

PERAMBATAN GELOMBANG MONOKROMATIK PADA DASAR BERUNDAK

Ulil Iffah

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,
e-mail: ulil_iffah@yahoo.com

Abstrak

Gelombang monokromatik adalah gelombang yang memiliki amplitudo, panjang gelombang, dan cepat rambat yang konstan selama penjalarnya. Perambatan gelombang monokromatik pada dasar berundak dikembangkan berdasarkan pengamatan perambatan gelombang monokromatik pada dasar rata. Pada skripsi ini undakan dibatasi hanya pada undakan dengan permukaan yang berbentuk rata. Pada dasarnya, suatu gelombang yang melewati dasar dengan kedalaman berbeda akan terpecah menjadi dua bagian yaitu gelombang transmisi dan gelombang refleksi. Metode pemisahan peubah digunakan untuk menyelesaikan Persamaan Laplace untuk gelombang monokromatik. Berdasarkan hasil analitik menunjukkan bahwa amplitudo gelombang transmisi akan maksimum jika perbedaan kedalaman semakin besar.

Kata kunci: Gelombang monokromatik, metode pemisahan peubah, gelombang transmisi, Gelombang refleksi,.

Abstract

Monochromatic waves is waves which have amplitude, waves length, and constant velocity on the circuit. Wave propagation over a bump can be extended by wave propagation over a flat bottom. Variable separation method is applied to Laplace equation for monochromatic waves. The amplitude of the transmitted and reflected waves are determined by continuing of the water surface and the flux passing of the bottom topography. The shallowest bump will produce maximum of transmitted wave amplitude.

Keywords: Monochromatic wave, variable separation method, transmitted wave, reflected wave.

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fluida adalah suatu zat yang mempunyai kemampuan berubah-ubah secara kontinu apabila mengalami geseran, atau mempunyai reaksi terhadap tegangan geser sekecil apapun. Dalam keadaan diam atau keadaan keseimbangan fluida tidak mampu menahan gaya geser yang bekerja padanya, oleh sebab itu fluida mudah berubah bentuk tanpa pemisahan massa.

Penurunan persamaan dasar fluida harus memenuhi syarat kontinuitas massa. Syarat ini tidak lain adalah ungkapan dari hukum kekekalan massa, sehingga dikenal sebagai persamaan kontinuitas. Persamaan kontinuitas hanya berlaku jika fluida yang ditinjau adalah fluida ideal. Sebagai contoh fluida ideal adalah air.

Fluida ideal adalah fluida yang memiliki sifat tak termampatkan (*incompressible*) dengan rapat massa yang homogen, gerak partikel fluida yang tak berotasi (*irrotational*), dan tidak adanya efek kekentalan (*inviscid*). Oleh karena itu, dalam skripsi ini diasumsikan

bahwa fluida yang ditinjau adalah fluida ideal. Berdasarkan persamaan dasar fluida ideal ini akan diturunkan persamaan gerak gelombang di permukaan fluida.

Gelombang adalah sesuatu yang terjadi apabila suatu system diganggu dari posisi kesetimbangannya dan apabila gangguan itu dapat berjalan atau merambat dari satu daerah sistem itu ke daerah lainnya. Salah satu contoh gelombang pada permukaan fluida adalah gelombang air dangkal.

Gelombang air dangkal adalah gelombang yang terjadi pada permukaan air dangkal dimana panjang gelombangnya cukup besar dibandingkan kedalamannya. Secara matematik gelombang air dangkal dapat di modelkan dalam persamaan diferensial parsial. Untuk mengetahui dinamika dari fenomena gelombang air dangkal dilakukan dengan mencari solusi dari persamaan diferensial parsial tersebut.

Gelombang monokromatik adalah gelombang yang memiliki amplitudo (A), panjang gelombang (ω) dan cepat rambat (v) yang konstan selama penjalarnya

(Widjojo,2010). Banyak fenomena-fenomena gelombang monokromatik yang muncul dalam kehidupan sehari-hari, misalnya gelombang laut, gelombang suara, dan gelombang cahaya.

Adapun skripsi ini membahas perambatan gelombang monokromatik dengan dasar berundak. Berundak dalam hal ini adalah terjadinya perubahan kedalaman air dari dalam ke dangkal, atau sebaliknya. Pada dasarnya, suatu gelombang yang melewati dasar dengan kedalaman berbeda akan terpecah menjadi dua bagian yaitu gelombang yang diteruskan (gelombang transmisi) dan gelombang yang dipantulkan (gelombang refleksi).

Pemodelan matematika untuk perambatan gelombang melalui dasar tak rata diperoleh melalui persamaan Laplace beserta syarat awal dan syarat batasnya. Persamaan Laplace pada skripsi ini diselesaikan dengan metode pemisahan peubah. Pada akhirnya, pemodelan matematika ini memberikan suatu koefisien transmisi dan refleksi. Koefisien ini memberikan gambaran seberapa besar dasar tak rata tersebut mampu mereduksi amplitudo gelombang.

Terinspirasi oleh sebuah artikel dari Wiryanto (2013) yang berjudul, *Monochromatic Wave Propagating Over A Step*, yang mana dalam artikel tersebut dibahas perambatan gelombang monokromatik pada fluida ideal di mana terdapat sebuah gundukan pada dasar fluida. Penulis tertarik untuk memahami perambatan gelombang monokromatik pada dasar berundak dengan mengubah nilai frekuensi (ω) dan amplitudo (A) nya, sehingga perambatan gelombang monokromatik pada fluida dengan dasar berundak menjadi pokok permasalahan pada skripsi ini.

2. KAJIAN PUSTAKA

2.1 Gelombang Transmisi Dan Refleksi

Bila suatu gelombang datang pada suatu permukaan batas yang memisahkan dua daerah dengan laju gelombang yang berbeda, maka sebagian gelombang akan dipantulkan (refleksi) dan sebagian lain akan ditransmisikan. Pada proses pemantulan dan pembiasan gelombang dapat terpolarisasi sebagian atau seluruhnya oleh refleksi. Fresnel menyelidiki dan merumuskan suatu persamaan koefisien refleksi dan koefisien transmisi yang dihasilkan oleh pemantulan dan pembiasan (Pedrotti, 1993).

1. Transmisi gelombang merupakan sisa energi gelombang setelah melewati/menembus suatu struktur penahan gelombang. Gelombang transmisi sangat dipengaruhi pada karakteristik gelombang. Koefisien transmisi (t) adalah perbandingan amplitudo gelombang yang ditransmisikan dibandingkan amplitudo gelombang datang.
2. Pemantulan gelombang (Refleksi), terjadi pada saat sebuah gelombang yang merambat dalam suatu media sampai di bidang batas medium tersebut dengan media lainnya. Dengan demikian, Pemantulan (refleksi)

sebuah gelombang adalah bidang batas antara dua medium yang berbeda. Koefisien refleksi (r) adalah perbandingan amplitudo gelombang pantul dibandingkan amplitudo gelombang datang.

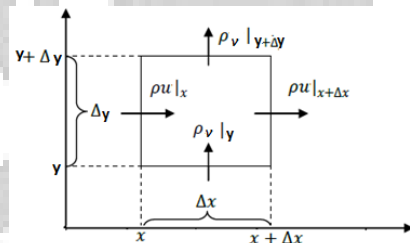
2.2 Persamaan Dasar Fluida

Dalam menurunkan persamaan dasar fluida diperlukan hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum. Selain itu, juga digunakan asumsi-asumsi antara lain :

1. Fluida yang digunakan adalah fluida ideal.
2. Gaya gesek air dengan udara diabaikan.
3. Tekanan udara konstan.
4. Permukaan dasar fluida diasumsikan rata.

Hukum kekekalan massa pada suatu sistem dinyatakan secara sederhana sebagai laju perubahan massa dalam elemen luas sama dengan selisih antara massa yang masuk dengan massa yang keluar pada elemen luas tersebut.

Misalkan gerak partikel fluida dinyatakan dalam dua dimensi dengan kecepatan partikel dalam arah horizontal dan vertikal berturut-turut adalah u dan v . Fluida mempunyai rapat massa $\rho(x, y, t)$ dengan x , y dan t berturut-turut menyatakan koordinat horizontal, koordinat vertikal, dan waktu, $x, t, y \in \mathfrak{R}$.



Gambar 2.1: Laju Perubahan Massa

Keterangan gambar :

- x dan y = koordinat horizontal dan koordinat vertikal.
- Δx dan Δy = pertambahan koordinat horizontal dan pertambahan koordinat vertikal.
- u dan v = kecepatan partikel arah horizontal dan kecepatan partikel arah vertikal.
- ρ = rapat massa.

Pada gambar 2.1, $\rho u|_x$ dan $\rho u|_{x+\Delta x}$ masing-masing menyatakan massa yang masuk dan massa yang keluar dari arah horizontal per satuan waktu. Sedangkan, $\rho v|_y$ dan $\rho v|_{y+\Delta y}$ masing-masing menyatakan massa yang masuk dan massa yang keluar dari arah vertikal per satuan waktu. Berdasarkan hukum kekekalan massa, laju perubahan massa dalam elemen luas pada gambar 2.1 dapat ditulis sebagai berikut :

$$\Delta x \Delta y \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho u|_x \Delta y + \rho v|_y \Delta x - \rho u|_{x+\Delta x} \Delta y - \rho v|_{y+\Delta y} \Delta x \quad (2.9)$$

$$\Delta x \Delta y \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta y (\rho u|_x - \rho u|_{x+\Delta x}) + \Delta x (\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{(\rho u|_x - \rho u|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{(\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y})}{\Delta y}$$

untuk $\Delta x \rightarrow 0$ dan $\Delta y \rightarrow 0$, maka :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\rho u|_x - \rho u|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y})}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}$$

Jika $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ dan dimisalkan q adalah vektor kecepatan dengan $q = \langle u, v \rangle$, serta notasi turunan total terhadap waktu adalah :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

maka :

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot q) \quad (2.10)$$

Diasumsi fluida tak termampatkan, yaitu fluida yang mengalir tanpa perubahan volume atau massa jenis, maka diperoleh :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.11)$$

sehingga dari persamaan (2.10) diperoleh :

$$\nabla \cdot q = 0 \quad (2.12)$$

Persamaan (2.11) dan (2.12) dapat dituliskan menjadi :

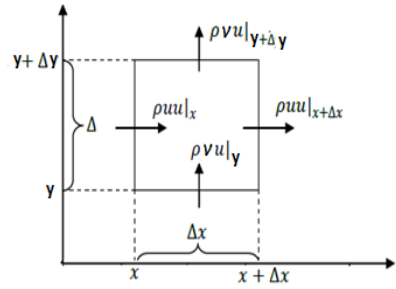
$$\rho_t + u \rho_x + v \rho_y = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.14)$$

Persamaan (2.13) dan (2.14) disebut persamaan kontinuitas fluida yang tak termampatkan.

Selanjutnya, hukum kekekalan momentum dinyatakan sebagai laju perubahan momentum sama dengan selisih antara momentum yang masuk dengan momentum yang keluar ditambah gaya-gaya yang bekerja pada elemen luasnya.

Untuk menyatakan hukum kekekalan momentum tersebut secara matematis, elemen luas akan dipandang dalam dua komponen yaitu komponen- x dan komponen- y yang masing-masing ditunjukkan pada gambar 2.2 dan gambar 2.3.



Gambar 2.2: Perubahan momentum pada arah- x

Keterangan gambar :

- x dan y = koordinat horizontal dan koordinat vertikal.
- Δx dan Δy = pertambahan koordinat horizontal dan pertambahan koordinat vertikal.
- u dan v = kecepatan partikel arah horizontal dan kecepatan partikel arah vertikal.
- ρ = rapat massa.

Dari gambar 2.2, dapat diketahui bahwa laju perubahan momentum pada komponen- x adalah :

$$\Delta x \Delta y \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \Delta y (\rho u u|_x - \rho u u|_{x+\Delta x}) + \Delta x (\rho v v|_y - \rho v v|_{y+\Delta y}) + \Delta y (P|_x - P|_{x+\Delta x}) \quad (2.15)$$

dengan $\Delta y (P|_x - P|_{x+\Delta x})$ menyatakan jumlah gaya yang bekerja pada komponen- x dan P adalah tekanan.

Jika kedua ruas dibagi dengan $\Delta x \Delta y$, maka :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \frac{(\rho u u|_x - \rho u u|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{(\rho v v|_y - \rho v v|_{y+\Delta y})}{\Delta y} + \frac{(P|_x - P|_{x+\Delta x})}{\Delta x}$$

untuk $\Delta x \rightarrow 0$ dan $\Delta y \rightarrow 0$, maka :

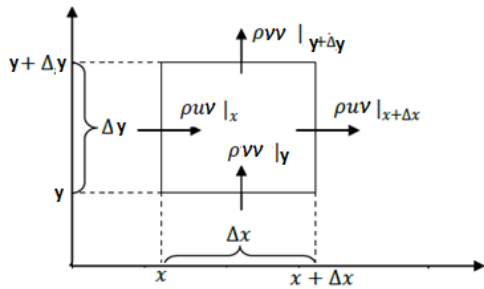
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\rho u u|_x - \rho u u|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\rho v v|_y - \rho v v|_{y+\Delta y})}{\Delta y} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(P|_x - P|_{x+\Delta x})}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}$$

Dengan menggunakan asumsi fluida tak termampatkan dan persamaan kontinuitas fluida tak termampatkan, maka :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.16)$$

Sedangkan untuk laju perubahan momentum dalam elemen fluida pada arah y ditunjukkan dalam gambar 2.3 dibawah ini :



Gambar 2.3: Perubahan momentum pada arah-
y

Keterangan gambar :

- x dan y = koordinat horizontal dan koordinat vertikal.
- Δx dan Δy = pertambahan koordinat horizontal dan pertambahan koordinat vertikal.
- u dan v = kecepatan partikel arah horizontal dan kecepatan partikel arah vertikal.
- ρ = rapat massa.

Sehingga Laju perubahan momentum pada komponen- y adalah :

$$\Delta x \Delta y \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = \Delta y(\rho u v|_x - \rho u v|_{x+\Delta x}) + \Delta x(\rho v v|_y - \rho v v|_{y+\Delta y}) + \Delta x(P|_y - P|_{y+\Delta y}) + \rho g \Delta x \Delta y \quad (2.17)$$

Dengan $\Delta x(P|_y - P|_{y+\Delta y}) + \rho g \Delta x \Delta y$ merupakan gaya yang bekerja pada komponen- y dan g menyatakan percepatan gravitasi. Jika kedua ruas dibagi dengan $\Delta x \Delta y$, maka :

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = \frac{(\rho u v|_x - \rho u v|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{(\rho v v|_y - \rho v v|_{y+\Delta y})}{\Delta y} + \frac{(P|_y - P|_{y+\Delta y})}{\Delta y} + \rho g$$

untuk $\Delta x \rightarrow 0$ dan $\Delta y \rightarrow 0$, maka :

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\rho u v|_x - \rho u v|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\rho v v|_y - \rho v v|_{y+\Delta y})}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(P|_y - P|_{y+\Delta y})}{\Delta y} + \rho g$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g$$

diasumsikan fluida tak termampatkan, maka :

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g \quad (2.18)$$

Persamaan (2.16) dan (2.18) dapat ditulis menjadi :

$$\rho(u_t + uu_x + vv_y) + P_x = 0 \quad (2.19)$$

$$\rho(v_t + uv_x + vv_y) + P_y + \rho g = 0 \quad (2.20)$$

Berdasarkan asumsi fluida irrotational, maka terdapat fungsi ϕ yang merupakan potensial kecepatan yang memenuhi $q = \nabla \phi$, sehingga dari persamaan (2.12) diperoleh :

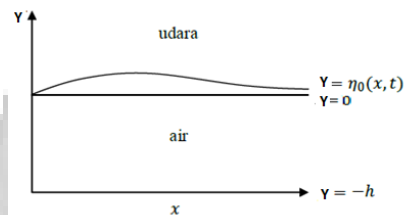
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.21)$$

2.3 Syarat Batas

Masalah pada aliran fluida merupakan pemecahan permasalahan diferensial parsial terhadap bidang ataupun terhadap waktu. Syarat batas diperlukan untuk dapat menyelesaikan model yang ada. Terdapat dua jenis syarat batas dalam fluida, yaitu syarat batas kinematik dan syarat batas dinamik.

Syarat Batas Kinematik

Syarat batas kinematik adalah syarat batas yang muncul karena gerak dari partikel fluida itu sendiri. Perhatikan gambar berikut :



Gambar 2.4: Batas-batas fluida bebas

Pada gambar 2.4, dimisalkan (x, y) menyatakan posisi partikel fluida, $y = -h$ merupakan permukaan dasar fluida, dan pada $y = 0$ merupakan posisi kesetimbangan (posisi keadaan tidak terganggu). Selanjutnya, misal kurva $y = \eta_0(x, t)$ merupakan batas atas permukaan atau kurva yang membatasi air dan udara, sehingga $S(x, y, t) \equiv \eta_0(x, t) - y = 0$ adalah persamaan permukaan. Jadi dari persamaan permukaan $S(x, y, t)$ tersebut diperoleh persamaan :

$$\eta_{0t} + \eta_{0x} \phi_x - \phi_y = 0 \quad \text{di } y = \eta_0(x, t) \quad (2.22)$$

Persamaan (2.22) disebut syarat batas kinematik pada permukaan fluida. Sedangkan syarat batas kinematik pada dasar fluida yang rata adalah :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{di } y = -h \quad (2.23)$$

2. Syarat Batas Dinamik

Syarat batas dinamik terjadi karena adanya gaya-gaya yang bekerja pada fluida. Syarat batas dinamik diperoleh dari persamaan dasar fluida (2.19) dan (2.20). Sehingga syarat batas dinamik fluida adalah :

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + g \eta_0 \quad \text{di } y = \eta_0(x, t) \quad (2.24)$$

Syarat batas dinamik ini hanya berlaku pada permukaan saja, persamaan ini diturunkan dengan asumsi fluida tak kental (inviscid) dan tekanan permukaan diabaikan.

Dari persamaan (2.21)-(2.24) diatas, dapat disimpulkan bahwa persamaan-persamaan batas fluida yang diperoleh adalah :

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad , -h \leq y \leq \eta_0(x,t) \quad (2.25a)$$

$$\eta_{0t} + \phi_x \eta_{0x} - \phi_y = 0 \quad , y = \eta_0(x,t) \quad (2.25b)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + g \eta_0 = 0 \quad , y = \eta_0(x,t) \quad (2.25c)$$

$$\phi_y = 0 \quad , y = -h \quad (2.25d)$$

Untuk menyederhanakan permasalahan kita terkait penyelesaian Persamaan Laplace, kita menggunakan model linier dari kondisi batas yang telah kita peroleh di atas, sehingga menjadi :

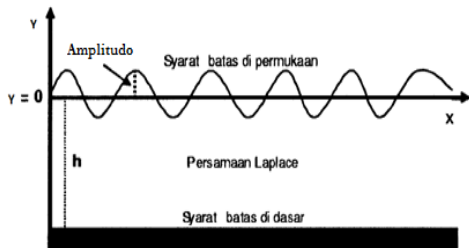
$$\left. \begin{aligned} \eta_t - \phi_y &= 0 \\ \phi_t + g\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pada } y = 0$$

$$\phi_y = 0 \text{ pada } y = -h$$

2.4 Gelombang Monokromatik

Gelombang monokromatik adalah gelombang yang mempunyai amplitudo, panjang gelombang dan cepat rambat yang konstan selama penjarannya. Gelombang ini jarang dijumpai di alam karena gelombang yang ada biasanya kompleks, tidak linier, tiga dimensi, bentuk random, untuk pendekatan dipakai teori gelombang amplitude kecil (airy), yang diturunkan berdasar persamaan Laplace untuk aliran tidak rotasi (irrotational flow) dengan kondisi batas muka air dan dasar laut. (Widjojo, 2010).

1. Model Matematika dari Gelombang Monokromatik Pada Dasar Rata.



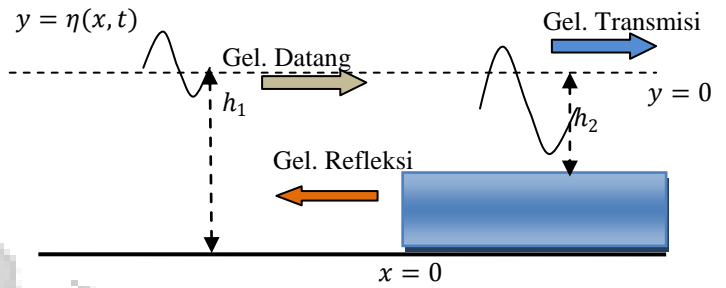
Gambar 2.1 Sketsa gelombang dengan dasar rata. Koordinat kartesius dengan sumbu x - axis tidak dipengaruhi oleh ketinggian permukaan air. Dan sumbu y tegak lurus sumbu x. saluran bawah datar/ rata, dengan kedalaman air h. perambatan gelombang monokromatik pada permukaan air pada dasar rata dinyatakan dengan

$$\eta(x,t) = A e^{-i(kx - \omega t)} \quad (2.26)$$

Dengan A adalah amplitudo, k adalah bilangan gelombang, w adalah frekuensi dan $i = \sqrt{-1}$.

2. Model Matematika dari Perambatan Gelombang Monokromatik pada Dasar Berundak

Masalah yang dirumuskan di sini adalah perambatan gelombang air, dari kiri ke kanan pada undakan, yang di ilustrasikan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Sketsa gelombang dengan dasar berundak. Dengan menggunakan koordinat kartesius, sumbu-x dipilih sepanjang tingkat yang tidak terganggu dari permukaan air, dan sumbu-y tegak lurus terhadap sumbu x. Perubahan kedalaman air dari h_1 ke h_2 , pada $x = 0$. Gelombang monokromatik ω frekuensi, dan bilangan gelombang terkait k_2 , biasanya terjadi pada undakan. Pada dasarnya, suatu gelombang yang melewati dasar dengan kedalaman berbeda akan terpecah menjadi dua bagian yaitu gelombang transmisi dan gelombang refleksi. Persentase gelombang yang dipantulkan dan ditransmisikan tergantung pada ketinggian undakan. Transmisi gelombang dan refleksi gelombang monokromatik yang terjadi secara berturut-turut dapat dituliskan dalam persamaan $\eta(x,t) = A_t \cdot e^{-i(k_t x - \omega t)}$ dan $\eta(x,t) = A_r \cdot e^{-i(kx - \omega t)}$. Berdasar gambar 2.2, untuk kondisi $x < 0$ maka gelombang monokromatik terdiri dari dua gelombang yaitu gelombang datang dan gelombang refleksi sehingga persamaan gelombang monokromatik dapat ditulis sebagai penjumlahan antara kedua gelombang tersebut yaitu $\eta(x,t) = A \cdot e^{-i(kx - \omega t)} + A_r \cdot e^{-i(-kx - \omega t)}$. Selain itu, setelah melewati gundukan, hanya ada satu jenis gelombang yaitu gelombang transmisi maka untuk kondisi $x > 0$ gelombang monokromatik hanya terdiri dari gelombang transmisi sehingga persamaan gelombang monokromatik dapat ditulis sebagai persamaan gelombang transmisi yaitu $\eta(x,t) = A_t \cdot e^{-i(-k_t x - \omega t)}$. Oleh karena itu, keseluruhan gelombang monokromatik yang merambat dapat dituliskan dalam persamaan di bawah ini :

$$\eta(x,t) = \begin{cases} A \cdot e^{-i(kx - \omega t)} + A_r \cdot e^{-i(-kx - \omega t)}, & x < 0 \\ A_t \cdot e^{-i(k_t x - \omega t)}, & x > 0 \end{cases}$$

Keterangan :

- A : Amplitudo gelombang
- A_r : Amplitudo gelombang refleksi
- A_t : Amplitudo gelombang transmisi
- k : Bilangan gelombang pada $y = -h_1$
- k_t : Bilangan gelombang pada $y = -h_2$
- ω : Frekuensi gelombang

Di daerah di mana interaksi gelombang terjadi, bilangan gelombang datang refleksi sama tetapi tanda yang berbeda, untuk menunjukkan arah gelombang kanan atau ke kiri

3. PEMBAHASAN

3.1 Penyelesaian Model Linear Gelombang Monokromatik Dasar Rata

Pada bab II diperoleh persamaan-persamaan dasar fluida yaitu :

$$\left. \begin{aligned} \eta_t - \phi_y &= 0 \\ \phi_t + g\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \text{pada } y = 0$$

$$\phi_y = 0 \text{ pada } y = -h$$

Dengan menggunakan metode separasi variabel, maka $\phi(x, y, t)$ kita separasi menjadi hasil perkalian dua buah fungsi $S(x, t)$ dan $F(y)$ sehingga $\phi(x, y, t) = S(x, t)F(y)$. Dari syarat batas $\phi_t + g\eta = 0$ pada $y = 0$. Maka :

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} F(0) + g\eta(x, t) = 0$$

$$S_t(x, t) = -\frac{g}{F(0)} \eta(x, t)$$

Dengan cara mengintegrasikan kedua ruas kita peroleh :

$$\int S_t(x, t) dt = -\frac{g}{F(0)} \int \eta(x, t) dt$$

$$S(x, t) = -\frac{g}{F(0)} \left(\frac{1}{i\omega} \eta(x, t) + K \right)$$

Dengan syarat batas $\eta_t - \phi_y = 0$ pada $y = 0$, maka :

$$\eta_t(x, t) - S(x, t)F'(0) = 0$$

$$S(x, t) = \frac{\eta_t(x, t)}{F'(0)}$$

Dengan $\eta_t(x, t) = A(i\omega)e^{-i(kx-\omega t)}$, maka :

$$S(x, t) = \frac{(i\omega)Ae^{-i(kx-\omega t)}}{F'(0)}$$

$$S(x, t) = \frac{i\omega}{F'(0)} \eta(x, t) \quad (4.2)$$

Untuk mempermudah perhitungan, ambil $F(0) = 1$. Dengan menyelesaikan persamaan (4.1) dan (4.2) diperoleh :

$$\frac{-g}{i\omega} \eta(x, t) - gK = \frac{i\omega}{F'(0)} \eta(x, t)$$

$$\left(\frac{-g}{i\omega} - \frac{i\omega}{F'(0)} \right) \eta(x, t) - gK = 0$$

Koefisien $\eta(x, t) : \frac{-g}{i\omega} = \frac{i\omega}{F'(0)}$, sehingga diperoleh

$$F'(0) = \frac{\omega^2}{g}$$

Koefisien $\eta^0(x, t) : -gK = 0$, maka $K = 0$

Substitusi $F'(0) = \frac{\omega^2}{g}$ dan $K = 0$ ke persamaan (4.2), sehingga diperoleh :

$$S(x, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t)$$

Dari persamaan laplace $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$, maka :

$$S_{xx}(x, t)F(y) + S(x, t)F_{yy}(y) = 0$$

$$\frac{S_{xx}(x, t)}{S(x, t)} = -\frac{F_{yy}(y)}{F(y)} = \alpha$$

Dengan mengambil dua ruas kanan, maka :

$$F_{yy}(y) = -\alpha F(y)$$

$$F_{yy}(y) + \alpha F(y) = 0$$

Solusi tak trivial ada kalau $\alpha < 0$, sebut $\alpha = -p^2$

$$F_{yy}(y) - p^2 F(y) = 0$$

Maka dapat diperoleh solusi umum

$$F(y) = C_1 e^{py} + C_2 e^{-py}$$

$$F'(y) = pC_1 e^{py} - pC_2 e^{-py}$$

Dengan $F(0) = 1$ dan $F'(0) = \frac{\omega^2}{g}$, maka:

$$F(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$F'(0) = pC_1 - pC_2 = \frac{\omega^2}{g}$$

Dengan mensubstitusi dan mengeliminasi, dapat di peroleh C_1 dan C_2 sebagai berikut:

$$C_1 = \frac{p + \frac{\omega^2}{g}}{2p}$$

$$C_2 = \frac{p - \frac{\omega^2}{g}}{2p}$$

Substitusi C_1 dan C_2 ke persamaan (4.4), maka diperoleh :

$$F(y) = \frac{1}{2} (e^{py} + e^{-py}) + \frac{\omega^2}{2gp} (e^{py} - e^{-py})$$

$$(4.1) F(y) = \cosh(py) + \frac{\omega^2}{gp} \sinh(py)$$

Berdasarkan (4.3) dan (4.5), maka :

$$\phi(x, y, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) F(y)$$

Sehingga dapat kita peroleh fungsi potensial sebagai berikut :

$$\phi(x, y, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[\cosh(py) + \frac{\omega^2}{gp} \sinh(py) \right]$$

Dari syarat batas $\phi_y(x, y, t) = 0$ pada $y = -h_2$, maka :

$$\phi_y(x, y, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[p \sinh(py) + \frac{\omega^2}{gp} p \cosh(py) \right] = 0$$

$$\sinh(py) + \frac{\omega^2}{gp} \cosh(py) = 0$$

$$\omega^2 = -gp \frac{\sinh(py)}{\cosh(py)}$$

$$\omega^2 = gp \frac{\sinh(ph_2)}{\cosh(ph_2)} \text{ pada } y = -h_1$$

$$\omega^2 = gp \tanh(ph_1)$$

Misalkan $p = k$

$$\frac{S_{xx}(x, t)}{S(x, t)} = \alpha$$

$$S_{xx}(x, t) - \alpha S(x, t) = 0, \quad \alpha = -p^2$$

Dimana $S_{xx}(x, t)$ turunan kedua dari persamaan

$$S(x, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t)$$

$$S(x, t) = \frac{ig}{\omega} A e^{-i(kx-\omega t)}$$

$$S_x(x, t) = \frac{g}{\omega} k A e^{-i(kx-\omega t)}$$

$$S_{xx}(x, t) = \frac{-ig}{\omega} k^2 \eta(x, t)$$

Substitusi persamaan(4.3) dan (4.9) ke persamaan (4.8), diperoleh :

$$S_{xx}(x, t) + p^2 S(x, t) = 0$$

$$\frac{-ig}{\omega} k^2 \eta(x, t) + p^2 \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) = 0$$

$$p^2 \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) = \frac{ig}{\omega} k^2 \eta(x, t) \Leftrightarrow k = p$$

Maka persamaan (4.7) dapat kita tulisakan menjadi

$$\omega^2 = gk \tanh(kh_1)$$

Persamaan (4.10) dikenal dengan persamaan dispersi gelombang. Dengan ω merupakan frekuensi gelombang yang selalu bernilai positif, sehingga persamaan (4.10) dapat dituliskan menjadi :

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kh_1)}$$

Dalam kasus gelombang panjang yang relatif lama dibandingkan dengan kedalaman air, Fungsi hiperbolik tangen dapat diperkirakan secara linear sebagai kh , dan karena itu di dapat

$$k = \pm \frac{\omega}{\sqrt{gh_1}}$$

Dari persamaan (4.6)-(4.12) diatas, dapat disimpulkan bahwa persamaan fungsi potensial yang diperoleh adalah :

$$\phi(x, y, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[\cosh\left(\pm \frac{\omega\sqrt{h_1}}{\sqrt{g}}\right) + \frac{\omega^2}{\left(\pm \frac{\omega\sqrt{g}}{\sqrt{h_1}}\right)} \sinh\left(\pm \frac{\omega\sqrt{h_1}}{\sqrt{g}}\right) \right] = 0$$

3.2 Penyelesaian Gelombang Monokromatik pada Dasar Berundak

Dalam kenyataan fluida senantiasa mengalir, yang berarti bahwa gelombang monokromatik harus kontinu. Berdasar definisi kekontinuan maka persamaan gelombang monokromatik dasar berundak

$\eta(x, t) = \begin{cases} A_r e^{-i(kx-\omega t)} + A_t e^{-i(-kx-\omega t)}, & x < 0 \\ A_t e^{-i(k_t x - \omega t)}, & x > 0 \end{cases}$ dapat didekati dengan limit kanan dan limit kiri yang menuju ke 0 sehingga secara matematika kita mendapatkan hubungan sebagai berikut :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \eta(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta(x, t)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (A_r e^{-i(kx-\omega t)} + A_t e^{-i(-kx-\omega t)}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} A_t e^{-i(k_t x - \omega t)}$$

$$A_r e^{-i(-\omega t)} + A_t e^{-i(-\omega t)} = A_t e^{-i(-\omega t)}$$

$$(A_r + A_t) e^{-i(-\omega t)} = A_t e^{-i(-\omega t)}$$

Sehingga kita peroleh hubungan :

$$A_r + A_t = A_t \tag{4.14}$$

Kondisi berikutnya adalah bahwa fluk massa Q bersifat kontinu. Secara matematis, fluk sama dengan perkalian kecepatan dengan kedalaman. Maka fluk massa yang melintasi daerah $x < 0$ dengan kecepatan untuk kedalaman rata-rata h_1 adalah :

$$Q_1 = \int_{-h_1}^0 \phi_x dy$$

Dimana :

$$\phi(x, y, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[\cosh(ky) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(ky) \right]$$

$$\phi_x(x, y, t) = \frac{ig}{\omega} \eta_x(x, t) \left[\cosh(ky) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(ky) \right]$$

$$\eta_x(x, t) = \begin{cases} -ik A_r e^{-i(kx-\omega t)} + ik A_t e^{-i(-kx-\omega t)}, & x < 0 \\ -ik_t A_t e^{-i(k_t x - \omega t)}, & x > 0 \end{cases}$$

Sehingga diperoleh :

$$Q_1 = \int_{-h_1}^0 \phi_x dy$$

$$Q_1 = \frac{ig}{\omega k} \eta_x(x, t) \left[\sinh(kh_1) + \frac{\omega^2}{gk} (1 - \cosh(kh_1)) \right]$$

$$Q_1 = \frac{ig(4.11)}{\omega} (-i A_r e^{-i(kx-\omega t)} + i A_t e^{-i(-kx-\omega t)}) \left[\sinh(kh_1) + \frac{\omega^2}{gk} (1 - \cosh(kh_1)) \right]$$

Untuk kedalaman h_1 fluk massa adalah :

$$(4.12) \quad Q_2 = \int_{-h_2}^0 \phi_x dy$$

$$Q_2 = \frac{ig}{\omega k_t} \eta_x(x, t) \left[\sinh(k_t h_2) + \frac{\omega^2}{gk_t} (1 - \cosh(k_t h_2)) \right]$$

$$Q_2 = \frac{ig}{\omega} (-i A_t e^{-i(k_t x - \omega t)}) \left[\sinh(k_t h_2) + \frac{\omega^2}{gk_t} (1 - \cosh(k_t h_2)) \right]$$

Fluk massa yang masuk (Q_1) = Fluk massa yang keluar (Q_2). Secara matematis hubungan ini dapat dituliskan :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} Q_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} Q_2$$

$$-i(A_r - A_t) \left[\sinh(kh_1) + \frac{\omega^2}{gk} (1 - \cosh(kh_1)) \right] = -i A_t \left[\sinh(k_t h_2) + \frac{\omega^2}{gk_t} (1 - \cosh(k_t h_2)) \right]$$

Sehingga di peroleh persamaan :

$$(A_r - A_t) \left[\sinh(kh_1) + \frac{\omega^2}{gk} (1 - \cosh(kh_1)) \right] = A_t \left[\sinh(k_t h_2) + \frac{\omega^2}{gk_t} (1 - \cosh(k_t h_2)) \right]$$

Persamaan (4.15) dan (4.16) adalah persamaan dalam A_r dan A_t Dengan demikian kita dapat menghitung A_r dan A_t yaitu :

$$(A_r - A_t) \left[\sinh(kh_1) + \frac{\omega^2}{gk} (1 - \cosh(kh_1)) \right] = (A_r + A_t) \left[\sinh(k_t h_2) + \frac{\omega^2}{gk_t} (1 - \cosh(k_t h_2)) \right]$$

$$A_r \left[\sinh(kh_1) + \frac{\omega^2}{gk} (1 - \cosh(kh_1)) \right] - \left[\sinh(k_t h_2) + \frac{\omega^2}{gk_t} (1 - \cosh(k_t h_2)) \right] = A_t \left[\sinh(kh_1) + \frac{\omega^2}{gk} (1 - \cosh(kh_1)) \right] + \left[\sinh(k_t h_2) + \frac{\omega^2}{gk_t} (1 - \cosh(k_t h_2)) \right]$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti penyelesaian linier gelombang monokromatik pada dasar rata, maka pada kondisi $x < 0$ dapat di lihat sebagai gelombang monokromatik pada dasar rata

dengan ketinggian h_1 dan bilangan gelombang k sehingga diperoleh $\omega = \sqrt{gk \tanh(kh_1)}$ karena fungsi hiperbolik tangen dapat diperkirakan secara linear sebagai kh_1 maka $k = \pm \frac{\omega}{\sqrt{gh_1}}$. Dan pada kondisi $x > 0$ juga dapat lihat sebagai gelombang monokromatik pada dasar rata dengan ketinggian h_2 dan bilangan gelombang k_t sehingga diperoleh $\omega = \sqrt{gk_t \tanh(k_t h_2)}$ karena fungsi hiperbolik tangen dapat diperkirakan secara linear sebagai $k_t h_2$ maka $k_t = \pm \frac{\omega}{\sqrt{gh_2}}$. Sehingga diperoleh fungsi potensial gelombang monokromatik pada dasar berundak sebagai berikut :

$$\phi(x, y, t) = \begin{cases} \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[\cosh(kh_1) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(kh_1) \right] = 0, & x < 0 \\ \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[\cosh(k_t h_2) + \frac{\omega^2}{gk_t} \sinh(k_t h_2) \right] = 0, & x > 0 \end{cases}$$

3.3 Simulasi Perambatan Gelombang Monokromatik Dasar Rata

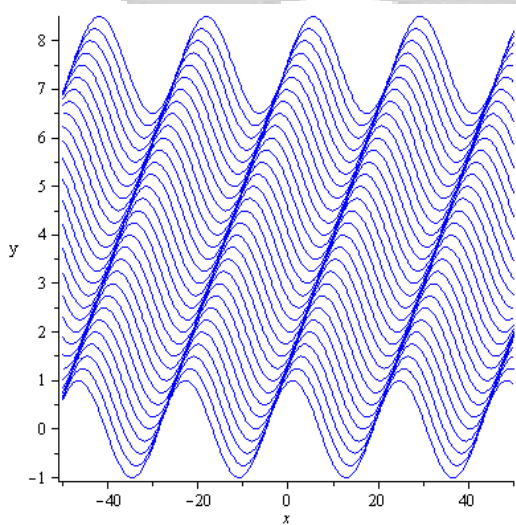
Persamaan perambatan gelombang monokromatik pada dasar rata, dinyatakan dengan :

$$\eta(x, t) = Ae^{-i(kx - \omega t)}$$

Dengan mengamati bagian riil, maka persamaan gelombang monokromatik menjadi :

$$\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Jika persamaan (4.18) dengan kedalaman $h_1 = 1.5$, frekuensi $\omega = 1$, $g = 10$ dan $k = 0.26483$ digambarkan 2D pada Maple 13, maka akan menghasilkan gambar 4.1 sebagai berikut :



Gambar 4.1 simulasi gelombang pada dasar rata dengan kedalaman $h_1 = 1.5$, frekuensi $\omega = 1$, $g = 10$ dan $k = 0.26483$

Dengan mengetahui kedalaman dan frekuensi gelombang, maka nilai bilangan gelombang dapat

dihitung. Lihat grafik 4.2 dan 4.3 di bawah. Grafik tersebut merupakan plot dari gelombang monokromatik untuk beberapa kondisi tertentu.

h_1	ω	k
0.50	0.50	0.2241
	1.00	0.4510
	1.50	0.6837
	2.00	0.9254
1.00	0.50	0.1588
	1.00	0.3216
	1.50	0.4929
	2.00	0.6778
1.50	0.50	0.1299
	1.00	0.2648
	1.50	0.4105
	2.00	0.5740
2.00	0.50	0.1127
	1.00	0.2313
	1.50	0.3627
	2.00	0.5162
2.50	0.50	0.1011
	1.00	(4.18) 0.2087
	1.50	0.3312
	2.00	0.4799

Tabel 4.1 kedalaman tetap

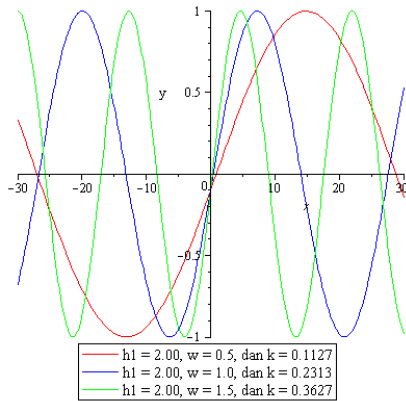
Pada kedalaman tertentu, diperoleh bilangan gelombang k membesar untuk ω yang membesar (perhatikan tabel 4.1).

ω	h_1	k
0.50	0.50	0.2241
	1.00	0.1588
	1.50	0.1299
	2.00	0.1127
	2.50	0.1011
1.00	0.50	0.4510
	1.00	0.3216
	1.50	0.2648
	2.00	0.2313
	2.50	0.2087
1.50	0.50	0.6837
	1.00	0.4929
	1.50	0.4105
	2.00	0.3627
	2.50	0.3312
2.00	0.50	0.9254
	1.00	0.6778

	1.50	0.5740
	2.00	0.5162
	2.50	0.4799

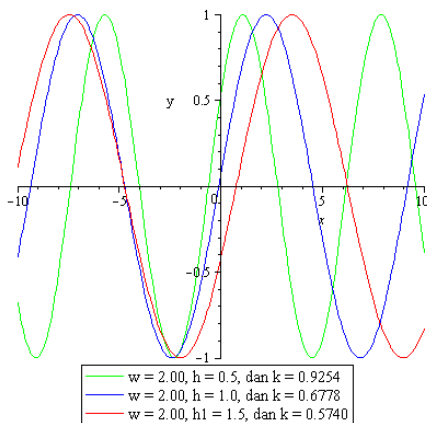
Tabel 4.2 Frekuensi Tetap

Pada ω tertentu, diperoleh bilangan gelombang k mengecil untuk h_1 yang membesar (perhatikan tabel 4.2).



Grafik 4.1 Gelombang monokromatik dengan kedalaman tetap

Saat kedalaman h_1 tetap dan ω diperbesar, maka dengan menggunakan tabel 4.1 (yang ditulis tebal) diperoleh k yang membesar. Karena k membesar, panjang gelombang yang dihasilkan adalah mengecil (grafik 4.1).



Grafik 4.2 Gelombang monokromatik dengan frekuensi tetap

Saat ω tetap dan kedalaman h_1 diperbesar, maka dengan menggunakan tabel 4.2 (yang ditulis tebal) diperoleh k mengecil. Karena k mengecil, panjang gelombang yang dihasilkan adalah membesar (grafik 4.2).

3.4 Simulasi Perambatan Gelombang Monokromatik Pada Dasar Berundak

Persamaan perambatan gelombang monokromatik pada dasar berundak :

$$\eta(x, t) = \begin{cases} A_r \cdot e^{-i(kx - \omega t)} + A_t \cdot e^{-i(-kx - \omega t)}, & x < 0 \\ A_t \cdot e^{-i(k_t x - \omega t)}, & x > 0 \end{cases}$$

Dengan mengamati bagian riil, maka persamaan gelombang monokromatik menjadi :

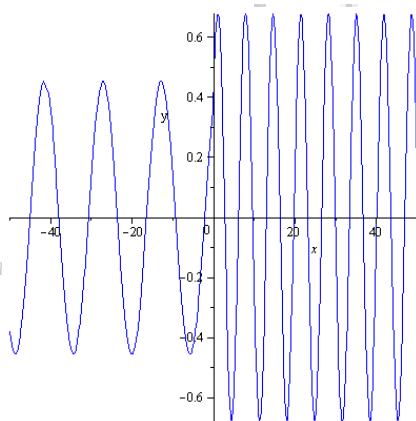
$$\eta(x, t) = \begin{cases} A_r \cdot \cos(kx - \omega t) + A_t \cdot \cos(-kx - \omega t), & x < 0 \\ A_t \cdot \cos(k_t x - \omega t), & x > 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Berikut adalah tabel beberapa kondisi gelombang pada dasar berundak dengan perbedaan kedalaman yang berbeda-beda :

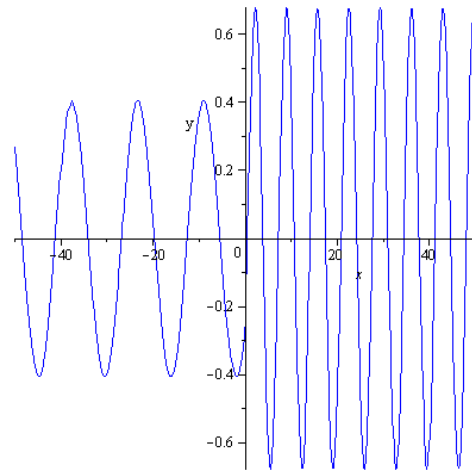
h_1	h_2	ω	A	k	k_t	A_r	A_t
3.5	0.05	2	0.5	0.4389	2.8379	0.3661	0.8661
3.5	0.10	2	0.5	0.4389	2.0134	0.3210	0.8210
3.5	0.15	2	0.5	0.4389	1.6495	0.2899	0.7899
3.5	0.20	2	0.5	0.4389	1.4333	0.2656	0.7656
3.5	0.25	2	0.5	0.4389	1.2864	0.2456	0.7456
3.5	0.30	2	0.5	0.4389	1.1783	0.2286	0.7286
3.5	0.35	2	0.5	0.4389	1.0946	0.2138	0.7138
3.5	0.40	2	0.5	0.4389	1.0275	0.2007	0.7007
3.5	0.45	2	0.5	0.4389	0.9720	0.1890	0.6890
3.5	0.50	2	0.5	0.4389	0.9254	0.1783	0.6783
3.5	0.55	2	0.5	0.4389	0.8854	0.1686	0.6686
3.5	0.60	2	0.5	0.4389	0.8506	0.1597	0.6597
3.5	0.65	2	0.5	0.4389	0.8201	0.1514	0.6514
3.5	0.70	2	0.5	0.4389	0.7931	0.1438	0.6438
3.5	0.75	2	0.5	0.4389	0.7689	0.1366	0.6366
3.5	0.80	2	0.5	0.4389	0.7471	0.1300	0.6300
3.5	0.85	2	0.5	0.4389	0.7274	0.1237	0.6237
3.5	0.90	2	0.5	0.4389	0.7094	0.1178	0.6178
3.5	0.95	2	0.5	0.4389	0.6930	0.1123	0.6123
3.5	1.00	2	0.5	0.4389	0.6778	0.1070	0.6070
3.5	1.05	2	0.5	0.4389	0.6639	0.1020	0.6020
3.5	1.10	2	0.5	0.4389	0.6510	0.0973	0.5973
3.5	1.15	2	0.5	0.4389	0.6390	0.0928	0.5928
3.5	1.20	2	0.5	0.4389	0.6278	0.0886	0.5886
3.5	1.25	2	0.5	0.4389	0.6174	0.0845	0.5845
3.5	1.30	2	0.5	0.4389	0.6076	0.0806	0.5806
3.5	1.35	2	0.5	0.4389	0.5984	0.0769	0.5769
3.5	1.40	2	0.5	0.4389	0.5898	0.0734	0.5734
3.5	1.45	2	0.5	0.4389	0.5817	0.0700	0.5700
3.5	1.50	2	0.5	0.4389	0.5740	0.0667	0.5667
3.5	1.55	2	0.5	0.4389	0.5668	0.0636	0.5636
3.5	1.60	2	0.5	0.4389	0.5600	0.0606	0.5606
3.5	1.65	2	0.5	0.4389	0.5535	0.0578	0.5578
3.5	1.70	2	0.5	0.4389	0.5473	0.0550	0.5550
3.5	1.75	2	0.5	0.4389	0.5415	0.0523	0.5523
3.5	1.80	2	0.5	0.4389	0.5359	0.0498	0.5498
3.5	1.85	2	0.5	0.4389	0.5306	0.0473	0.5473
3.5	1.90	2	0.5	0.4389	0.5256	0.0450	0.5450
3.5	1.95	2	0.5	0.4389	0.5208	0.0427	0.5427

3.5	2.00	2	0.5	0.4389	0.5162	0.0405	0.5405
3.5	2.05	2	0.5	0.4389	0.5118	0.0384	0.5384
3.5	2.10	2	0.5	0.4389	0.5076	0.0363	0.5363
3.5	2.15	2	0.5	0.4389	0.5036	0.0344	0.5344
3.5	2.20	2	0.5	0.4389	0.4998	0.0325	0.5325
3.5	2.25	2	0.5	0.4389	0.4961	0.0306	0.5306
3.5	2.30	2	0.5	0.4389	0.4926	0.0288	0.5288
3.5	2.35	2	0.5	0.4389	0.4892	0.0271	0.5271
3.5	2.40	2	0.5	0.4389	0.4860	0.0255	0.5255
3.5	2.45	2	0.5	0.4389	0.4829	0.0239	0.5239
3.5	2.50	2	0.5	0.4389	0.4799	0.0223	0.5223
3.5	2.55	2	0.5	0.4389	0.4770	0.0208	0.5208
3.5	2.60	2	0.5	0.4389	0.4742	0.0194	0.5194
3.5	2.65	2	0.5	0.4389	0.4716	0.0180	0.5180
3.5	2.70	2	0.5	0.4389	0.4690	0.0166	0.5166
3.5	2.75	2	0.5	0.4389	0.4666	0.0153	0.5153
3.5	2.80	2	0.5	0.4389	0.4642	0.0140	0.5140
3.5	2.85	2	0.5	0.4389	0.4619	0.0128	0.5128
3.5	2.90	2	0.5	0.4389	0.4597	0.0116	0.5116
3.5	2.95	2	0.5	0.4389	0.4576	0.0105	0.5105
3.5	3.00	2	0.5	0.4389	0.4556	0.0094	0.5094
3.5	3.05	2	0.5	0.4389	0.4536	0.0083	0.5083
3.5	3.10	2	0.5	0.4389	0.4518	0.0072	0.5072
3.5	3.15	2	0.5	0.4389	0.4499	0.0062	0.5062
3.5	3.20	2	0.5	0.4389	0.4482	0.0052	0.5052
3.5	3.25	2	0.5	0.4389	0.4465	0.0043	0.5043
3.5	3.30	2	0.5	0.4389	0.4448	0.0034	0.5034
3.5	3.35	2	0.5	0.4389	0.4433	0.0025	0.5025
3.5	3.40	2	0.5	0.4389	0.4417	0.0016	0.5016
3.5	3.45	2	0.5	0.4389	0.4403	0.0008	0.5008

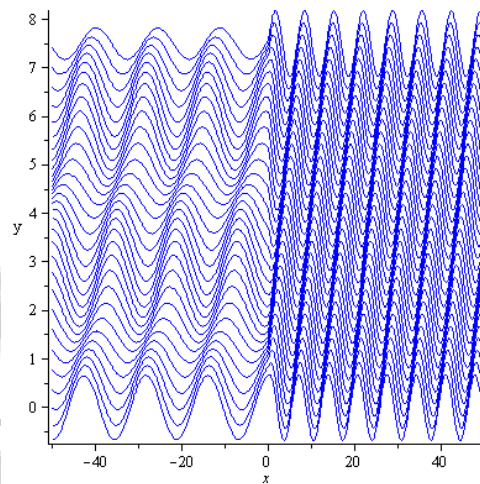
Tabel 4.1 beberapa kondisi gelombang pada dasar berundak



Gambar 4.2 simulasi gelombang pada dasar berundak dari kedalaman $h_1 = 3.5$ ke $h_2 = 0.50$ pada saat $t = 0.5$.

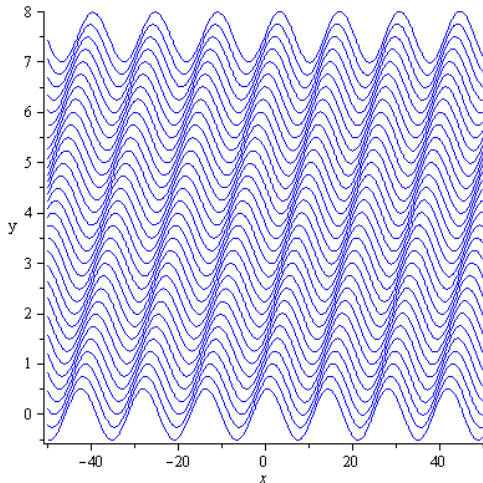


Gambar 4.3 simulasi gelombang pada dasar berundak dari kedalaman $h_1 = 3.5$ ke $h_2 = 0.50$ pada saat $t = 1$



Gambar 4.4 simulasi gelombang pada dasar berundak dari kedalaman $h_1 = 3.5$ ke $h_2 = 0.50$ pada berbagai pertambahan nilai t

Gambar 4.2 - 4.4 merupakan simulasi perambatan gelombang yang menggunakan beberapa parameter $g = 10$, $\omega = 0.5$, dan undakan berubah dari kedalaman air $h_1 = 3.5$ sampai $h_2 = 0.5$ yang menghasilkan bilangan gelombang $k = 0.4389$ dan $k_t = 0.9254$. Dengan amplitudo datang $A = 0.5$, dapat diperoleh amplitudo refleksi $A_r = 0.1783$, dan amplitudo yang ditransmisikan $A_t = 0.6783$. Perambatan gelombang disajikan pada gambar 4.4 dengan menggeser ke atas untuk nilai t lebih besar. Kita bisa melihat gelombang di wilayah $x < 0$, dimana perubahan bentuk karena ada interaksi antara gelombang datang dan gelombang refleksi. Sedangkan untuk $x > 0$ hanya ada satu gelombang dengan amplitudo A_t .



Gambar 4.5 simulasi gelombang pada dasar berundak dari kedalaman $h_1 = 3.5$ ke $h_2 = 3.00$ pada berbagai pertambahan nilai t

Pada gambar 4.5 merupakan simulasi perambatan gelombang yang menggunakan beberapa parameter $g = 10$, $\omega = 0.5$, dan undakan berubah dari kedalaman air $h_1 = 3.5$ sampai $h_2 = 3.00$, yang menghasilkan bilangan gelombang $k = 0.4389$ dan $k_t = 0.4556$. Dengan amplitudo datang $A = 0.5$, Amplitudo refleksi $A_r = 0.0094$, dan amplitudo yang ditransmisikan $A_t = 0.5094$. Perambatan gelombang disajikan pada Gambar 4.8 dengan menggeser ke atas untuk nilai t lebih besar. Kita bisa melihat gelombang di wilayah $x < 0$, dimana perubahan bentuk karena ada interaksi antara gelombang datang dan gelombang refleksi. Sedangkan untuk $x > 0$ hanya ada satu gelombang dengan amplitudo A_t .

Berdasarkan gambar 4.2 - 4.5 diketahui bahwa jika perbedaan kedalaman semakin kecil maka amplitudo gelombang transmisi mendekati gelombang datang, sehingga amplitudo gelombang refleksi mendekati nol.

4. PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan pada pembahasan, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Perambatan gelombang monokromatik pada permukaan air dengan dasar rata dinyatakan dengan

$$\eta(x, t) = Ae^{-i(kx-\omega t)}$$

Keterangan :

- A : Amplitudo gelombang
- k : Bilangan gelombang pada $y = -h_1$
- ω : Frekuensi gelombang

Pada dasarnya, suatu gelombang yang melewati dasar dengan kedalaman berbeda akan terpecah menjadi dua bagian yaitu gelombang transmisi dan gelombang refleksi. Oleh karena itu, Persamaan perambatan gelombang monokromatik pada permukaan air dengan dasar berundak dapat dinyatakan dengan :

$$\eta(x, t) = \begin{cases} A. e^{-i(kx-\omega t)} + A_r. e^{-i(-kx-\omega t)}, & x < 0 \\ A_t. e^{-i(k_t x - \omega t)}, & x > 0 \end{cases}$$

Keterangan :

- A : Amplitudo gelombang
- A_r : Amplitudo gelombang refleksi
- A_t : Amplitudo gelombang transmisi
- k : Bilangan gelombang pada $y = -h_1$
- k_t : Bilangan gelombang pada $y = -h_2$
- ω : Frekuensi gelombang

2. Penyelesaian dari persamaan perambatan gelombang monokromatik pada dasar rata diperoleh dengan menyelesaikan fungsi potensial $\phi(x, y, t)$ dari

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

Dan linearisasi dari persamaan-persamaan dasar fluida yaitu :

$$\left. \begin{aligned} \eta_t - \phi_y &= 0 \\ \phi_t + g\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pada } y = 0$$

$$\phi_y = 0 \text{ pada } y = -h$$

Dengan metode pemisahan peubah yang di definisikan sebagai berikut :

$$\phi(x, y, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) F(y)$$

Sehingga dapat kita peroleh fungsi potensial sebagai berikut :

$$\phi(x, y, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[\cosh(ky) + \frac{\omega^2}{gp} \sinh(kh_1) \right]$$

Penyelesaian dari persamaan perambatan gelombang monokromatik pada dasar berundak menggunakan cara yang sama dengan penyelesaian persamaan perambatan gelombang monokromatik pada dasar rata, sehingga dapat diperoleh fungsi potensial sebagai berikut :

$$\phi(x, y, t) = \begin{cases} \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[\cosh(kh_1) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(kh_1) \right] = 0, & x < 0 \\ \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[\cosh(k_t h_2) + \frac{\omega^2}{gk_t} \sinh(k_t h_2) \right] = 0, & x > 0 \end{cases}$$

3. Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan, dapat diketahui bahwa pengaruh dasar berundak terhadap perambatan gelombang adalah sebagai berikut :

- a. Ketika $h_1 = 3.5$ dan $h_2 = 0.5$ diperoleh $A_t = 0.6783$ sedangkan

ketika $h_1 = 3.5$, $h_2 = 3.0$, diperoleh $A_t = 0.094$ sehingga dapat disimpulkan, jika perbedaan kedalaman optimum, maka amplitudo gelombang transmisi mencapai optimum.

- b. Ketika $x = 0$ dan $t = 00$, maka amplitudo gelombang transmisi merupakan penjumlahan dari amplitudo gelombang datang dengan gelombang refleksi.
- c. Ketika $h_1 = 3.5$ dan $h_2 = 0.5$ dengan $A = 0.5$ diperoleh $A_r = 0.1783$ dan $A_t = 0.6783$ sedangkan ketika $h_1 = 3.5$, $h_2 = 3.0$, diperoleh $A_r = 0.0094$ dan $A_t = 0.5094$ sehingga dapat disimpulkan, jika perbedaan kedalaman semakin kecil maka amplitudo gelombang transmisi mendekati gelombang datang, sehingga amplitudo gelombang refleksi mendekati nol.

5.2 Saran

Pada skripsi ini, hanya digunakan gundakan berbentuk rata. Untuk penelitian berikutnya, diharapkan peneliti bisa menggunakan dasar tak rata dengan bentuk yang lain seperti bentuk dasar sinusoidal .

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Boyce, W dan R. Dprima. 2000. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem-7th ed.* Prentice Hall. New York.
- [2] http://www.photonics.ethz.ch/fileadmin/user_upload/optics/Courses/EM_FieldsAndWaves/WaveEquation.pdf (diakses 31 Mei 2014)
- [3] http://www-eaps.mit.edu/~rap/courses/12333_notes/dispersion.pdf (diakses pada 20 Agustus 2014)
- [4] <http://www.columbia.edu/itc/ideo/lackner/E4900/Themelis5.pdf> (diakses 31 Mei 2014)
- [5] Kane, S. A. 2008. *Dispersion Relation for Water Waves.* (Online: <https://www.haverford.edu/physics/Amador/documents/211-7DispersionRelation.doc> (diakses pada 31 Mei 2014)
- [6] Widjojo, JB. S. 2010. *Transportasi Sedimen Oleh Kombinasi Aliran Permanen Beraturan dan Gelombang Seraagam.* Media Teknik Sipil, Vol. X
- [7] Wiryanto, L. H. 2010. *Wave Propagation Over A Submerged Bar.* ITB J, Sci, Vol 42 A, No. 2, p.81-90
- [8] Wiryanto, L. H dan Jamhuri, M. 2013. *Monochromatic Wave Propagating Over A Step.* SEACMA, ISBN 978-979-96152-8-2
- [9] Bird, R. B., W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot. 2007. *Transport Phenomena*, rev. 2nd ed. New York: Wiley.