

KEKONVERGENAN-CAUCHY DAN PEMETAAN KOMPATIBEL PADA RUANG METRIK KABUR INTUITIONISTIC

Yulriza prihastiani

S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya

Isaani13@yahoo.com

Abstrak

Padahimpunantakkosong S dapat ditentukan himpunan kabur $A \subseteq S$ oleh sebuah fungsi $\mu_A: S \rightarrow [0,1]$ yang disebut fungsi keanggotaan A . Dengan konsep tersebut telah didefinisikan ruang metrik kabur $(S, M, *)$ dan ruang metrik kabur intuitionistic $(S, M, N, *, \bullet)$. Barisan dalam himpunan S merupakan suatu fungsi yang domainnya himpunan bilangan asli dengan arah hasil termuat di dalam himpunan S . Dari konsep barisan pada suatu himpunan S tersebut maka didefinisikan barisan konvergen, barisan Cauchy dan limit suatu barisan pada $(S, M, *)$ yang kemudian diperluas lagi pada $(S, M, N, *, \bullet)$. Dua fungsi f dan g dikatakan kompatibel pada (S, d) jika untuk setiap barisan (x_n) yang memenuhi $\lim_n (f(x_n)) = \lim_n (g(x_n)) = p \in S$ berlaku $\lim_n (d(f(g(x_n)), g(f(x_n)))) = 0$. Pada skripsi ini akan dibahas pemetaan kompatibel pada $(S, M, *)$ dan pemetaan kompatibel pada $(S, M, N, *, \bullet)$.

Kata Kunci: ruang metrik, ruang metrik kabur, ruang metrik kabur intuitionistic, pemetaan kompatibel pada ruang metrik, pemetaan kompatibel pada ruang metrik kabur, pemetaan kompatibel pada ruang metrik kabur intuitionistic

Abstract

A. Thereafter the concept of fuzzy set was defined fuzzy metric space $(S, M, *)$ and intuitionistic fuzzy metric space $(S, M, N, *, \bullet)$. A sequence in set S is a function. Thereafter the concept of sequence was defined convergence sequence and Cauchy sequence in fuzzy metric space $(S, M, *)$, which is generalization in intuitionistic fuzzy metric space $(S, M, N, *, \bullet)$. Self-maps f and g of a metric space (S, d) are compatible iff $\lim_n (d(f(g(x_n)), g(f(x_n)))) = 0$ when (x_n) is a sequence such that $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = t$ for some t in S . In this paper, will be defined compatible mapping in $(S, M, *)$ and compatible mapping in $(S, M, N, *, \bullet)$.

Keyword : metric space, fuzzy metric space, Intuitionistic fuzzy metric space, compatible mapping

1. PENDAHULUAN

Pada suatu himpunan tak kosong S dapat dibentuk suatu barisan (x_n) di S . Di dalam skripsi ini, akan mengkaji konsep kekonvergenan suatu barisan dan konsep barisan Cauchy pada ruang metrik. Ruang metrik adalah himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan metrik d .

Padahimpunantakkosong S dapat ditentukan himpunan kabur $A \subseteq S$ oleh sebuah fungsi $\mu_A: S \rightarrow [0,1]$ yang disebut fungsi keanggotaan A . Dari konsep himpunan kabur, didefinisikan konsep ruang metrik kabur $(S, M, *)$, dimana S adalah himpunan tak kosong,

$M : S^2 \times (0, \infty) \rightarrow [0,1]$ adalah metrik pada S dan $* : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ adalah norma- t kontinu. Di dalam ruang metrik kabur didefinisikan beberapa konsep barisan diantaranya kekonvergenan barisan dan barisan Cauchy. Metrik $M(x, y, t)$ disebut derajat kedekatan antara x dan

yang bergantung pada t . Dari konsep himpunan kabur tersebut, didefinisikan ruang metrik kabur intuitionistic $(S, M, N, *, \bullet)$ dengan $N : S^2 \times (0, \infty) \rightarrow [0,1]$ adalah metrik pada S dan $\bullet : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ adalah norma- t kontinu. $M(x, y, t)$ disebut derajat kedekatan antara x dan y yang bergantung pada t . $N(x, y, t)$ disebut derajat ketidaktekatan antara x dan y yang bergantung pada t . Di dalam ruang metrik kabur intuitionistic $(S, M, N, *, \bullet)$ didefinisikan kekonvergenan barisan dan barisan Cauchy.

Dua fungsi f dan g dikatakan kompatibel pada (S, d) jika untuk setiap barisan (x_n) yang memenuhi

$$\lim_n (f(x_n)) = \lim_n (g(x_n)) = p \in S$$

berlaku

$$\lim_n (d(f(g(x_n)), g(f(x_n)))) = 0$$

Di dalam ruang metrik kabur dan ruang metrik kabur intuitionistic diberikan definisi pemetaan kompatibel.

Barisan (x_n) di dalam ruang metrik (\mathbb{R}, d) dengan d adalah metrik biasa pada \mathbb{R} disebut barisan konvergen jika dan hanya jika barisan (x_n) adalah barisan Cauchy. Di dalam skripsi ini akan mengkaji keterkaitan barisan konvergen dan barisan Cauchy pada suatu himpunan dan dengan metrik d tertentu yang selanjutnya akan dikaji keterkaitan barisan konvergen dan barisan Cauchy pada ruang metrik kabur dan ruang metrik kabur intuitionistic. Selain itu, akan dikaji keterkaitan barisan (x_n) yang konvergen di dalam ruang metrik (S, d) dengan barisan (x_n) yang konvergen di dalam ruang metrik kabur $(S, M, *)$, Keterkaitan antara (x_n) yang konvergen di dalam ruang metrik (S, d) dengan barisan (x_n) yang konvergen di dalam ruang metrik kabur intuitionistic $(S, M, N, *, \bullet)$ dan Keterkaitan antara (x_n) yang konvergen di dalam ruang metrik kabur $(S, M, *)$ dengan barisan (x_n) yang konvergen di dalam ruang metrik kabur intuitionistic $(S, M, N, *, \bullet)$. Di dalam skripsi ini akan dikaji keterkaitan pemetaan kompatibel pada ruang metrik (S, d) dengan ruang metrik kabur $(S, M, *)$ dan ruang metrik kabur intuitionistic $(S, M, N, *, \bullet)$.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ruang Metrik Kabur

Sebelum dibahas pengertian ruang metrik kabur, terlebih dahulu diberikan pengertian himpunan kabur, pengertian norma-t dan konorma-t.

Definisi 2.1.1 (Kouikoglou, 2009:12)

Diberikan S sebarang himpunan dan didefinisikan fungsi keanggotaan $\mu_A : S \rightarrow [0,1]$. Himpunan kabur A di S dinyatakan sebagai berikut:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in S\}$$

$\mu_A(x)$ menyatakan derajat keanggotaan x di A .

Definisi 2.1.2 (Alaca, 2008:428)

Operasi biner $*$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ adalah norma-t kontinu jika $\forall a, b, c, d \in [0,1]$ memenuhi :

- a. $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in [0,1]$
- b. $a * b = b * a, \forall a, b \in [0,1]$
- c. $a * 1 = a, \forall a \in [0,1]$
- d. $a * b \leq c * d$ jika $a \leq c$ dan $b \leq d$
- e. $*$ kontinu pada $[0,1] \times [0,1]$

Definisi 2.1.3 (Alaca, 2008:428)

Operasi biner \bullet : $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ disebut konorma-t kontinu jika $\forall a, b, c, d \in [0,1]$ memenuhi :

- a. $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c, \forall a, b, c \in [0,1]$
- b. $a \bullet b = b \bullet a, \forall a, b \in [0,1]$
- c. $a \bullet 0 = a, \forall a \in [0,1]$

- d. $a \bullet b \leq c \bullet d$ jika $a \leq c$ dan $b \leq d$
- e. \bullet kontinu $\forall a, b, c, d \in [0,1]$

Definisi 2.1.4 (Aphane, 2009:17)

Diberikan S adalah himpunan takkosong dan $*$ adalah norma-t kontinu.

Metrik kabur $M : S^2 \times (0, \infty) \rightarrow$

$[0,1]$ disebut metrik kabur pada S , jika untuk setiap $x, y, z \in S$ dan $t, s > 0$ berlaku:

- a. $M(x, y, t) > 0$
- b. $M(x, y, t) = 1$ jika dan hanya jika $x = y$
- c. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$
- d. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$
- e. $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0,1]$ kontinu

Himpunan S yang dilengkapi dengan metrik kabur M dan norma-t kontinu $*$, dituliskan dengan $(S, M, *)$ disebut ruang metrik kabur. Selanjutnya, jika metrik kaburnya telah diketahui, maka ruang metrik kabur $(S, M, *)$ bisa ditulis dengan S .

Sebagai contoh, Diberikan ruang metrik (\mathbb{R}, d) dengan d metrik biasa pada \mathbb{R} . Metrik kabur $M(x, y, t) = \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}}$,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, t > 0 \text{ dan } * b = ab$$

adalah metrik kabur pada \mathbb{R} . $(S, M, *)$ merupakan ruang metrik kabur.

Sebelum diberikan pengertian barisan konvergen dan barisan Cauchy pada ruang metrik kabur, terlebih dahulu diberikan pengertian barisan konvergen dan barisan Cauchy pada ruang metrik.

Definisi 2.1.5 (Aphane, 2009:3)

Diberikan (S, d) adalah ruang metrik dan (x_n) adalah barisan di S . Barisan (x_n) konvergen ke $x \in S$ jika

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \ni \forall n \geq N(\varepsilon)$$

berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

Definisi 2.1.6 (Aphane, 2009:5)

Barisan (x_n) pada ruang metrik (X, d) disebut barisan Cauchy jika $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \ni \forall n, m \geq N(\varepsilon)$ berlaku $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Jika (x_n) pada ruang metrik

(X, d) adalah Cauchy, maka dapat ditulis $\lim_{n,m} d(x_n, x_m) = 0$

Definisi 2.1.7 (Aphane, 2009:35)

Diberikan ruang metrik kabur $(S, M, *)$ dan barisan (x_n) di S

- a. Barisan (x_n) dikatakan konvergen ke $x \in S$ di dalam ruang metrik kabur $(S, M, *)$ disingkat konvergen-M, jika untuk setiap $t > 0$ berlaku $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$
- b. Barisan (x_n) disebut barisan Cauchy di dalam ruang metrik kabur $(S, M, *)$ disingkat Cauchy-M, jika untuk setiap $t > 0$ dan $p \in \mathbb{N}$ berlaku $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$

Teorema 2.1.8

Diberikan ruang metrik (S, d) sebarang dan ruang metrik kabur $(X, M, *)$. Untuk sebarang barisan (x_n) di S berlaku:

- (i) Barisan (x_n) konvergen $\Leftrightarrow (x_n)$ konvergen-M
- (ii) (x_n) barisan Cauchy $\Leftrightarrow (x_n)$ barisan Cauchy-M

Teorema 2.1.9

Jika barisan (x_n) di S adalah barisan konvergen di dalam ruang metrik, maka (x_n) adalah barisan Cauchy. Konvers dari teorema sebelum ini benar.

Diberikan himpunan $S = (0, 1)$ dengan d adalah metrik biasa pada S .

Barisan $(\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N})$ di S adalah barisan Cauchy tetapi tidak konvergen pada (S, d) .

Teorema 2.1.10

Diberikan $(S, M, *)$ ruang metrik kabur dan barisan (x_n) di dalam S . Jika barisan (x_n) konvergen-M, maka (x_n) barisan Cauchy-M.

Konvers dari teorema sebelum ini benar.

Diberikan himpunan $S = (0, 1]$ dan didefinisikan metrik:

$$d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in (0, 1]$$

Didefinisikan fungsi $M: S^2 \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ dengan

$$M(x, y, t) = \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}}$$

untuk setiap $x, y \in S$ dan $t > 0$. $(S, M, *)$ dimana $a * b = ab$.

$$(x_n) = \left(\frac{1}{n+2} : n \in \mathbb{N}\right)$$

Barisan (x_n) tidak konvergen-M ke setiap $x \in S$, tetapi (x_n) merupakan barisan Cauchy-M.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Ruang Metrik Kabur Intuitionistic

Definisi metrik kabur dan ruang metrik kabur intuitionistic c diberikan sebagai berikut:

Definisi 3.1.1 (Samanta, 2011:3)

Diberikan S himpunan tak kosong dan $*$, \bullet berturut-turut adalah norma-t kontinu dan konorma-t kontinu.

M dan N masing-masing disebut metrik pada $S^2 \times [0, \infty)$ jika memenuhi:

1. $M(x, y, t) + N(x, y, t) \leq 1$, untuk setiap $x, y \in S$ dan $t > 0$
2. $M(x, y, 0) = 0$, untuk setiap $x, y \in S$
3. $M(x, y, t) = 1$, jika dan hanya jika $x = y$, untuk setiap $x, y \in S$ dan $t > 0$
4. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$, untuk setiap $x, y \in S$ dan $t > 0$
5. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$, $\forall x, y, z \in S$ dan $t, s > 0$
6. $M(x, y, \cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ kontinu untuk setiap $x, y \in S$
7. $\lim_{t \rightarrow \infty} M(x, y, t) = 1$, untuk setiap $x, y \in S$
8. $N(x, y, 0) = 1$, untuk setiap $x, y \in S$

9. $N(x, y, t) = 0$, jika dan hanya jika $x = y$, untuk setiap $x, y \in S$ dan $t > 0$

10. $N(x, y, t) = N(y, x, t)$, untuk setiap $x, y \in S$ dan $t > 0$

11. $N(x, y, t) \bullet N(y, z, s) \geq N(x, z, t + s)$, untuk setiap $x, y, z \in S$ dan $t, s > 0$

12. $N(x, y, \cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ kontinu untuk setiap $x, y \in S$

13. $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, y, t) = 0$, untuk setiap $x, y \in S$

Pasangan terurut (M, N) disebut metrik kabur intuitionistic pada S . $M(x, y, t)$ dan $N(x, y, t)$ berturut-turut disebut derajat kedekatan dan derajat ketidakdekatan antara x dan y yang bergantung pada t . Himpunan S yang dilengkapi dengan metrik kabur intuitionistic, norma-t kontinu $*$ dan konorma-t kontinu \bullet dituliskan dengan $(S, M, N, *, \bullet)$ disebut ruang metrik kabur intuitionistic.

Sebagai contoh, diberikan himpunan $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, dan $*$, \bullet berturut-turut adalah $a * b = ab$ dan $a \bullet b = \min\{1, a + b\}$. Metrik M dan N pada S didefinisikan:

$$M(x, y, t) = \begin{cases} \frac{t}{t + |x - y|} & ; t > 0 \\ 0 & ; t = 0 \end{cases}$$

Dan

$$N(x, y, t) = \begin{cases} \frac{|x - y|}{t + |x - y|} & ; t > 0 \\ 1 & ; t = 0 \end{cases}$$

Dapat dibuktikan bahwa $(S, M, N, *, \bullet)$ merupakan ruang metrik kabur intuitionistic.

Teorema 3.1.2

Di dalam ruang metrik kabur intuitionistic $(S, M, N, *, \bullet)$. $M(x, y, \cdot)$ adalah fungsi nondecreasing dan $N(x, y, \cdot)$ adalah fungsi nonincreasing pada S untuk setiap $x, y \in S$.

Lemma 3.1.3

Jika $M(x, y, *)$ metrik kabur, dengan $N = 1 - M$ dan \bullet konorma-t yang didefinisikan:

$x \bullet y = 1 - ((1 - x) * (1 - y))$ untuk setiap $x, y \in S$, maka $(S, M, N, *, \bullet)$ merupakan ruang metrik kabur intuitionistic.

Lemma 3.1.4

Diberikan $(S, M, N, *, \bullet)$ adalah ruang metrik kabur intuitionistic. Jika untuk setiap bilangan $k \in (0, 1)$, $M(x, y, kt) \geq M(x, y, t)$ dan $N(x, y, kt) \leq N(x, y, t)$ maka $x = y$.

Definisi 3.1.5 (Muralisankar, 2009:508)

Diberikan ruang metrik kabur intuitionistic $(S, M, N, *, \bullet)$ dan (x_n) adalah barisan di S .

- (i) Barisan (x_n) dikatakan konvergen ke $x \in S$ di dalam ruang metrik kabur intuitionistic $(S, M, N, *, \bullet)$ disingkat konvergen-I, jika untuk setiap $t > 0$ berlaku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, x, t) = 0$$

(ii) Barisan (x_n) disebut barisan Cauchy di dalam ruang metrik kabur intuitionistic $(S, M, N, *, \bullet)$ disingkat barisan Cauchy-I, jika untuk setiap $t > 0$ dan $p > 0$ berlaku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_{n+p}, x_n, t) = 0$$

Lemma 3.1.6

Diberikan ruang metrik kabur $(S, M, *)$ dan ruang metrik kabur intuitionistic $(S, M, N, *, \bullet)$. Untuk setiap barisan (x_n) di S berlaku :

- (i) (x_n) konvergen-M $\Leftrightarrow (x_n)$ konvergen-I
- (ii) (x_n) barisan cauchy-M $\Leftrightarrow (x_n)$ barisan cauchy-I

Bukti

(i) Dari arah kiri

Karena (x_n) barisan konvergen-M maka $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$. Berdasarkan Definisi 3.1

$$\begin{aligned} M(x_n, x, t) + N(x_n, x, t) &\leq 1, \forall x_n, x \in S \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (M(x_n, x, t) + N(x_n, x, t)) &\leq 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) + \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, x, t) &\leq 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, x, t) &\leq 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, x, t) &\leq 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Karena $N(x_n, x, t) \geq 0$ maka $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, x, t) \geq 0$. Akibatnya $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, x, t) = 0$. Dengan demikian (x_n) konvergen-I.

Buktidariparahkanan

Karena (x_n) konvergen-I maka $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$. Dengan demikian (x_n) konvergen-M.

(i) Buktidarikiri

Karena (x_n) barisan cauchy-M maka $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$. Berdasarkan definisi 3.1

$$\begin{aligned} M(x_n, x, t) + N(x_n, x, t) &\leq 1, \forall x_n, x \in S \\ \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) + \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, x, t) &\leq 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_{n+p}, x_n, t) &\leq 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{n+p}, x_n, t) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_{n+p}, x_n, t) &\leq 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Karena $N(x_{n+p}, x_n, t) \geq 0$ maka $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_{n+p}, x_n, t) = 0$.

Sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_{n+p}, x_n, t) = 0$. Dengan demikian (x_n) adalah barisan Cauchy-I.

Buktidariparahkanan

Karena (x_n) adalah barisan Cauchy-I maka $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$. Dengan demikian (x_n) adalah barisan Cauchy-M. ■

Lemma 3.1.7

Diberikan ruang metrik kabur intuitionistic $(S, M, N, *, \bullet)$ dan (x_n) barisan di S . Jika barisan (x_n) konvergen-I, maka (x_n) merupakan barisan Cauchy-I.

Bukti

Diketahui barisan (x_n) konvergen-I, artinya untuk setiap $t > 0$ berlaku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, x, t) = 0$$

haliniberakibat

untuk setiap $p \in N$ dan $t > 0$ berlaku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{n+p}, x, \frac{t}{2}) = 1$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_{n+p}, x, \frac{t}{2}) = 0$$

Selanjutnyadiperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{n+p}, x, t) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{n+p}, x, \frac{t}{2}) * \lim_{n \rightarrow \infty} M(x, x_n, \frac{t}{2}) \\ &\geq 1 * 1 = 1. \end{aligned}$$

Karena

$$M(x_{n+p}, x, t) \leq 1$$

maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{n+p}, x, t) \leq 1$$

Akibatnya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{n+p}, x, t) = 1$$

Dengancara yang sama, untuk setiap $p \in N$ dan $t > 0$ berlaku

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_{n+p}, x, t) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_{n+p}, x, \frac{t}{2}) * \lim_{n \rightarrow \infty} N(x, x_n, \frac{t}{2}) \\ &\leq 0 * 0 = 0. \end{aligned}$$

Karena

$$N(x_{n+p}, x, t) \geq 0$$

maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_{n+p}, x, t) \geq 0$$

Akibatnya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_{n+p}, x, t) = 0$$

Jadi (x_n) merupakan barisan Cauchy-I.

Konversdariteoremabelumtentubentar.

Diketahui ruang metrik $((0,1], d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in (0,1]$. Dibentuk ruang metrik kabur darah aljabar $((0,1], M, *_{da})$ dan metrik kabur intuitionistic standar $((0,1], M, N, *_{da}, \bullet)$. Barisan $(x_n) = (\frac{1}{n+2}, n \in N)$ adalah barisan Cauchy-I tetapi tidak konvergen-I. ■

3.2 PEMETAAN KOMPATIBEL

Definisi 3.2.1 (Singh, 2011:504)

Diberikan (S, d) ruang metrik. Dua pemetaan $f, g: S \rightarrow S$ disebut kompatibel pada ruang metrik (S, d) jika

$$\lim_n (d(f(g(x_n)), g(f(x_n)))) = 0$$

Bilamana (x_n) adalah barisan di S sedemikian hingga

$$\lim_n (f(x_n)) = \lim_n (g(x_n)) = t, \quad t \in S$$

Sebagai contoh, diberikan $S = \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = 2 - x$$

f dan g adalah kompatibel pada (\mathbb{R}, d) .

Definisi 3.2.2 (Jha, 2013:85)

Diberikan (S, d) ruang metrik. Dua pemetaan $f, g: S \rightarrow S$ pada ruang metrik kabur $(S, M, *)$.

f dan g disebut kompatibel jika

$$\lim_n (M(f(g(x_n)), g(f(x_n)), t)) = 1$$

bilamana (x_n) barisan di S sedemikian hingga

$$\lim_n (f(x_n)) = \lim_n (g(x_n)) = p \in S$$

Teorema 3.2.3

Jika f dan g kompatibel pada ruang metrik (S, d) , maka f dan g kompatibel pada ruang metrik kabur $(X, M, *)$

Bukti

Karena f dan g kompatibel pada ruang metrik (S, d) maka untuk setiap barisan (x_n) di S sedemikian hingga

$$\lim_n (f(x_n)) = \lim_n (g(x_n)) = t, \quad t \in S$$

berlaku

$$\lim_n (d(f(g(x_n)), g(f(x_n)))) = 0.$$

Berdasarkan Teorema 2.1.8 bagian (i) diperoleh

$$\lim_n (M(f(g(x_n)), g(f(x_n)), t)) = 1$$

f dan g kompatibel pada pada ruang metrik kabur $(S, M, *)$. ■

Definisi 3.2.4 (Alaca, 2008:431)

Diberikan f dan g adalah pemetaan pada ruang metrik kabur intuitionistic $(S, M, N, *, \bullet)$. Fungsi f dan g dikatakan kompatibel jika untuk sebarang $t > 0$ berlaku

$$\lim_n (M(f(g(x_n)), g(f(x_n)), t)) = 1$$

dan

$$\lim_n (N(f(g(x_n)), g(f(x_n)), t)) = 0$$

bilamana (x_n) adalah barisan di S sedemikian hingga

$$\lim_n (f(x_n)) = \lim_n (g(x_n)) = z$$

Untuk suatu $z \in S$.

Teorema 3.2.5

Jika f dan g kompatibel pada ruang metrik kabur $(S, M, *)$, maka f dan g kompatibel pada ruang metrik kabur intuitionistic $(X, M, N, *, \bullet)$

Bukti

Karena f dan g kompatibel pada ruang metrik kabur $(S, M, *)$ maka

$$\lim_n (M(f(g(x_n)), g(f(x_n)), t)) = 1$$

bilamana (x_n) barisan di S sedemikian hingga

$$\lim_n (f(x_n)) = \lim_n (g(x_n)) = p \in S$$

Berdasarkan Teorema 3.1.6 diperoleh

$$\lim_n (N(f(g(x_n)), g(f(x_n)), t)) = 0$$

Jadi f dan g kompatibel pada ruang metrik kabur intuitionistic $(X, M, N, *, \bullet)$. ■

PENUTUP

Simpulan

Dari pembahasan yang telah diuraikan dalam skripsi ini, dapat diambil kesimpulan bahwa :

1. Barisan (x_n) di S yang konvergen di dalam ruang metrik adalah barisan Cauchy. Konvers dari teorema belum tentu benar.
2. Barisan (x_n) di S yang konvergen di dalam ruang metrik kabur adalah barisan Cauchy. Konvers dari teorema belum tentu benar.
3. Barisan (x_n) di S yang konvergen di dalam ruang metrik kabur intuitionistic, adalah barisan Cauchy. Konvers dari teorema belum tentu benar.
4. Dua pemetaan yang kompatibel pada ruang metrik adalah kompatibel pada ruang metrik kabur dan ruang metrik kabur intuitionistic

Saran

Penelitian ini bisa dilanjutkan pada ruang metrik yang lebih umum, misalnya ruang metrik dengan himpunan kabur $S \times S \times S \times (0, \infty)$.

DAFTAR PUSTAKA

Alaca, C. dkk. (2008). *On compatible mappings of type (I) and (II) in intuitionistic fuzzy metric spaces*. Korean Math. Soc. 23, No.3, pp. 427-446

Aphane, M. (2009). *On some results of analysis in metric spaces and fuzzy metric spaces*. Thesis. University of South Africa.

Jha, K. (2013). *A fixed point theorems for semi Compatible Maps in Intuitionistic Fuzzy Metric Space*. Kathmandu University Journal of Science, Engineering and Technology. Vol9, no.1, 83-89

Karim M. A. dkk. (2012). *Kriteria Kekonvergenan Cauchy pada Ruang Metrik Kabur Intuitionistic*. Vol.6, no.1, 9-16

Kouikoglou V. S. & Phillis Y. A. (2009). *Fuzzy Measurement of sustainability*. New York.

Manuharawati. (2003). *Analisis Real*. Departemen pendidikan nasional: Surabaya.

Muralisankar, S. & Kalpana G. (2009). *Comon fixed point Theorems in Intuitionistic Fuzzy Metric Space Using General Contractive Condition of Integral Type*. Int J Contemp. Math. Sciences, Vol4, no.11, 505-518

Samanta T. K. & Mohinta S. (2011). *On fixed point Theorems in Intuitionistic Fuzzy Metric Space I*. Gen. Math. Notes, Vol3, no.2, 1-12

Singh M. R. & Singh Y. M. (2011). *On various types of Compatible Maps and Common Fixed Point Theorems for non-continuous maps*. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. Vol40(4), 503-513

<http://mathworld.wolfram.com/NondecreasingFunction.html>, diakses pada Senin, 11 Agustus 2014

<http://mathworld.wolfram.com/NonIncreasingFunction.html>, diakses pada Senin, 11 Agustus 2014

<http://mathworld.wolfram.com/BinaryOperation.html>, diakses pada Senin, 11 Agustus 2014