Akibat 1.2 (Manuharawati, 2013: 22) maka $L' = L''$. ■

Teorema 2.4

Jika $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ maka $f \in H_1[a,b]$ dan $\mathfrak{R}\int_a^b f\,dx = (H_1)\int_a^b f\,dx$.

Bukti : Misal $L = \mathfrak{R}\int_a^b f\,dx$. Diberikan $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Karena $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ dengan nilai integral L maka terdapat δ_ε sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ adalah partisi tag dari $[a,b]$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$ maka $|S(\dot{\mathcal{P}};f) - L| < \varepsilon$ .Pilih *gauge* $\delta(t) = \frac{1}{2}, \forall t \in [a,b]$.Pilih partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon\| < \delta_\varepsilon$. Jika $\dot{\mathcal{P}}$ adalah partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ maka $\|\dot{\mathcal{P}}\| \leq 2\delta(t)\|\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon\| = \|\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon\| < \delta_\varepsilon$ sehingga diperoleh $|S(\dot{\mathcal{P}};f) - L| < \varepsilon$. ■

2.2 SIFAT-SIFAT INTEGRAL H_1

Pada subbab ini akan dijelaskan tentang sifat-sifat dari fungsi terintegral H_1.

Teorema 2.5

a. Jika $f \in H_1[a,b]$ dan $k \in \mathbb{R}$ maka $kf \in H_1[a,b]$ dan
$$(H_1)\int_a^b kf\,dx = k\left\{(H_1)\int_a^b f\,dx.\right\}$$

b. Jika $f, g \in H_1[a,b]$ maka $(f+g) \in H_1[a,b]$ dan
$$(H_1)\int_a^b (f+g)dx = (H_1)\int_a^b f\,dx + (H_1)\int_a^b g\,dx.$$

Bukti:

a. Untuk $k = 0$
$$(H_1)\int_a^b 0\,dx = 0 = 0\left\{(H_1)\int_a^b f\,dx\right\}.$$

Untuk $k \neq 0$. Misal $L = (H_1)\int_a^b f\,dx$. Karena $f \in H_1[a,b]$ maka terdapat *gauge* $\delta(t)$ pada $[a,b]$ sehingga jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon'$ sedemikian hingga untuk setiap partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon'$ berlaku
$$|S(\dot{\mathcal{P}};f) - L'| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$
sehingga untuk setiap partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}'_\varepsilon$ diperoleh
$$|S(\dot{\mathcal{P}};kf) - L| = |kS(\dot{\mathcal{P}};f) - kL'|$$
$$= |k||S(\dot{\mathcal{P}};f) - L'| < \frac{\varepsilon}{|k|}|k| = \varepsilon$$
Akibatnya terbukti bahwa $kf \in H_1[a,b]$ dan
$$(H_1)\int_a^b kf(x)dx = k\left\{(H_1)\int_a^b f(x)dx\right\}.$$

b. Diberikan L' dan L'' berturut-turut nilai integral f dan g pada $[a,b]$.
Karena $f \in H_1[a,b]$ maka terdapat *gauge* $\delta'(t)$ sehingga jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi tag δ'-*fine* $\dot{\mathcal{P}}_{\frac{\varepsilon}{2}}'$ sedemikian hingga untuk setiap partisi tag δ'-*fine* $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_{\frac{\varepsilon}{2}}'$ berlaku
$$|S(\dot{\mathcal{P}};f) - L'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Demikian pula, karena $g \in H_1[a,b]$ maka terdapat *gauge* $\delta''(t)$ sehingga jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi tag δ'' -*fine* $\dot{\mathcal{P}}_{\frac{\varepsilon}{2}}''$ sedemikian hingga untuk setiap partisi tag δ''-*fine* $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_{\frac{\varepsilon}{2}}''$ berlaku
$$|S(\dot{\mathcal{P}};g) - L''| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pilih $\delta(t) = \min\{\delta'(t), \delta''(t)\}, \forall t \in [a,b]$. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, berdasarkan Teorema 2.2 maka dapat dipilih partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ sedemikian hingga $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_{\frac{\varepsilon}{2}}'$ dan $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_{\frac{\varepsilon}{2}}''$

Untuk setiap partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ diperoleh
$$|S(\dot{\mathcal{P}};f+g) - (L' + L'')|$$
$$= |S(\dot{\mathcal{P}};f) + S(\dot{\mathcal{P}};g) - (L' + L'')|$$
$$\leq |S(\dot{\mathcal{P}};f) - L'| + |S(\dot{\mathcal{P}};g) - L''| < \varepsilon.$$ ■

Teorema 2.6
Diberikan fungsi $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ dan $c \in [a,b]$. Jika $f \in H_1[a,c]$ dan $f \in H_1[c,b]$ maka $f \in H_1[a,b]$ sedemikian hingga

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx.$$

Bukti : Diberikan L' dan L'' berturut-turut nilai integral f pada $[a,c]$ dan $[c,b]$. Karena $f \in H_1[a,c]$ maka terdapat *gauge*$\delta'(t)$ sehingga jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi tag δ -*fine* $\dot{\mathcal{P}}_{\frac{\varepsilon}{2}}' = \{([x_i, y_i], t_i)\}_{i=1}^n$ sedemikian hingga untuk setiap partisi tag δ'-*fine*$\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_{\frac{\varepsilon}{2}}'$ berlaku

$$|S(\dot{\mathcal{P}}; f) - L'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demikian pula, karena $f \in H_1[c,b]$ maka terdapat *gauge*$\delta''(t)$ sehingga jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi tag δ''-*fine*$\dot{\mathcal{P}}_{\frac{\varepsilon}{2}}''$ sedemikian hingga untuk setiap partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_{\frac{\varepsilon}{2}}''$ berlaku

$$|S(\dot{\mathcal{P}}; f) - L''| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Didefinisikan *gauge* pada $[a,b]$

$$\delta(t) = \begin{cases} \min\left\{\delta'(t), \frac{1}{2}(c-x)\right\}, jika\ x \in [a,c) \\ \min(\delta'(c), \delta''(c)), jika\ x = c \\ \min\{\delta''(t), \frac{1}{2}(x-c)\}, jika\ x \in (c,b] \end{cases}$$

Misalkan $\dot{\mathcal{P}}_a$ adalah partisi δ-*fine* dari $[a,c]$ dengan tag kurang dari c dan $\dot{\mathcal{P}}_b$ adalah partisi δ-*fine* dari $[c,b]$ dengan tag lebih dari c dengan $\dot{\mathcal{P}}_a \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_{\frac{\varepsilon}{2}}'$ dan $\dot{\mathcal{P}}_b \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_{\frac{\varepsilon}{2}}''$.
Pilih $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon = \dot{\mathcal{P}}_a \cup ([x_{n-1}, t_{n-1}], t_{n-1}) \cup ([t_{n-1}, c], c) \cup ([c, s_1], c) \cup ([s_1, u_2], s_1) \cup \dot{\mathcal{P}}_b$.
Jika $\dot{\mathcal{P}}_1 = \dot{\mathcal{P}}_a \cup ([x_{n-1}, t_{n-1}], t_{n-1}) \cup ([t_{n-1}, c], c)$ dan $\dot{\mathcal{P}}_2 = ([c, s_1], c) \cup ([s_1, u_2], s_1) \cup \dot{\mathcal{P}}_b$ maka $\dot{\mathcal{P}}_1$ adalah partisi δ'-fine dari $[a,c]$ dan $\dot{\mathcal{P}}_2$ adalah partisi δ''-fine dari $[c,b]$. Untuk setiap partisi δ-fine $\dot{\mathcal{P}} = \dot{\mathcal{P}}_a \cup \dot{\mathcal{P}}_b \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ diperoleh

$$S(\dot{\mathcal{P}}; f) = S(\dot{\mathcal{P}}_1; f) + S(\dot{\mathcal{P}}_2; f)$$

dan
$|S(\dot{\mathcal{P}}; f) - (L' + L'')| \le |S(\dot{\mathcal{P}}_1; f) - L'| + |S(\dot{\mathcal{P}}_2; f) - L''| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ ■

Teorema 2.7 (Kriteria Cauchy)
Fungsi $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ terintegral H_1 pada $[a,b]$ jika dan hanya jika terdapat *gauge*$\delta(t)$ pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ sedemikian hingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ adalah partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon, \dot{\mathcal{Q}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ berlaku

$$|S(\dot{\mathcal{P}}; f) - S(\dot{\mathcal{Q}}; f)| < \varepsilon.$$

Bukti:
$\Longrightarrow$ Fungsi f terintegral H_1 pada $[a,b]$ dengan nilai integral L. Akan dibuktikan terdapat *gauge* $\delta(t)$ pada $[a,b] \ni$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ sedemikian hingga untuk setiap partisi tag δ-*fine*$\dot{\mathcal{P}}, \dot{\mathcal{Q}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ berlaku

$$|S(\dot{\mathcal{P}}; f) - S(\dot{\mathcal{Q}}; f)| < \varepsilon.$$

Misalkan terdapat *gauge* $\eta(t)$ pada $[a,b]$. Diberikan sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ maka terdapat $\dot{\mathcal{P}}'_{\frac{\varepsilon}{2}}$ sehingga diberikan sebarang partisi tagη-*fine*$\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}'_{\frac{\varepsilon}{2}}, \dot{\mathcal{Q}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}'_{\frac{\varepsilon}{2}}$ maka

$|S(\dot{\mathcal{P}}; f) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|S(\dot{\mathcal{Q}}; f) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Karena f terintegral H_1 pada $[a,b]$ maka dipilih *gauge*$\delta(t) = \eta(t), \forall t \in [a,b]$dan pilih partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon = \dot{\mathcal{P}}'_{\frac{\varepsilon}{2}}$ sedemikian hingga jika diberikan sebarang partisi tag δ-*fine*$\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon, \dot{\mathcal{Q}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ maka

$$\begin{aligned} |S(\dot{\mathcal{P}}; f) - S(\dot{\mathcal{Q}}; f)| &= |S(\dot{\mathcal{P}}; f) - L + L - S(\dot{\mathcal{Q}}; f)| \\ &\le |S(\dot{\mathcal{P}}; f) - L| + |L - S(\dot{\mathcal{Q}}; f)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Terdapat *gauge*$\delta(t)$ pada $[a,b]$.
Diberikan$n \in \mathbb{N}$. Karena $n > 0$ maka terdapat partisi tag δ-*fine*$\dot{\mathcal{P}}_n$ sedemikian hingga untuk setiap partisi tag δ-*fine*$\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_n, \dot{\mathcal{Q}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_n$ berlaku

$$|S(\dot{\mathcal{P}}; f) - S(\dot{\mathcal{Q}}; f)| < \frac{1}{n}$$

Asumsikan $\{\dot{\mathcal{P}}_n\}$ adalah barisan monoton naik. Diberikan $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, berdasarkan Teorema 2.2 maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Untuk $m > n \ge n_0$ diperoleh $\dot{\mathcal{P}}_m \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_{n_0}, \dot{\mathcal{P}}_n \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_{n_0}$ dan
$|S(\dot{\mathcal{P}}_m; f) - S(\dot{\mathcal{P}}_n; f)| < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$.......(3.1)
Sehingga $\left(S(\dot{\mathcal{P}}_n; f)\right)$adalah barisan Cauchy berdasarkan Teorema 2.4 maka ada $L \in \mathbb{R}$ sehingga $lim\left(S(\dot{\mathcal{P}}_n; f)\right) = L$ dan pilih $N \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan

$$|S(\dot{\mathcal{P}}_n; f) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

untuk setiap $n \ge N$.
Diberikan $\dot{\mathcal{P}}_n$ partisi tag δ-*fine* dengan $\dot{\mathcal{P}}_n \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_N$ diperoleh
$|S(\dot{\mathcal{P}}_n; f) - L| \le |S(\dot{\mathcal{P}}_n; f) - S(\dot{\mathcal{P}}_m; f)| + |S(\dot{\mathcal{P}}_m; f) - L| < \varepsilon.$ ■

Teorema 2.8
Diberikan fungsi $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ dan $[c,d] \subseteq [a,b]$. Jika $f \in H_1[a,b]$ maka $f \in H_1[c,d]$.

Bukti : Fungsi f terintegral H_1 pada $[a,b]$ sehingga berdasarkan Teorema 2.6 maka terdapat *gauge* δ pada $[a,b]$ sehingga jika diberikan sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ terdapat partisi tag δ-*fine*$\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ sedemikian hingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ adalah partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon, \dot{\mathcal{Q}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ berlaku

$$|S(\dot{\mathcal{P}}; f) - S(\dot{\mathcal{Q}}; f)| < \varepsilon.$$

Berdasarkan Teorema 2.5 maka terdapat partisi tag δ-*fine* dari $[a,c]$ dan $[d,b]$. Misalkan $\dot{\mathcal{P}}_a$ dan $\dot{\mathcal{P}}_b$ berturut-berturut adalah partisi tag δ-*fine* dari $[a,c]$ dan $[d,b]$ dengan $\dot{\mathcal{P}}_a \subset \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon, \dot{\mathcal{P}}_b \subset \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$.
Diberikan $\dot{\mathcal{P}}_1 \subset \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ dan $\dot{\mathcal{P}}_2 \subset \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ adalah partisi tag δ-*fine* dari $[c,d]$.
Jika $\dot{\mathcal{P}} = \dot{\mathcal{P}}_a \cup \dot{\mathcal{P}}_b \cup \dot{\mathcal{P}}_1$ dan $\dot{Q} = \dot{\mathcal{P}}_a \cup \dot{\mathcal{P}}_b \cup \dot{\mathcal{P}}_2$ maka $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon, \dot{Q} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ sehingga

$$|S(\dot{\mathcal{P}}_1;f) - S(\dot{\mathcal{P}}_2;f)|$$

$$= |S(\dot{\mathcal{P}}_1;f) + S(\dot{\mathcal{P}}_a;f) + S(\dot{\mathcal{P}}_b;f) - S(\dot{\mathcal{P}}_2;f) - S(\dot{\mathcal{P}}_a;f) - S(\dot{\mathcal{P}}_b;f)|$$

$$= \left|S(\dot{\mathcal{P}}_1;f) + S(\dot{\mathcal{P}}_a;f) + S(\dot{\mathcal{P}}_b;f) - \left(S(\dot{\mathcal{P}}_2;f) + S(\dot{\mathcal{P}}_a;f) + S(\dot{\mathcal{P}}_b;f)\right)\right|$$

$$= |S(\dot{\mathcal{P}};f) - S(\dot{Q};f)| < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.9
Diberikan $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Jika $f(x) = 0$ hampir dimana-mana pada $[a,b]$ maka $f(x)$ terintegral H_1 pada $[a,b]$ dan $(H_1)\int_a^b f dx = 0$.

Bukti :
$f = 0$ hampir dimana-mana pada $[a,b]$ maka berdasarkan definisi 2.16 terdapat $H \subseteq [a,b]$ dan $f(x) = 0, \forall x \in [a,b] - H$.
Misal $H = \{x \in [a,b]: f(x) \neq 0\}$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N} H_n = \{x \in H: n-1 < |f(x)| \leq n\}$ maka $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ dan $m^*(H_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Diberikan $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ karena $m^*(H_n) = 0$ berdasarkan definisi 2.15 maka terdapat koleksi terbilang interval-interval buka $\{I_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ sehingga $H_n \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k^n$ dan $\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k^n) < \frac{\varepsilon}{n2^{n+2}}$. Untuk setiap $x \in H_n$ pilih interval terbuka $I_x \in \{I_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ sehingga $x \in I_x$.
Didefinisikan *gauge* pada $[a,b]$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, x \in [a,b] - H \\ \dfrac{1}{n2^{n+2}}, x \in H_n \end{cases}$$

Dan pilih partisi δ-*fine*$\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon\| < \varepsilon$.
Diberikan partisi $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^m$, dengan $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$.
Misal $A_n = \{i: t_i \in H_n\}$ dan $A = \{i: t_i \notin H\}$. Himpunan $\{([x_{i-1},x_i],t_i): i \in H_n\}$ adalah koleksi interval-interval *non-overlapping* dan karena untuk setiap interval $[x_{i-1},x_i]$ panjangnya kurang dari $l(I_{t_i})$ sehingga $\sum_{i\in H_n}(x_{i-1} - x_i) < \sum_{k\in\mathbb{N}} 2l(I_k^n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2\delta\|\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon\|$.
Diperoleh

$$|S(\dot{\mathcal{P}};f)| < \left|\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in H_n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$
$$\leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in H_n} |f(t_i)|(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in H_n} |f(t_i)|(x_i - x_{i-1}) < \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in H_n} n(x_i - x_{i-1})$$
$$< \sum_{n\in\mathbb{N}} n \sum_{i\in H_n}(x_i - x_{i-1})$$
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} 2n\frac{\varepsilon}{n2^{n+1}} = \varepsilon.$$

Jadi f terintegral H_1 pada $[a,b]$ dan $(H_1)\int_a^b f dx = 0$.■

Teorema 2.10
Jika $f,g \in H_1[a,b]$ dan jika $f(x) = g(x)$ hampir dimana-mana pada $[a,b]$ maka $(H_1)\int_a^b f dx = (H_1)\int_a^b g dx$.

Bukti :
Diberikan $f,g \in H_1[a,b]$ dan $f = g$ hampir dimana-mana pada $[a,b]$maka berdasarkan Teorema 2.9 maka $g - f \in H_1[a,b]$ dan $(H_1)\int_a^b (g-f)dx = 0$. Berdasarkan Teorema 3.4 maka fungsi $g = f + (g-f)$ terintegral H_1 pada $[a,b]$ dan $(H_1)\int_a^b g dx = (H_1)\int_a^b f dx + (H_1)\int_a^b (g-f)dx = (H_1)\int_a^b f dx$. ■

Teorema 2.11
Diberikan $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ terintegral H_1 maka ada $L \in \mathbb{R}$ dan terdapat *gauge*$\delta(t)$ pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi tag δ-*fine*$\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ berlaku

$$|S(\dot{\mathcal{P}}';f) - L| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi tag δ-*fine*$\dot{\mathcal{P}}' \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$.
Jika $\dot{Q}_\varepsilon = \{[x_{i-1},x_i],t_i\}_{i=1}^n$ adalah partisi tag δ-*fine* sehingga untuk setiap partisi tag δ-*fine*$\dot{Q} \sqsupseteq \dot{Q}_\varepsilon$ berlaku $|S(\dot{Q};f) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ maka

$$\left|\sum_{i=0}^n \{f(t_i)(u_i - u_{i-1}) - N_i\}\right| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}} = \{[u_{i-1},u_i],t_i\}_{i=1}^n \subseteq \dot{Q}$dari $[a,b]$ dengan N_i adalah nilai integral pada selang $[u_{i-1},u_i]$.

Bukti : Diberikan $\varepsilon > 0$ dan partisi tag δ –*fine* $\dot{Q} \sqsupseteq \dot{Q}_\varepsilon$.
Misal $\dot{\mathcal{P}} \subseteq \dot{Q}$ dengan $\dot{\mathcal{P}} = \{[v_{i-1},v_i],t_i\}_{i=1}^n$ maka $\bigcup_{i=1}^n [v_{i-1},v_i] \subset [a,b]$. Pilih interval-interval *non-overlapping* $[x_1,y_1],[x_2,y_2],\ldots,[x_q,y_q]$ sehingga $[a,b] - \bigcup_{i=1}^n (v_{i-1},v_i) = \bigcup_{k=1}^q [x_k,y_k]$. Untuk setiap $k \in \{1,2,\ldots,q\}$ berdasarkan Teorema 2.8 maka $f \in H_1[x_k,y_k]$. Karena $f \in H_1[x_k,y_k]$ maka ada $O_k \in \mathbb{R}$ dan terdapat *gauge* $\delta_k(t)$ pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi tag δ_k-*fine* $\dot{Q}_{\varepsilon(k)}$ sedemikian hingga untuk setiap $\dot{\mathcal{P}}_k \sqsupseteq \dot{Q}_{\varepsilon(k)}$ berlaku $|S(\dot{\mathcal{P}}_k;f) - O_k| < \frac{\varepsilon}{2q}$.
Pilih *gauge*$\gamma(t) = \min\{\delta(t),\delta_k(t)\}$. Pilih partisi tag γ-*fine* $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ dari $[a,b]$ sehingga $\bigcup_{k=1}^q \dot{Q}_{\varepsilon(k)} \subset \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$. Pilih partisi tag γ-*fine* $\dot{\mathcal{P}}'_\varepsilon$ sehingga $\dot{\mathcal{P}}'_\varepsilon \sqsupseteq \dot{Q}_\varepsilon$ dan $\dot{\mathcal{P}}'_\varepsilon \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$.

Misal $\dot{Q}_k$ partisi tag γ-*fine* dari $[x_k, y_k]$ dengan $\dot{Q}_k \subset \mathcal{P}'_{\varepsilon}$. Jika $\dot{Q} = \dot{\mathcal{P}} \cup_{k=1}^{q} \dot{Q}_k$ maka $\dot{Q}$ merupakan partisi tag δ-*fine* dari $[a,b]$ dan $\dot{Q} \sqsupseteq \dot{Q}_\varepsilon$ sehingga $S(\dot{Q}; f) = S(\dot{\mathcal{P}}; f) + \sum_{i=1}^{q} S(\dot{Q}_k; f)$ dan $L = \sum_{i=1}^{n} N_i + \sum_{i=1}^{q} O_k$
diperoleh

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\{f(t_i)(u_i - u_{i-1}) - N_i\}\right|$$

$$= \left|\left\{S(\dot{Q}; f) - \sum_{i=1}^{q} S(\dot{Q}_k; f)\right\} - \left\{L - \sum_{i=1}^{q} O_k\right\}\right|$$

$\leq |S(\dot{Q}; f) - L| + \left|\sum_{i=1}^{q} \{S(\dot{Q}_k; f) - O_k\}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.■

Definisi 2.3
Diberikan fungsi $F, f: [a,b] - \mathbb{R}$. F dikatakan fungsi primitif dari f pada $[a,b]$ jika $F'(x)$ ada dan $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$. [9]

Teorema 2.12 (Teorema Fundamental Kalkulus)
Misalkan E himpunan countable dalam $[a,b]$ dan fungsi $f, F: [a,b] \to \mathbb{R}$ yang memenuhi:

a. F kontinu pada $[a,b]$
b. $F'(x) = f(x)$ untuk semua $x \in [a,b] - E$

maka f terintegral H_1 pada $[a,b]$ dan $(H_1)\int_a^b f dx = F(b) - F(a)$.

Bukti:
Kasus $E = \emptyset$.
Diketahui F kontinu pada $[a,b]$ dan $F'(x) = f(x)$ untuk semua $x \in [a,b]$.. Misalkan $t \in [a,b]$, karena $F'(x) = f(x)$ ada maka terdapat $\delta_\varepsilon > 0$ sedemikian hingga jika $z \in [a,b]$ memenuhi $0 < |z - t| < \delta_\varepsilon$, maka

$$\left|\frac{F(z) - F(t)}{z - t} - f(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Jadi $|F(z) - F(t) - f(t)(z - t)| < \frac{1}{2}\varepsilon|z - t|$ dimana $z \in [t - \delta_\varepsilon, t + \delta_\varepsilon] \cap [a,b]$. Diberikan $u, v \in [a,b]$ dengan $u < v$ yang memenuhi $t \in [u,v] \subseteq [t - \delta_\varepsilon, t + \delta_\varepsilon]$. Jika $v - t \geq 0$ dan $t - u \geq 0$ maka

$$|F(v) - F(u) - f(t)(v - u)|$$

$$\leq |F(v) - F(t) - f(t)(v - t)| + |F(t) - F(u) - f(t)(t - u)|$$

$$\leq \frac{1}{2}\varepsilon(v - t) + \frac{1}{2}\varepsilon(t - u) = \frac{1}{2}\varepsilon(v - u).$$

Jadi, jika $t \in [u,v] \subseteq [t - \delta_\varepsilon, t + \delta_\varepsilon]$ maka

$$|F(v) - F(u) - f(t)(v - u)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon(v - u).$$

Akan ditunjukkan bahwa f terintegral H_1 pada $[a,b]$ dan $(H_1)\int_a^b f dx = F(b) - F(a)$. Pilih *gauge* $\delta(t) = b - a, \forall t \in [a,b]$ dan pilih partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon\| < \frac{\delta_\varepsilon}{2(b-a)}$ sehingga untuk setiap partisi δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ diperoleh

$t_i \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta_\varepsilon, t + \delta_\varepsilon]$ untuk $i = 1,2,\dots,n$.

Akibatnya diperoleh

$$|F(b) - F(a) - S(\dot{\mathcal{P}}; f)|$$

$$\leq \left|\sum_{i=1}^{n}\{F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})\}\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\varepsilon(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon(b - a).$$

Untuk $E \neq \emptyset$.
Misal $E = \{c_1, c_2, \dots\}$. Asumsikan $f(c_k) = 0, \forall k \in \{1,2,\dots\}$.
Diberikan $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ dan $t \in [a,b] - E$. Karena F terdeferensial di $t \in [a,b] - E$ maka terdapat $\delta_\varepsilon > 0$ sehingga jika $u, v \in [a,b] - E$ yang memenuhi $t - \delta_\varepsilon \leq u \leq t \leq v \leq t + \delta_\varepsilon$ maka
$|F(v) - F(u) - f(t)(v - u)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon(v - u)$.
Berdasarkan kekontinuan fungsi F di c_k maka terdapat $\delta_\varepsilon(c_k)$ sedemikian hingga $|F(z) - F(c_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$ untuk setiap $z \in [a,b]$ yang memenuhi
$|z - c_k| \leq \delta_\varepsilon(c_k)$.

Pilih *gauge*$\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{2^{k+2}}, t \in E \\ 1, t \in [a,b] - E \end{cases}$ dan pilih partisi δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ dengan $2\delta(t)\|\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon\| = \delta_\varepsilon$. Diberikan $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ adalah partisi tag δ-*fine* dengan $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$. Jika $t_i \notin E$ maka seperti pada kasus $E = \emptyset$. Jika $c_k \in E$ adalah tag dari $[x_{i-1}, x_i]$ maka

$$|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(c_k)(x_i - x_{i-1})|$$

$$\leq |F(x_i) - F(c_k)| + |F(c_k) - F(x_{i-1})| + |f(c_k)(x_i - x_{i-1})|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} + 0 = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$ ■

2.3 KETERKAITAN INTEGRAL H_1 DAN INTEGRAL HENSTOCK

Teorema 2.13
Jika $f \in H_1[a,b]$ maka $f \in \mathfrak{R}^*[a,b]$ dan $(H_1)\int_a^b f dx = \mathfrak{R}^*\int_a^b f dx$.

Bukti : Misal $L = (H_1)\int_a^b f dx$. Karena $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegral H_1 pada $[a,b]$ maka terdapat *gauge* $\delta(t)$ pada $[a,b] \ni$ jika diberikan $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ terdapat partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$,diberikan sebarang partisi tag δ-*fine* $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ berlaku

$$|S(\dot{\mathcal{P}}; f) - L| < \varepsilon$$

Pilih *gauge* $\eta_\varepsilon = \min\{\delta(t), \delta(t)\|\dot{\mathcal{P}}_\varepsilon\|\}, t \in [a,b]$ maka $\eta(t)$*gauge* pada $[a,b]$.

Diberikan sebarang partisi tag η -*fine* $\dot{\mathcal{P}}$ maka $\dot{\mathcal{P}}$ merupakan partisi tag δ-*fine*. Asumsikan untuk setiap partisi tag η -*fine* $\dot{\mathcal{P}} \sqsupseteq \dot{\mathcal{P}}_\varepsilon$ sehingga berlaku

$$\left|S(\dot{\mathcal{P}}; f) - L\right| < \varepsilon$$

Terbukti bahwa f terintegral Henstock pada $[a, b]$. ■

3. PENUTUP

Simpulan

1. Jika suatu fungsi terintegral Riemann pada $[a, b]$ maka fungsi tersebut juga terintegral H_1 pada $[a, b]$ dan nilai integralnya sama tapi tidak berlaku sebaliknya.
2. Sifat-sifat yang berlaku pada integral H_1 adalah sifat perkalian skalar, sifat kelinearan, kriteria Cauchy, sifat additif, dan Teorema Fundamental Kalkulus.
3. Jika suatu fungsi terintegral H_1 pada $[a, b]$ maka fungsi tersebut juga terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan nilai integralnya sama.

Saran

Dalam skripsi ini dibahas tentang sifat-sifat integral H_1 dan keterkaitannya dengan integral Henstock. Pada Teorema 3.13, jika suatu fungsi terintegral H_1 pada $[a, b]$ maka fungsi tersebut juga terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan nilai integralnya sama, tetapi dalam skripsi ini belum dibahas apakah jika suatu fungsi terintegral H_1 pada $[a, b]$ maka terintegral Henstock pada $[a, b]$. Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini untuk mempelajari lebih lanjut tentang keterkaitan integral H_1 dan integral Henstock.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G. dan Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction To real Analysis*. Third Edition. United State of America: John Wiley and Sons Inc.

Manuharawati. 2013. *Analisis Real 1*. Sidoarjo: Zifatama Publisher.

Beardon, Alan. 1997. *A Limit Approach to Real Analysis*. New York: Springer.

Regina, S. B. dan Iusem A. *Set-Valued Mappings and Enlargements of Monotone Operators*. New York: Springer.

J. L. Garces, P. Y. Lee and D. Zhao. 1999. "Moore–Smith limits and the Henstock integral". *Real Analysis Exchange*. Vol. 24(1): pp 447-456.

Gupta. (1986). *Lebesgue Measure and Integration*. New Delhi: Willey Eastern Limited.

Lebl, Jiˇrí. *Basic Analysis*. California: University of Pittsburgh

Royden, H. L. dan P. M. Fitzpatrick. 2010. *Real Analysis*. China: Pearson Education Inc.

Bartle, Robert G. 2001. A Modern Theory of Integral. United State of America: Amer. Math. Society. Providence.