

**PEWARNAAN HARMONIS GRAF GARIS, GRAF MIDDLE DAN GRAF CENTRAL  
DARI KELUARGA GRAF BINTANG GANDA**

**Siti Ma'rifatus Sholikhah**

Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,  
e-mail : [ikha.putri.irawan@gmail.com](mailto:ikha.putri.irawan@gmail.com)

**Budi Rahadjeng, M.Si.**

Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,  
e-mail : [rahajeng13@yahoo.com](mailto:rahajeng13@yahoo.com)

**Abstrak**

Pewarnaan harmonis graf sederhana  $G$  adalah pewarnaan titik sedemikian hingga setiap pasang warna muncul bersama paling banyak pada satu sisi. Dan bilangan khromatik harmonis pada sebuah graf  $G$  yang dilambangkan dengan  $\chi_H(G)$  adalah minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik  $G$  sedemikian hingga setiap pasang warna muncul bersama paling banyak pada satu sisi. Skripsi ini bertujuan untuk menunjukkan bilangan khromatik harmonis pada graf garis, graf middle, dan graf central dari graf bintang ganda.

Kata kunci : pewarnaan harmonis, graf bintang ganda, graf garis, graf middle dan graf central, bilangan khromatik harmonis.

**Abstract**

Harmonious coloring of a simple graph  $G$  is proper vertex coloring such that each pair of colors appears together on at most one edge. And the harmonious chromatic number  $\chi_H(G)$  is the last number of coloring all vertices  $G$  such that each pair of colors appears together on at most one edge. This paper show to proves the harmonious chromatic number for the line graph, middle graph and central graph of double star families.

Keyword : harmonious coloring, double star graph, line graph, middle graph and central graph, harmonious chromatic number

**PENDAHULUAN**

Teori graf adalah salah satu cabang matematika yang cukup penting, karena mempunyai segi terapan yang sangat banyak pada bidang keilmuan. Beberapa permasalahan dunia nyata dapat ditransformasikan ke dalam graf dengan menggambarkan sejumlah titik dan garis. Makalah yang berisikan teori graf pertama kali diterbitkan pada tahun 1736 oleh Leonard Euler seorang ahli matematika dari Swiss. Dalam makalah tersebut membahas masalah jembatan Königsberg (kota Königsberg, sebelah timur Prussia, Jerman sekarang) di sungai Pregal yang sangat terkenal di Eropa yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai. Dalam jurnal tersebut masalah dimodelkan ke dalam graf. Daratan dinyatakan sebagai titik yang disebut simpul (*vertex*) dan jembatan dinyatakan sebagai garis yang disebut sisi (*edge*).

Salah satu topik yang dibahas dalam teori graf adalah pewarnaan. Di dalam pewarnaan sendiri terdapat beberapa jenis, yaitu pewarnaan sisi dan pewarnaan titik. Ada beberapa jenis pewarnaan titik, misalnya pewarnaan harmonis dan pewarnaan akromatik. Pada skripsi ini lebih mengarah pada pewarnaan harmonis, hal ini

dikarenakan pewarnaan harmonis lebih menarik dibandingkan dengan pewarnaan akromatik. Karena pada pewarnaan harmonis memiliki syarat agar setiap pasang warna hanya muncul satu kali pada satu sisi. Pada tahun 2009 J.vernold Vivin, M. Ventakachalam and M.M. Akbar Ali, and Kaliraj menulis jurnal yang membahas tentang pewarnaan akromatik dan pewarnaan harmonis yang berjudul “*A Note On Achromatic Coloring Of Star Graf Families*” dan “*On Harmonius Coloring of Middle Graph of  $C(C_n), C(K_{1,n})$  and  $C(P_n)$* ”. Selain itu, pada tahun 2010 J.vernold Vivin, M. Ventakachalam and M.M. Akbar Ali, and Kaliraj juga mengeluarkan jurnal yang berjudul “*Harmonius coloring on Double Star Graph Families*”. Jurnal ini membahas tentang pewarnaan harmonis dan pewarnaan akromatik pada keluarga graf bintang ganda. Dan membandingkan bilangan kromatik harmonis dengan bilangan akromatik pada graf garis dari graf bintang ganda.

Karena itu, dalam penelitian ini akan membahas pewarnaan harmonis pada graf garis, graf middle dan graf central dari graf bintang ganda. Dan akan membuktikan bilangan kromatik harmonis pada graf garis, middle graph dan central graph dari graf bintang ganda.

**METODE PENULISAN**

Metode yang digunakan dalam menyusun makalah ini adalah metode kajian pustaka, yaitu metode yang menggunakan sumber pustaka untuk objek yang akan dibahas dengan cara mencari, memahami, mendalami dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan (sumber buku bacaan, referensi, jurnal, atau hasil penelitian lain untuk menunjang penelitian). Adapun jurnal utama yang digunakan adalah "Harmonius coloring on Double Star Graph Families"

**KAJIAN PUSTAKA**

**Definisi 1**

Graf  $G$  terdiri dari dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong  $V(G)$  dari obyek-obyek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong)  $E(G)$  yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen  $e$  dalam  $E(G)$  merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik  $V(G)$ . Himpunan titik-titik dalam  $V(G)$  dan himpunan sisi pada  $E(G)$  dapat di representasikan dalam sebuah gambar titik dan garis.

**Definisi 2**

Graf bintang ganda dinotasikan dengan  $K_{1,n,n}$  adalah graf pohon yang memuat graf bintang  $K_{1,n}$  dengan menambahkan titik baru yang berderajat satu pada  $n$  titik-titik yang berderajat satu yang sudah ada.

**Definisi 3**

Pewarnaan harmonis graf sederhana  $G$  adalah pewarnaan titik sedemikian hingga setiap pasang warna muncul bersama paling banyak pada satu sisi.

**Definisi 4**

Misalkan  $G$  graf. Graf garis dari  $G$  di lambangkan dengan  $L(G)$  adalah graf dengan  $V(L(G)) = E(G)$ , untuk setiap sisi di  $E(G)$  akan menjadi titik di  $L(G)$ . Dua titik berhubungan langsung di  $L(G)$  jika dan hanya jika sisi-sisi pada  $E(G)$  memiliki titik persekutuan di graf  $G$ .

**Definisi 5**

Misalkan  $G$  graf. Graf central  $C(G)$  dari  $G$  adalah graf yang dibentuk dengan penambahan sebuah titik ekstra pada sisi  $G$ , dan kemudian menghubungkan setiap pasang titik pada graf  $G$  yang sebelumnya tidak berhubungan langsung.

**Definisi 6**

Misalkan  $G$  graf. Graf middle dari  $G$  dinotasikan dengan  $M(G)$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(G) \cup E(G)$ .

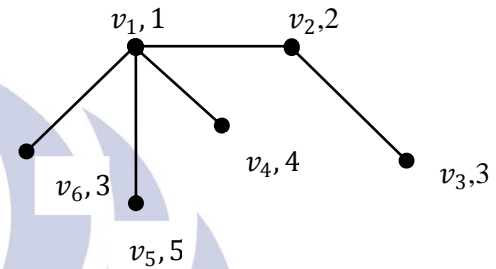
Dua titik  $x,y$  pada himpunan titik  $M(G)$  berhubungan langsung di  $M(G)$  jika memenuhi salah satu sifat berikut:

- i.  $x,y$  di  $E(G)$  dan  $x,y$  berhubungan langsung di  $G$
- ii.  $x$  di  $V(G)$ ,  $y$  di  $E(G)$  dan  $x,y$  saling terkait di  $G$

**PEMBAHASAN**

**Definisi 7**

Pewarnaan harmonis graf sederhana  $G$  adalah pewarnaan titik sedemikian hingga setiap pasang warna muncul bersama paling banyak pada satu sisi.



Gambar graf dengan pewarnaan harmonis

**Definisi 8**

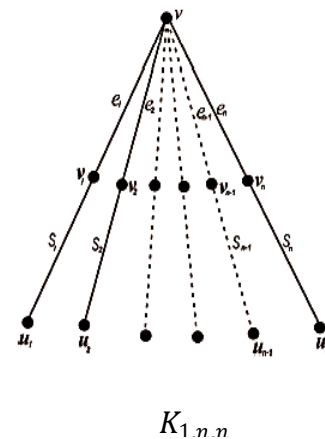
Bilangan khromatik harmonis pada sebuah graf  $G$  yang dilambangkan dengan  $\chi_H(G)$  adalah minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik  $G$  sedemikian hingga setiap pasang warna muncul bersama paling banyak pada satu sisi.

**Teorema 1**

Bilangan kromatik harmonis untuk graf bintang ganda:

$$\chi_H(K_{1,n,n}) = \begin{cases} n + 2, & 1 \leq n \leq 2 \\ n + 1, & n \geq 3 \end{cases}$$

**Bukti :**



$K_{1,n,n}$

- Untuk  $n = 1$  bilangan kromatik harmonis adalah 3
- Untuk  $n = 2$  bilangan kromatik harmonis adalah 4

- Untuk  $n \geq 3$

( $\rightarrow$ ) Perhatikan graf  $K_{1,n,n}$ , pertama warnai  $v$  dengan warna 1. Perhatikan himpunan titik  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ . Karena setiap titik di  $V$  berhubungan langsung dengan titik  $v$ , maka setiap titik di  $V$  harus mendapat warna yang berbeda dari warna titik  $v$ . Karena anggota di  $V$  ada sebanyak  $n$ , maka ada  $n$  warna yang diperoleh. Sehingga ada  $n + 1$  warna yang didapat untuk memenuhi definisi pewarnaan harmonis. Sedangkan untuk himpunan titik  $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n\}$  dapat diwarnai dengan  $n + 1$  warna. Sehingga  $\chi_H(K_{1,n,n}) \leq n + 1$ .

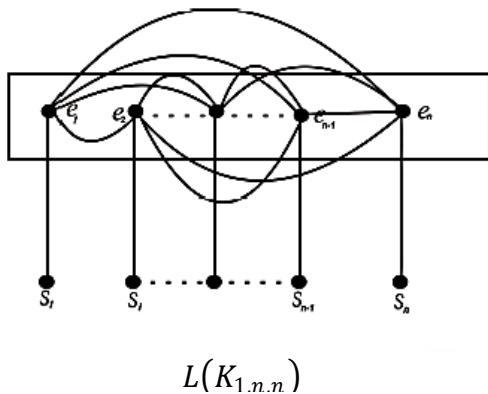
( $\leftarrow$ ) Akan ditunjukkan  $n + 1$  merupakan batas bawah. Andaikan  $\chi_H(K_{1,n,n}) \geq n$ . Sehingga himpunan titik  $V$  dapat diwarnai dengan  $1, 2, 3, \dots, n$  warna, sedangkan titik  $v$  akan menggunakan salah satu warna dari warna yang digunakan oleh anggota himpunan titik  $V$ . Maka akan ada sepasang warna yang sama muncul pada satu sisi. Hal ini, kontradiksi dengan definisi pewarnaan harmonis. Sehingga pengandaian salah. Jadi  $\chi_H(K_{1,n,n}) \geq n + 1$

sehingga  $\chi_H(K_{1,n,n}) = n + 1$  ■

**Teorema 2**

Bilangan kromatik harmonis graf garis dari graf bintang ganda  $\chi_H(L(K_{1,n,n}))$  adalah  $n + 1$

**Bukti :**



( $\rightarrow$ ) Perhatikan titik  $e_i: 1 \leq i \leq n$ . Titik  $e_i$  dapat diwarnai dengan  $n$  warna berbeda misalnya warna  $1, 2, 3, \dots, n$ . Karena titik  $e_i$  dan  $s_i$  berhubungan langsung maka titik  $s_i$  tidak boleh mempunyai warna yang sama dengan titik  $e_i$  maka warnai titik  $s_i$  dengan warna  $n + 1$ . sehingga  $\chi_H(L(K_{1,n,n})) \leq n + 1$

( $\leftarrow$ ) Untuk itu akan dibuktikan  $\chi_H(L(K_{1,n,n})) \geq n + 1$ . Berdasarkan teorema 2.2.1 ada  $k$  bilangan bulat positif terkecil sedemikian hingga  $\binom{k}{2} \geq |E(G)|$ . Andaikan  $\chi_H(L(K_{1,n,n})) \geq n$ . Oleh karena itu diperoleh  $k = n$ .

- Untuk  $k = n$ 

$$\binom{n}{2} \geq \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n^2 + n}{2}$$

$$n^2 - n \geq n^2 + n$$

$$-n \geq n$$

$$0 \geq 2n$$

Karena  $0 \geq 2n$  bukan bilangan bulat positif maka kontradiksi dengan  $n = k$  dimana  $k$  adalah bilangan bulat positif terkecil. Sehingga pengandaian salah. Karena graf garis dari graf bintang ganda tidak dapat diwarnai kurang dari  $n + 1$  warna sehingga,  $\chi_H(L(K_{1,n,n})) \geq n + 1$  jadi  $\chi_H(L(K_{1,n,n})) = n + 1$  ■

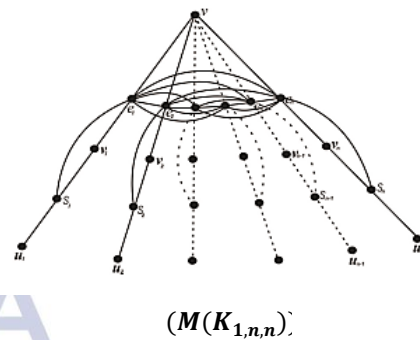
**Teorema 3**

Bilangan kromatik harmonis graf middle dari graf bintang ganda :

$$\chi_H(M(K_{1,n,n})) = \begin{cases} 4, & n = 1 \\ 6, & n = 2 \\ 2n + 1, & n \geq 3 \end{cases}$$

**Bukti**

- Untuk  $n \geq 3$



( $\rightarrow$ ) Untuk pewarnaan harmonis  $M(K_{1,n,n})$ :

- perhatikan titik-titik  $e_i: 1 \leq i \leq n$ . Titik-titik  $e_i$  dapat diwarnai dengan warna  $i$  dimana  $1 \leq i \leq n$ , misalnya warna  $1, 2, 3, 4, \dots, n$ .
- Dan untuk titik  $v$  dapat diwarnai dengan warna  $n + 1$ .
- Kemudian perhatikan titik-titik  $v_i: 1 \leq i \leq n$ . Titik-titik  $v_i$  dapat diwarnai dengan warna  $n + 1 + i$ . Sehingga diperoleh  $2n + 1$  warna.
- Sedangkan untuk titik  $s_i$  dapat diwarnai dengan warna  $n + 2 + i$  dimana  $1 \leq i \leq n - 1$ . Dan untuk  $s_n$  diberikan warna  $n + 2$ . Agar warna yang telah digunakan dapat

digunakan kembali, sehingga definisi pewarnaan harmonis dapat terpenuhi.

- Selanjutnya untuk titik-titik  $u_i$  diberikan warna  $i + 2$  dimana  $1 \leq i \leq n - 2$ , warna 1 untuk  $u_{n-1}$  dan warna 2 untuk  $u_n$ . Sehingga warna yang digunakan adalah  $2n + 1$  warna. Oleh karena itu,  $\chi_H(M(K_{1,n,n})) = 2n + 1$

(←) Selanjutnya akan dibuktikan  $\chi_H(M(K_{1,n,n})) \geq 2n + 1$ . Untuk itu, batas bawah dari  $\chi_H(M(K_{1,n,n}))$  adalah  $2n + 1$ . Andaikan batas bawahnya adalah  $2n$ . Sehingga  $M(K_{1,n,n})$  dapat diwarnai sebagai berikut :

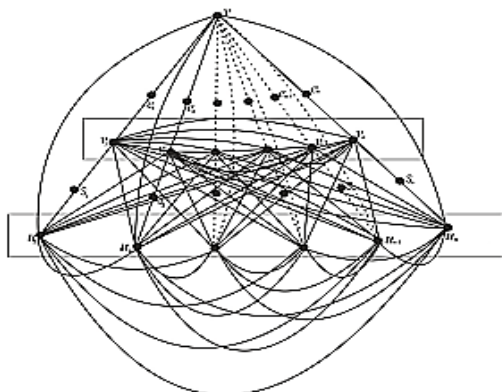
- Perhatikan titik-titik  $e_i: 1 \leq i \leq n$ . Titik-titik  $e_i$  dapat diwarnai dengan warna  $i$  dimana  $1 \leq i \leq n$ , misalnya warna 1,2,3,4, ...,  $n$ .
- Kemudian perhatikan titik-titik  $v_i: 1 \leq i \leq n$ . Titik-titik  $v_i$  dapat diwarnai dengan warna  $n + 1 + i$ . Sehingga diperoleh  $2n$  warna.
- Dan untuk titik  $v$  dapat diwarnai dengan salah satu warna dari warna 1,2,3, ...,  $n, n + 1, n + 2, \dots, 2n$ . Sehingga terdapat dua pasang warna muncul secara bersama. Hal ini, kontradiksi dengan pewarnaan harmonis sehingga  $\chi_H(M(K_{1,n,n})) \geq 2n + 1$

Oleh karena itu,  $M(K_{1,n,n})$  tidak dapat diwarnai kurang dari  $2n + 1$  warna maka  $\chi_H(M(K_{1,n,n})) = 2n + 1$  ■

**Teorema 4**

Bilangan kromatik graf central dari graf bintang ganda  $\chi_H(C(K_{1,n,n}))$  adalah  $3n + 1$

**Bukti**



$C(K_{1,n,n})$

(→) Warnai titik  $v$  dengan 1. Selanjutnya karena titik  $e_i: 1 \leq i \leq n$  berhubungan langsung dengan titik  $v$  maka warnai titik  $e_i$  dengan warna yang berbeda dari titik  $v$ . Misalnya warna 2,3,4,5, ...,  $n + 1$ .

Untuk setiap titik  $v_i$  karena titik  $v_i$  berhubungan langsung dengan titik  $e_i, s_i$  dan  $u_i$  maka titik  $v_i$  harus mendapat warna yang berbeda dengan titik-titik tersebut. Maka ada  $2n + 1$  warna berbeda yang digunakan.

Untuk titik  $u_i$  harus diwarnai dengan warna yang berbeda dari titik tersebut. Misalnya warna  $2n + 1, 2n + 2, 2n + 3, \dots, 3n + 1$ . Maka ada  $3n + 1$  warna berbeda yang digunakan untuk mewarnai titik  $u_i$ . Sedemikian hingga  $\chi_H(C(K_{1,n,n})) = 3n + 1$

(←)

- Perhatikan titik-titik  $u_i: 1 \leq i \leq n$ . Titik  $u_i$  dapat diwarnai dengan warna  $i$  dimana  $1 \leq i \leq n$ , misalnya warna 1,2,3, ...,  $n$ .
- Kemudian perhatikan titik-titik  $e_i: 1 \leq i \leq n$ . Titik-titik  $e_i$  dapat diwarnai dengan warna  $n + i$ . Sehingga diperoleh  $2n$  warna.
- Sedangkan untuk titik-titik  $v_i: 1 \leq i \leq n$ , dapat diwarnai dengan warna  $2n + 1 + i$ . Sehingga diperoleh  $3n$  warna.
- Dan untuk titik  $v$  dapat diwarnai dengan warna yang telah ada yaitu warna 1,2,3, ...,  $n + 1, n + 2, \dots, 2n, 2n + 1, 2n + 2, \dots, 3n$ . Sehingga terdapat dua pasang warna muncul secara bersama. Hal ini, kontradiksi dengan pewarnaan harmonis. Jadi  $\chi_H(C(K_{1,n,n})) \geq 3n + 1$

**Simpulan**

- 1) Bilangan khromatik harmonis untuk graf bintang ganda :  $\chi_H(K_{1,n,n}) = \begin{cases} n + 2, & 1 \leq n \leq 2 \\ n + 1, & n \geq 3 \end{cases}$
- 2) Bilangan khromatik harmonis graf garis dari graf bintang ganda adalah  $n + 1$ .
- 3) Bilangan kromatik harmonis graf middle dari graf bintang ganda :  $\chi_H(M(K_{1,n,n})) = \begin{cases} 4, & n = 1 \\ 6, & n = 2 \\ 2n + 1, & \forall n \geq 3 \end{cases}$
- 4) Bilangan khromatik harmonis graf central dari graf bintang ganda adalah  $3n + 1$ .

**Saran**

Pada penelitian ini hanya memfokuskan pada pokok bahasan pewarnaan harmonis pada graf sederhana dari keluarga graf bintang ganda. Bagi pembaca yang tertarik mengembangkan tulisan inidapat membahas pewarnaan harmonis pada jenis-jenis graf sederhana lain.

**DAFTAR PUSTAKA**

- Budayasa, I Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya:University Press UNESA.
- Chartrand, Gery dan Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*, Hal.261, California: A Division of Wadsworth,Inc.
- Irawati, Dina. *Pelabelan Total Sisi Ajaib pada graf Bintang* . Vol 2, No 1,85-89. Padang: Universitas Andalas (21 Oktober 2013)
- J.vernold Vivin, M. Ventakachalam and M.M. Akbar Ali, and Kaliraj,2012, *Harmonius Coloring on double stargraph families*, Tamking Journal of mathematics volume 43,Number2,153-158 (13 Oktober 2013)
- R.Govindarajan, V.Kavitha, 2013, *A Study on Achromatic Coloring Graph and its Applications*, vol2 Issue 1,105-108. International Journal of Science and Reseach(URS), India (8 Desember 2013)

