

SOLUSI SISTEM NONLINIER LIBRASIKESSETIMBANGANBUMI – SATELIT

Minggir Agus Saputra

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
Email: minggirsaputra@yahoo.com

Dr. Yusuf Fuad, M.App.Sc.

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
Email: unesayfuad2013@yahoo.com

Abstrak

Artikel ini mengkaji persamaan dinamik yang menggambarkan sistem nonlinier librasi Bumi-Satelit. Untuk memperoleh solusi analitik dari persamaan nonlinier, kita mengambil sebuah skema dengan menambahkan berturut-turut tingkat nonlinier persamaan diterapkan. Kita tentukan nilai parameter *true anomaly of satellite* yang sama pada solusi analitik persamaan nonlinier. Kita simulasikan respon linier dan respon nonlinier dari solusi analitik. Kita simpulkan model persamaan nonlinier control perilaku *pitch* librasibumi- satelit dan posisi orbit satelit pada saat control perilaku *pitch* librasibumi-satelit.

Kata kunci : solusi analitik, nonlinier, bumi-satelit, librasi, simulasi.

Abstract

This article studies derive the dynamical equations that characterizes the nonlinear system librations of an earth-satellite. To obtain analytical solution of the resulting nonlinear equation, we adopt a scheme that successively augments the nonlinearity level of the equation by adding nonlinear terms. We determine a parameter value to true anomaly of satellite on analytical solution. We simulate the linear response and nonlinear response of analytical solution. We conclude the modeling of a nonlinear pitch attitude libration earth-satellite and the satellite orbital position at pitch attitude libration earth-satellite.

Keywords : analytical solution, nonlinear, earth-satellite, libration, simulate.

I. PENDAHULUAN

Di era globalisasi satelit banyak dimanfaatkan dengan berbagai macam tujuan. Bumi dan satelit merupakan dua benda yang bergerak di alam semesta. Walaupun satelit bumi pada dasarnya dikendalikan oleh gaya gravitasi bumi, ada beberapa kekuatan lain yang juga berpengaruh seperti hambatan atmosfer, tekanan radiasi matahari, medan gravitasi bulan, atau garis edar satelit.

Ketika satelit mengorbit sering terjadi peristiwa *pitch* librasi. Librasi merupakan gangguan kecil yang terjadi pada komponen kontrol perilaku pesawat ruang angkasa dan *pitch* merupakan salah satu komponen kontrol perilaku pesawat ruang angkasa yang merupakan orientasi sudut pesawat ruang angkasa dengan memperhatikan beberapa sumbu di ruang angkasa. Peristiwa *pitch* librasi yang terjadi antara satelit dan bumi dapat mengakibatkan satelit mengorbit pada posisi yang tidak seharusnya. Oleh karena itu perlu adanya kontrol *pitch* librasi bumi-satelit.

Topik ini terinspirasi dari sebuah artikel yang berjudul *Analytical Solution to a Highly Nonlinear Earth-Satellite Pitch Attitude Libration Equation* yang ditulis Osei-Frimpong, Aidoo, dan Amos, (2010). Persamaan diferensial yang menggambarkan kontrol perilaku *pitch* librasi Bumi-Satelit bersifat nonlinier. Persamaan nonlinier seperti itu biasanya tidak mudah diselesaikan secara analitik. Secara khusus solusi pendekatan atau aproksimasi diperoleh dengan linierisasi di sekitar titik kesetimbangan. Sehingga solusi yang diperoleh dengan cara ini mengakibatkan pergerakan satelit berada pada lintasan yang ditujukan.

Solusi analitik yang diperoleh akan diberikan syarat nonlinier agar menghasilkan respon linier dan respon nonlinier. Respon linier merupakan solusi analitik yang tidak memenuhi syarat nonlinier sedangkan respon nonlinier merupakan solusi analitik yang memenuhi syarat nonlinier. Kemudian keduanya akan disimulasikan untuk mengetahui keberadaan posisi satelit pada kontrol *pitch* librasi bumi-satelit.

II. DASAR TEORI

2.1 Pengertian Satelit

Satelit merupakan benda di luar angkasa yang bergerak mengelilingi bumi berdasarkan orbit tertentu. Sebuah satelit yang mengorbit bumi tetap berada pada posisinya karena gaya sentripetal pada satelit diimbangi oleh gaya tarikan gravitasi dari bumi. Sebenarnya ada beberapa macam orbit satelit yang dapat digunakan dalam penempatan satelit di ruang angkasa. Berdasarkan jarak suatu satelit di dalam orbit untuk berputar mengelilingi bumi, di dalam pola lingkaran ataupun pola elips. Kecepatan sudut yang paling besar disebut *prograde* sedangkan yang tekecil disebut *retrograde*. Jarak maksimum orbit satelit dengan permukaan bumi disebut dengan *apogee*, sedangkan jarak minimum dari orbit satelit ke bumi disebut dengan *perigee*. Ditinjau dari posisi ketinggian orbitnya satelit dapat digolongkan menjadi tiga macam:

- (1) *Low Earth Orbit* (Mengorbit pada ketinggian 500-1.500 km dari permukaan bumi)
- (2) *Medium Earth Orbit*. (Mengorbit pada Ketinggian 9.000-20.000 km),
- (3) *Geosynchronous Earth orbit*. (Mengorbit pada ketinggian ± 360.000 km)

2.2 Persamaan Gerak Satelit

Persamaan gerak satelit terbagi menjadi dua macam yaitu:

- Gerak tanpa pengaruh gaya gangguan

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{-\mu}{r^3} \vec{r} \quad (1)$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (2)$$

- Gerak dengan pengaruh gaya gangguan

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{-\mu}{r^3} \vec{r} + f(r, t) \quad (3)$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = g(r, t) \quad (4)$$

dimana :

r = Jarak dari pusat bumi ke satelit

$\mu = G(M + m) \cong GM$, dengan $m \ll M$

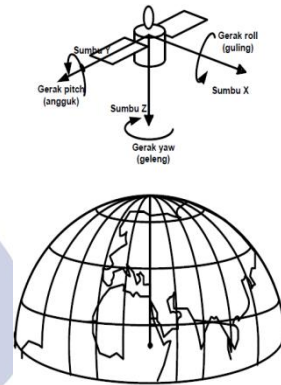
\vec{r} = vektor posisi satelit

θ = Sudut yang dibentuk oleh satelit disebarkan titik dengan arah horizontal permukaan bumi

Dalam hal ini $f(r, t)$ dan $g(r, t)$ masing-masing merupakan fungsi gangguan pada arah radial r dan tangensial (Siregar, 2007).

2.3 Gerak Anguler Pada Satelit

Sebuah satelit yang berada di orbit memiliki gerak yang mengacu pada tiga sumbu. Sumbu yang searah dengan arah gerak satelit dalam orbitnya (Sumbu X), sumbu ke arah bumi (sumbu Z), dan sumbu yang tegak lurus bidang XZ (sumbu Y). Posisi sumbu-sumbu satelit terhadap bumi direpresentasikan dalam Gambar.2.1.



Gambar 2.1 Posisi sumbu-sumbu satelit terhadap bumi (Widodo, 2004)

Gerak anguler keseluruhan pada ruang didefinisikan oleh persamaan Euler. Oleh karena itu satelit diasumsikan sebagai benda tegar. Ketika membahas benda tegar tentu akan melibatkan torsi pada benda putar, momen inersia dan sudut Euler.

1. Torsi pada benda putar (momentum sudut)

Dalam gerak rotasi, yang dimaksud momentum sudut adalah momentum linier terhadap sumbu putaran. Momentum sudut dinotasikan dengan L dan ditulis :

$$L = r \cdot p = m\omega r^2 = mr^2\omega \quad (5)$$

Dimana :

m = massa partikel kg

r = jarak partikel dan sumbu putar

p = momentum linier

L = momentum sudut

ω = Kecepatan sudut

2. Momen Inersia

Momen inersia adalah ukuran kemampuan benda untuk mempertahankan kecepatan anguler ketika melakukan rotasi.

$$I = mr^2 \quad (6)$$

Dimana :

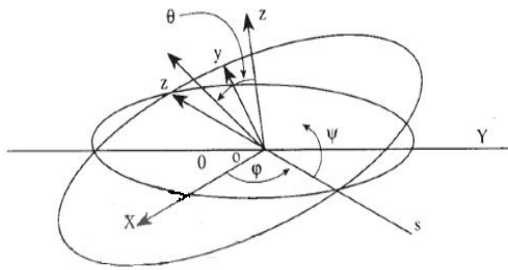
I = Momen Inersia kgm^2

Hubungan antara momentum sudut dengan momen inersia dapat ditulis sebagai berikut :

$$L = mr^2\omega = I\omega \tag{7}$$

3. Sudut Euler

Perhatikan Gambar 2.2

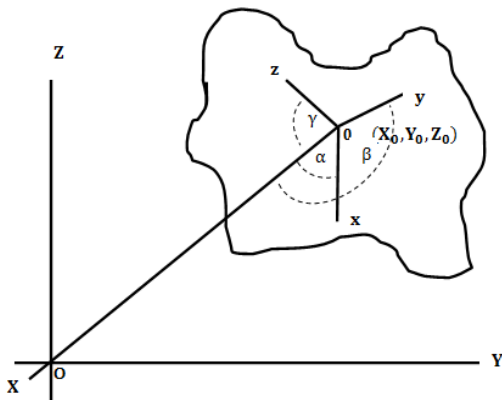


Gambar 2.2 Sudut-sudut Euler

Sudut θ , φ dan ψ disebut sudut Euler. Batas sudut Euler seperti terlihat pada gambar di atas adalah :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 &\leq \psi \leq 2\pi \end{aligned}$$

Perhatikan gambar 2.3



Gambar 2.3 Sistem koordinat suatu benda

Pada gambar 2.3 terdapat koordinat tetap OXYZ dan koordinat oxyz dengan α, β dan γ merupakan cosinus arah, sedangkan kedudukan titik asal koordinat pada benda terhadap koordinat tetap adalah X_0, Y_0, Z_0 . Perubahan cosinus sudut Euler dapat dinyatakan dengan persamaan diferensial sebagai berikut :

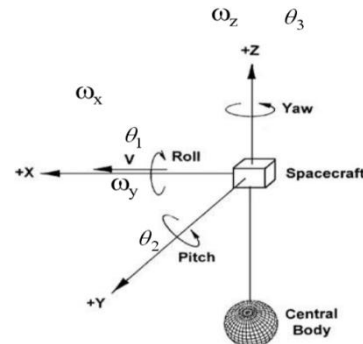
$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{d\varphi_x}{dt} = \beta_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\gamma_3}{dt} \\ \omega_y &= \frac{d\varphi_y}{dt} = \gamma_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\alpha_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\alpha_3}{dt} \\ \omega_z &= \frac{d\varphi_z}{dt} = \alpha_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\beta_2}{dt} + \alpha_3 \frac{d\beta_3}{dt} \end{aligned} \tag{8}$$

Dimana :

- ω_x = Kecepatan pada sumbu x .
- ω_y = Kecepatan sudut pada sumbu y
- ω_z = Kecepatan sudut pada sumbu z

2.4 Dinamik Kontrol Perilaku Satelit

Misalkan XYZ adalah sistem ortogonal sumbu tangan kanan dengan asal di pusat massa satelit, dan didefinisikan sebagai sumbu satelit. Definiskan unit vektor ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) sepanjang sumbu XYZ berturut-turut. Posisi anguler atau sudut *pitch* dinotasikan dengan θ , dengan komponen-komponennya $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Kecepatan anguler relatif pada sumbu ruang dinotasikan dengan vektor $\omega, (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ sepanjang sumbu satelit. Seperti yang tampak pada gambar di bawah ini :



Gambar 2.4 Dinamik sistem gerak satelit (http://www.mat.uniroma2.it/~locatell/school1astronet2/material/Biggs_lectures.pdf)

Jika gaya putaran memiliki kecepatan anguler $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ relatif pada kerangka satelit, total vektor momentum anguler satelit diberikan sebagai berikut:

$$\mathbf{H}_T = (I_x\omega_x + I\omega_1)\mathbf{i} + (I_y\omega_y + I\omega_2)\mathbf{j} + (I_z\omega_z + I\omega_3)\mathbf{k} \tag{9}$$

Dimana :

- \mathbf{H}_T = Total vektor momentum anguler
- $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ = Komponen kecepatan anguler relatif pada kerangka satelit
- $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ = Komponen kecepatan anguler relatif pada sumbu ruang
- $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ = Unit vektor pada sumbu XYZ

Asumsikan semua gaya putar memiliki momen inersia I , oleh karena itu persamaan gerak rotasi satelit adalah :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{d}{dt} \mathbf{H}_T \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_T + \omega \times \mathbf{H}_T \end{aligned} \tag{10}$$

Dimana L adalah resultan torsi eksternal yang bekerja pada satelit, dan $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_T$ menunjukkan diferensiasi \mathbf{H}_T terhadap sumbu satelit (Ives, 1962). Perilaku gerakan satelit sebagai benda tegar dapat yang dideskripsikan oleh persamaan Euler pada tubuh satelit dalam persamaan (11) (Kaplan, 1976)

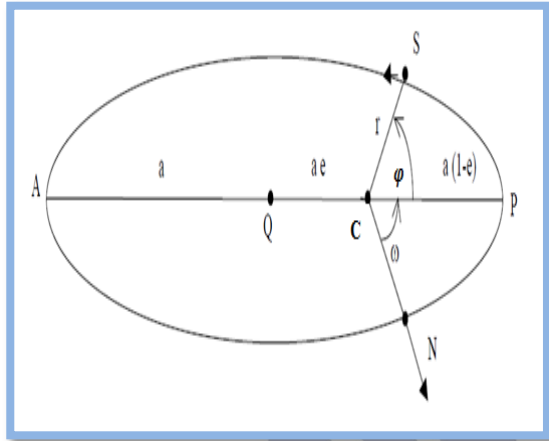
$$I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z = L_x$$

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = L_y \quad (11)$$

$$I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = L_z$$

2.5 Orbit Elliptik Sederhana

Pada saat gerakan orbit lebih kompleks, kita mulai mendeskripsi orbit eliptik dan menetapkan beberapa variabel-variabel penting. Dengan referensi pada gambar 2.5



Gambar 2.5bidang orbit pada orbit elliptik

Posisi orbit r di setiap waktu t , m adalah massa satelit dan M adalah masa bumi. (Karena bumi berbentuk bola simetri lebih besar massanya memungkinkan menganggap titik massa dengan pusatnya massa di C), dinyatakan dengan persamaan elips yaitu :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{(1+\cos \varphi)} \quad (12)$$

Dimana :

e = Eksentrisitas orbit ,

a = Sumbu semi-mayor elips

φ = *the true anomaly* (simpangan sebenarnya) diukur dari *perigee* (titik lintasan) P. (titik paling rendah di orbit dimana m terdekat pada M)

lintasan) P. (titik paling rendah di orbit dimana m terdekat pada M)

Nilai minimum r ketika $\varphi = 0$ adalah

$$r_p \equiv a(1 - e) \quad (13)$$

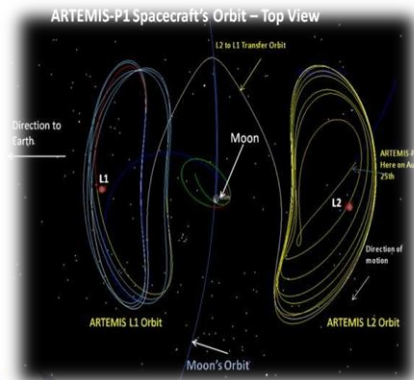
Nilai maksimum r ketika $\cos \varphi = -1$ adalah

$$r_p \equiv a(1 + e) \quad (14)$$

2.6 Librasi

Pada sebuah pesawat ruang angkasa librasi diartikan sebagai gangguan kecil pada komponen perilaku pesawat ruang angkasa. salah satu

komponen dari perilaku pesawat ruang angkasa yang merupakan orientasi sudut pesawat ruang angkasa dengan memperhatikan beberapa sumbu ruang angkasa disebut *pitch*.



Gambar 2.6Orbit librasi bumi-bulan(NASA, 2010)

2.7 Teori Floquet

Stabilitas sistem periodik harus dipertimbangkan dari waktu ke waktu, sehingga matriks transisi di hitung dalam satu periode, dari t_0 ke $t_0 + T$ memiliki peranan penting dalam analisis stabilitas. Yaitu, penempatan nilai eigennya di tempatterbuka disk unit yang menentukan apakah sistem tersebut stabil. (Mohler, 1991)

Diberikan sistem di bawah ini :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (15)$$

Matriks transisi sistem dinotasikan dengan $\Phi_A(t, t_0)$, dimana t_0 adalah waktu ketika inisial variabel state digunakan dan t adalah waktu ketika variabel state dijalankan. Berikut penjabarannya:

$$\Phi_A(t + T, t_0) = \Phi_A(t, t_0)C \quad (16)$$

Dimana C adalah matriks konstanta.

Untuk memeriksa persamaan ini, cukup menghitung turunan terhadap waktu $\Phi_A(t + T, t_0)$.

$$\dot{\Phi}_A(t + T, t_0) = \dot{\Phi}_A(t, t_0)C = A(t)\Phi_A(t, t_0)C = A(t + T)\Phi_A(t + T, t_0)$$

Karena $\dot{\Phi}_A = A(t)\Phi_A$

Dimana A adalah matriks konstanta R sedemikian hingga $C \equiv e^{RT}$ (17)

Dari persamaan $\Phi_A(t_0, t_0) = I$ dan persamaan (16) dapat kita simpulkan :

$$\Phi_A(t + T, t_0) = e^{RT} \quad (18)$$

(Rafal, 1996).

2.8 Sistem Nonlinier

Diberikan sistem nonlinier

$$\dot{x} = A(t)x + g(x, t), x \in \mathbb{R}^n \tag{19}$$

Dimana $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ adalah fungsi *smooth*. Misalkan diberikan masalah nilai awal

$$\dot{x} = A(t)x + g(x, t), x(t_0) = x_0 \tag{20}$$

Dan misalkan $t \rightarrow \Phi(t)$ yaitu matrik fundamental solusi untuk sistem homogen $\dot{x} = A(t)x$ yang didefinisikan di beberapa interval J_0 yang memuat t_0 . Jika $t \rightarrow \Phi(t)$ adalah solusi masalah nilai awal yang didefinisikan di subinterval J_0 , maka

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0 \\ &+ \phi(t) \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)g(\phi(s), s)ds \end{aligned} \tag{21}$$

(Chicone, 1999).

2.9 Persamaan Dinamik

Persamaan dinamik satelit pada kerangka badan satelit adalah sebagai berikut :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_c + \mathbf{T}_d = \dot{\mathbf{h}}_l = \dot{\mathbf{h}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} \tag{22}$$

Dimana :

\mathbf{h} = Momentum satelit dalam kerangka badan satelit.

$\boldsymbol{\omega}$ = Vektor kecepatan anguler kerangka badan satelit dengan terkait pada kerangka inersia.

\mathbf{T}_c = Momen kontrol

\mathbf{T}_d = Momen Gangguan

Momentum anguler sistem keseluruhan dibagi menjadi dua yaitu momentum anguler benda tegar

$\mathbf{h}_B = [h_x \ h_y \ h_z]^T$ dan $\mathbf{h}_w =$

$[h_{wx} \ h_{wy} \ h_{wz}]^T$ yaitu momen *exchange device* yang dapat ditambahkan pada satelit. Sehingga diperoleh :

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_B + \mathbf{h}_w$$

Persamaan dinamik menjadi umum setelah membangun perkalian *cross product*.(Ouhochine dkk, 2004)

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \mathbf{T}_c + \mathbf{T}_d &= [\dot{h}_x + \dot{h}_{wx} + (\omega_y h_z - \omega_z h_y) \\ &+ (\omega_y h_{wz} - \omega_z h_{wy})] \mathbf{i} \\ &+ [\dot{h}_y + \dot{h}_{wy} + (\omega_z h_x - \omega_x h_z) + (\omega_z h_{wx} - \\ &\omega_x h_{wy})] \mathbf{j} \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &+ [\dot{h}_z + \dot{h}_{wz} + (\omega_x h_y - \omega_y h_x) \\ &+ (\omega_x h_{wy} - \omega_y h_{wx})] \mathbf{k} \end{aligned}$$

Dimana \mathbf{i}, \mathbf{j} dan \mathbf{k} merupakan vektor unit direksi pada sumbu kerangka badan satelit.

2.10 Linierisasi Persamaan Dinamik

Mengingat orbit hampir melingkar, kecepatan sudut satelit diberikan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \psi\omega_0 \\ \dot{\theta} - \omega_0 \\ \dot{\psi} - \phi\omega_0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Sehingga diperoleh turunan pertamanya sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} - \dot{\psi}\omega_0 \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} - \dot{\phi}\omega_0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Sudut-sudut Euler ϕ, θ , dan ψ didefinisikan sebagai sudut-sudut rotasi sumbu badan satelit: ϕ , sumbu X_B ; θ , sumbu Y_B dan ψ , sumbu Z_B . ω_0 menyatakan kecepatan anguler orbit satelit. Subtitusikan (24) dan (25) ke dalam persamaan (23), kita peroleh :

$$\begin{aligned} T_{dx} + T_{cx} &= I_x \ddot{\phi} + 4\omega_0^2(I_y - I_z)\phi \\ &+ \omega_0(I_y - I_z - I_x)\dot{\psi} + \dot{h}_{wx} \\ &- \omega_0 h_{wz} - \dot{\psi} h_{wyo} - \omega_0 h_{wyo} - I_{xy} \ddot{\theta} - I_{xy} \dot{\psi} \\ &- I_{xy} \omega_0^2 \psi + 2I_{yz} \omega_0 \dot{\theta} \\ T_{dy} + T_{cy} &= I_y \ddot{\theta} + 3\omega_0^2(I_x - I_z)\theta + \dot{h}_{wy} - I_{xy} - \\ &(\ddot{\phi} - 2\omega_0 \dot{\psi} - \omega_0^2 \phi) + \\ &I_{yz} (-\ddot{\psi} - 2\omega_0 \dot{\phi} + \omega_0^2 \psi) \\ T_{dz} + T_{cz} &= I_z \ddot{\psi} + \omega_0(I_z + I_x - I_y)\dot{\phi} + \omega_0^2(I_y - \\ &I_x)\psi + \dot{h}_{wz} + \omega_0 h_{wx} \\ &+ \dot{\phi} h_{wyo} - \psi \omega_0 h_{wyo} - I_{yz} \ddot{\theta} - I_{xz} \dot{\phi} - 2\omega_0 I_{xz} \dot{\theta} - \\ &\omega_0^2 I_{xz} \phi \end{aligned} \tag{26}$$

Untuk kasus T_{cx}, T_{cy} , dan T_{cz} sama dengan nol torsi tidak mengontrol. Diasumsikan juga momentum *device* tidak ada sehingga h_{wx}, h_{wy} , dan

$$\begin{aligned} T_{dx} &= I_x \ddot{\phi} + 4\omega_0^2(I_y - I_z)\phi + \omega_0(I_y - I_z - I_x)\dot{\psi} h_{wz} \\ &\text{dihilangkan. Persamaan (26) menjadi :} \\ T_{dy} &= I_y \ddot{\theta} + 3\omega_0^2(I_x - I_z)\theta \\ T_{dz} &= I_z \ddot{\psi} + \omega_0^2(I_y - I_x)\psi + \omega_0(I_z + I_x - I_y)\dot{\phi} \end{aligned} \tag{27}$$

Didefinisikan

$$\sigma_x = \frac{(I_y - I_z)}{I_x}, \sigma_y = \frac{(I_x - I_z)}{I_y}, \sigma_z = \frac{(I_y - I_x)}{I_z} \tag{28}$$

Substitusikan persamaan (28) ke persamaan (27) menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{T_{dx}}{I_x} &= \ddot{\phi} + 4\omega_0^2 \sigma_x \phi + \omega_0(1 - \sigma_x)\dot{\psi} \\ \frac{T_{dz}}{I_z} &= \ddot{\psi} + \omega_0^2 \sigma_z \psi + \omega_0(1 - \sigma_x)\dot{\phi} \quad (29) \\ \frac{T_{dy}}{I_y} &= \ddot{\theta} + 3\omega_0^2 \sigma_y \theta\end{aligned}$$

(Ouhochine dkk, 2004).

2.11 Anomaly-History

Anomali merupakan amplitudo pada grafik suatu fungsi periodik. Oleh karena itu grafik fungsi periodik juga disebut dengan *anomaly history*. Garis vertikal menunjukkan nilai minimum atau maksimum suatu anomali pada satelit sehingga bila nilai anomali maksimum, orbit satelit akan terganggu sehingga posisi satelit mengorbit tidak pada posisi yang seharusnya, sebaliknya bila nilai anomali minimum satelit akan berada pada posisi orbit yang seharusnya. Hal ini terjadi karena adanya partikel netral yang menyebabkan pergerakan satelit orbit rendah terganggu atau dengan kata lain terjadi *atmospheric drag* (gaya hambat terhadap gerak satelit).

3 METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan studi literatur, hasil dari literatur dilakukan analisa dan diperoleh sistem untuk merekonstruksi model persamaan nonlinier kontrol perilaku *pitch* librasi bumi-satelit. Solusi analitiknya kemudian dicari dan diberikan syarat nonlinier untuk menemukan respon linier dan nonliniernya. Untuk merepresentasikan hasil simulasi dipilih beberapa nilai parameter.

4 HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Model persamaan nonlinier control perilaku *pitch* librasi bumi-satelit

Pitch librasi bumi-satelit secara khusus didefinisikan dalam hubungan antara sudut roll, pitch dan yaw. Untuk memperoleh model matematika persamaan nonlinier puncak kontrol sikap keseimbangan bumi-satelit kita harus melakukan langkah-langkah sebagai berikut ini.

Pertama kita membuat asumsi sebagai berikut :

1. Bumi merupakan bola simetris, kepadatan berat jenis dan titik massanya diabaikan.
2. Satelit mengorbit cukup tinggi diatas bumi sehingga gaya tarik diabaikan.
3. Tidak ada perubahan digaris edar, sehingga gaya dorong diabaikan.

4. Gaya lain seperti radiasi matahari, dan medan elektromagnetik diabaikan seperti pada gaya gravitasi bumi.
5. Karena satelit secara relative tertutup kebumi, gaya gravitasi Matahari diabaikan.

Persamaan gerak orbit satelit diberikan sebagai berikut:

$$\ddot{r} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0 \quad (30)$$

Dengan menggunakan Hukum Universal Newton gravitasi dan mengabaikan gerakan awal dari Hukum Newton yang disebabkan efek relativitas, persamaan yang mengatur diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned}I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= L_x \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= L_y \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= L_z\end{aligned} \quad (31)$$

Dalam kasus orbit satelit, torsi eksternal dihubungkan dengan gravitasi sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}L_x &= -\frac{3\mu}{r_c^3} (I_y - I_z) \cos^2 \theta \cos \phi \sin \phi \\ L_y &= -\frac{3\mu}{r_c^3} (I_x - I_z) \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ L_z &= -\frac{3\mu}{r_c^3} (I_y - I_x) \sin \theta \cos \theta \sin \phi\end{aligned} \quad (32)$$

substitusikan (32) ke (31),

$$\begin{aligned}I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= -\frac{3\mu}{r_c^3} (I_y - I_z) \cos^2 \theta \cos \phi \sin \phi \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= -\frac{3\mu}{r_c^3} (I_x - I_z) \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= -\frac{3\mu}{r_c^3} (I_y - I_x) \sin \theta \cos \theta \sin \phi\end{aligned} \quad (33)$$

Berdasarkan sudut Euler satelit, persamaan dinamis menjadi :

$$\begin{aligned}I_x \ddot{\phi} - I_x \omega_0 \sin \psi - \omega_0 (I_z - I_y + I_x) \\ -(I_z - I_y) \left(\omega_0^2 + \frac{3\mu}{r_c^3} \right) \sin \theta &= 0 \\ I_y \ddot{\theta} + \frac{3\mu}{r_c^3} (I_x - I_z) \sin 2\theta &= I_y \omega_0 \\ I_z \dot{\psi} + I_z \dot{\omega}_0 + \omega_0 (I_z - I_y - I_x) \dot{\phi} \\ - \omega_0^2 (I_x - I_y) \sin \psi &= 0\end{aligned} \quad (34)$$

Persamaan kedua dalam sistem menunjukkan gerakan *pitch* terpisah. Ini dapat disederhanakan menjadi sebagai berikut:

$$\ddot{\theta} + \frac{3\mu(I_x - I_z)}{r_c^3 I_y} \sin 2\theta = \dot{\omega}_0 \quad (35)$$

Dengan menyatakan radius r_c disyaratkeksentrisitasorbit, radius di periapsis r_p dan *true anomaly of the satellite* (penyimpangan orbit yang sebenarnya) φ diperoleh:

$$r_c = \frac{r_p(1+e)}{1+e \cos \varphi} \quad (36)$$

Karena

$$\frac{\mu}{r_c^3} = \frac{\mu}{\mu r_p^3} \left(\frac{1+e \cos \varphi}{1+e} \right)^3 = \omega_c^2 \left(\frac{1+e \cos \varphi}{1+e} \right)^3$$

Dimana $\omega_c^2 = \frac{\mu}{r_p^3}$, rektum semi-latus p dihubungkan ke r_p

(radius di periapsis) oleh $p = r_p(1+e)$. Keadaan

$$h^2 = \mu p$$

Diperoleh

$$\omega_0 = \dot{\varphi} = \frac{h}{r_c^2} = \omega_c \frac{(1+e \cos \varphi)^2}{(1+e)^2}$$

$$\dot{\omega}_0 = -2\omega_c^2 e \sin \varphi \left(\frac{1+e \cos \varphi}{1+e} \right)^3,$$

Sehingga model persamaan nonlinier kontrol perilaku *pitch* librasi bumi-satelit diperoleh dengan mensubstitusikan $\dot{\varphi}$ ke persamaan (35) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{3}{2}\omega_c^2 \left(\frac{1+e \cos \varphi}{1+e} \right)^3 \sigma \sin 2\theta \\ = -2\omega_c^2 e \sin \varphi \left(\frac{1+e \cos \varphi}{1+e} \right)^3 \end{aligned} \quad (37)$$

Dimana:

θ : Sudut *pitch*

ω_c : Kecepatan orbit yang bersesuaian dengan orbit sirkuler

e : Eksentrisitas orbit

φ : *True anomaly of the satellite*

σ : Rasio inersia, dengan $\sigma = \frac{I_x - I_z}{I_y}$

4.2 Solusi Analitik

Kita misalkan

$$x_1 = \theta \quad (38)$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \quad (39)$$

$$\alpha_1 = \frac{\omega_c^2}{2} \left(\frac{1+e \cos \varphi}{1+e} \right)^3 \quad (40)$$

$$\alpha_2 = e \sin \varphi \quad (41)$$

Dengan menggunakan aturan rantai diperoleh:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} x_i', \quad i = 1, 2$$

Karena

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_c^2(1+e \cos \varphi)^2}{(1+e)^2} \quad (42)$$

Kita peroleh:

$$\frac{dx_1}{d\varphi} = x_1'(\varphi) = \frac{(1+e)^2}{\omega_c^2(1+e \cos \varphi)^2} x_2 \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{d\varphi} x_2'(\varphi) &= \frac{(1+e)^3}{\omega_c^2(1+e \cos \varphi)^2} [-3\alpha_1 \sigma \sin 2x_1 - 4\alpha_1 \alpha_2] \quad (44) \\ &= \frac{(1+e)^3}{\omega_c^2(1+e \cos \varphi)^2} 3\alpha_1 \omega_c \left[-\sin 2x_1 - \frac{4\alpha_2}{3\sigma} \right] \\ &= \frac{3\sigma \omega_c (1+e)}{2(1+e \cos \varphi)^2} \left[-\sin 2x_1 - \frac{4\alpha_2}{3\sigma} \right] \end{aligned}$$

Dua persamaan di atas yang membentuk sistem yang dapat dinyatakan sebagai persamaan vektor:

$$x'(\varphi) = F(x, \varphi) \quad (45)$$

Dimana

$$x(\varphi) = \begin{bmatrix} x_1(\varphi) \\ x_2(\varphi) \end{bmatrix}$$

Dan

$$F(x, \varphi) = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{(1+e \cos \varphi)^2} x_2 \\ \frac{3\sigma k_2}{2} (1+e \cos \varphi) \left[-2 \sin 2x_1 - \frac{4e}{3\sigma} \sin \varphi \right] \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\dot{x} = Ax + G(x, \varphi) \quad (46)$$

Dimana:

A = Matrik dengan ukuran $n \times n$

$$G(x, \varphi) = F(x, \varphi) - Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ z(x, \varphi) \end{bmatrix} \quad (47)$$

Dengan

$$z(x, \varphi) = 3\sigma k_2 (1+e \cos \varphi) \left(x_1 - \frac{1}{2} \sin 2x_1 - \frac{2e}{3\sigma} \sin \varphi \right)$$

x bergantung pada $G(x, \varphi)$ dapat dieleminasi berdasarkan asumsi librasi amplitudo rendah. Persamaan (47)

kemudian diganti dengan persamaan nonlinier homogen.

$$\dot{x}(\varphi) = Ax + G(\varphi)$$

Solusi umum dari persamaan (46) diberikan oleh:

$$x(\varphi) = \Phi(\varphi)x_0 + \Phi(\varphi) \int_0^\varphi \Phi(s)^{-1} G(s) ds \quad (48)$$

Dimana:

$\Phi(\varphi)$ = Matriks Transisi

Dengan

$$\Phi(\varphi) = Q(\varphi)P\Lambda(\varphi)P^{-1}, \Lambda(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \omega\varphi & \sin \omega\varphi \\ -\sin \omega\varphi & \cos \omega\varphi \end{bmatrix}$$

Dimana:

$$(72) Q(\varphi) = \text{Matrik periodik Floquet}$$

Dengan $Q(\varphi) = p_0 + p_1 \cos \varphi + q_1 \sin \varphi$

4.3 Parameter Pada Orbit Satelit

Diberikan komponen-komponen momen inersia terhadap sumbu x dan y yang bekerja pada satelit bernilai sama yaitu 200 kgm^2

$$I_x = I_y = 200 \text{ kgm}^2$$

Komponen momen inersia yang ketiga diberikan di bawah

$$I_z = 10 \text{ kgm}^2$$

Sehingga diperoleh rasio inersianya adalah $\sigma = \frac{I_x - I_z}{I_y} =$

$$\frac{200 \text{ kgm}^2 - 10 \text{ kgm}^2}{200 \text{ kgm}^2} = \frac{190 \text{ kgm}^2}{200 \text{ kgm}^2} = 0,95$$

Parameter gravitasi $\mu = 3,986 \times 10^5 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$

Kecepatan angular orbit $\omega = 1,657 \text{ rad/detik}$

Eksentrisitas orbit rendah $e = 0,05$

Ketinggian di titik lintasan diberikan 60 km

Diberikan radius titik lintasan $r_c = 6580 \text{ km}$,

saat kecepatan angular orbit di titik lintasan

$$\omega_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_p^3}} = 1,183 \times 10^{-3} \text{ g rad/detik}$$

Kondisi inisialnya adalah

$$x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,0 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$$

Dengan

$$p_0 = \begin{bmatrix} 1,039 & 0 \\ 0 & 0,964 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} -0,039 & 0 \\ 0 & 0,036 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \begin{bmatrix} 0 & -22,813 \\ -0,0042 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 846,114 \\ -0,0032 & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai R telah diberikan. Nilai eigen dan vektor eigennya dihitung sebagai berikut :

$$\lambda_1 = 1,657i$$

$$\lambda_2 = 1,657i$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,002i \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,002i \end{bmatrix}$$

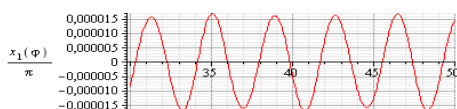
4.4 Simulasi

1) Simulasi (1.a)

Simulasi (1.a) menyatakan *Anomaly-history* I solusi lini yang diperoleh dari sistem persamaan berikut :

$$\bullet \frac{x_1(\varphi)}{\pi} = \frac{5 \times 10^{-5} (1,039 - 0,039 \cos \varphi) \sin 1,657 \varphi - 2,28 \times 10^{-6} \sin \varphi \cos 1,657 \varphi}{\pi}$$

dan diplotkan dengan nilai $\varphi_0 = 30$ sampai $\varphi_t = 50$.



Gambar 4.1 Simulasi (1.a)

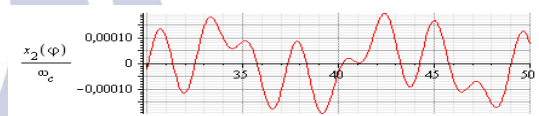
Simpangan sebenarnya bernilai 40 km. Nilai $\frac{x_1(\varphi)}{\pi} = -5 \times 10^{-6}$, sehingga posisi gerakan satelit pada kontrol perilaku *pitch* librasi bumi-satelit setiap setengah putaran mengelilingi bumi berada pada lintasannya.

2) Simulasi (1.b)

Simulasi (1.b) menyatakan *Anomaly-history* II solusi nonlinier yang diperoleh dari sistem persamaan berikut :

$$\bullet \frac{x_2(\varphi)}{\omega_c} = \frac{-2,1 \times 10^{-7} \sin \varphi \sin 1,657 \varphi + 1 \times 10^{-7} (0,964 + 0,036 \cos \varphi)}{1,183 \times 10^{-3}}$$

dan diplotkan dengan nilai $\varphi_0 = 30$ sampai $\varphi_t = 50$.



Gambar 4.2 Simulasi (1.b)

Simpangan sebenarnya bernilai 40 km. Nilai $\frac{x_2(\varphi)}{\omega_c} = -5 \times 10^{-4}$, sehingga posisi gerak satelit pada kontrol perilaku *pitch* librasi bumi-satelit setiap mengelilingi lintasan dengan kecepatan orbit $\omega_c = 1,183 \times 10^{-3} \text{ g rad/detik}$ tidak berada pada lintasannya.

3) Simulasi (1.c)

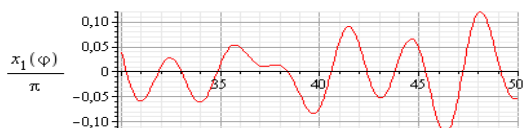
Simulasi (1.c) menyatakan *Anomaly-history* III solusi nonlinier yang diperoleh dari sistem persamaan berikut :

$$\bullet \frac{x_1(\varphi)}{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(5 \times 10^{-5} a \sin 1,657 \varphi - 2,2813 \times 10^{-6} b + (a \cos 1,657 \varphi + 4,5626 \times 10^{-2} c) \left(\int_0^\varphi (-(-519,5 \sin 1,657s + 19,5d + 22,813e) (-2,199028162 \times 10^{-4} f)) / -1,001596 \cos(1,657s)^2 + 1,92 \times 10^{-4} g + 1,404 \times 10^{-3} h + 9,58146 \times 10^{-2} i - 1,001596 \sin(1,657s)^2 + 1,92 \times 10^{-4} j + 1,404 \times 10^{-2} k + 9,58146 \times 10^{-2} l) ds \right) + (500a \sin 1,657 \varphi - 22,813b) \left(\int_0^\varphi ((-1,039 \cos 1,657s + 3,9 \times 10^{-2} m - 4,5626 \times 10^{-2} n) (-2,199028162 \times 10^{-4} f) / -1,001596 \cos(1,657s)^2 + 1,92 \times 10^{-4} g + 1,404 \times 10^{-3} h + 9,58146 \times 10^{-2} i -$$

$$1,001596 \sin(1,657s)^2 + 1,92 \times 10^{-4}j + 1,404 \times 10^{-2}k + 9,58146 \times 10^{-2}l) ds)$$

Keterangan	
$a = 1,039 - 0,039 \cos \varphi$	$i = \sin^2 \sin(1,657s)^2$
$b = \sin \varphi \cos 1,657\varphi$	$j = \cos s \sin(1,657s)^2$
$c = \sin \varphi \sin 1,657\varphi$	$k = \cos s^2 \sin(1,657s)^2$
$d = \cos s \sin 1,657s$	$l = \sin^2 \cos(1,657s)^2$
$e = \sin s \cos 1,657s$	$m = \cos s \cos 1,657s$
$f = \sin s + \sin 2s$	$n = \sin s \sin 1,657s$
$g = \cos s \cos(1,657s)^2$	$u = 0,964 + 0,036 \cos \varphi$
$h = \cos s^2 \cos(1,657s)^2$	

dan diplotkan dengan nilai $\varphi_0 = 30$ sampai $\varphi_t = 50$.



Gambar4.3 Simulasi (1.c)

Simpangan sebenarnya bernilai 40 km . Nilai $\frac{x_1(\varphi)}{\pi} = -0,07$, sehingga posisi gerakansatelitpadakontrol perilaku *pitch* librasi bumi-satelitsetiapsetengahputaranmengelilingibumi berada pada lintasannya.

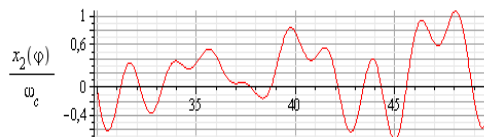
4) Simulasi (1.d)

Simulasi (1.d) menyatakan *Anomaly-history* II solusiononlinier yang diperoleh dari sistem persamaan berikut :

$$\bullet \frac{x_2(\varphi)}{\omega_c} = \frac{1}{1,183 \times 10^{-3}} \left(-2,1 \times 10^{-7}c + 1 \times 10^{-7}u \cos 1,657\varphi + (-4,2 \times 10^{-3}b - 2 \times 10^{-3}u \sin 1,657\varphi) \left(\int_0^\varphi (-((-5,19 \sin 1,657s + 19,5d + 22,813e)(-2,199028162f)) / (-1,001596 \cos(1,657s)^2 + 1,92 \times 10^{-4}g + 1,404 \times 10^{-3}h + 9,58146 \times 10^{-2}i - 1,001596 \sin(1,657s)^2 + 1,92 \times 10^{-4}j + 1,404 \times 10^{-2}k + 9,58146 \times 10^{-2}l) ds) + (-2,1c + u \cos 1,657\varphi) \left(\int_0^\varphi ((-1,039 \cos 1,657s + 3,9 \times 10^{-2}m - 4,5626 \times 10^{-2}n)(-2,199028162f)) / (-1,001596 \cos(1,657s)^2 + 1,92 \times 10^{-4}g + 1,404 \times 10^{-3}h + 9,58146 \times 10^{-2}i - 1,001596 \sin(1,657s)^2 + 1,92 \times 10^{-4}j + 1,404 \times 10^{-2}k + 9,58146 \times 10^{-2}l) ds) \right)$$

Keterangan	
$a = 1,039 - 0,039 \cos \varphi$	$i = \sin^2 \sin(1,657s)^2$
$b = \sin \varphi \cos 1,657\varphi$	$j = \cos s \sin(1,657s)^2$
$c = \sin \varphi \sin 1,657\varphi$	$k = \cos s^2 \sin(1,657s)^2$
$d = \cos s \sin 1,657s$	$l = \sin^2 \cos(1,657s)^2$
$e = \sin s \cos 1,657s$	$m = \cos s \cos 1,657s$
$f = \sin s + \sin 2s$	$n = \sin s \sin 1,657s$
$g = \cos s \cos(1,657s)^2$	$u = 0,964 + 0,036 \cos \varphi$
$h = \cos s^2 \cos(1,657s)^2$	

dan diplotkan dengan nilai $\varphi_0 = 30$ sampai $\varphi_t = 50$.



Gambar4.4 Simulasi (4.b)

Simpangan sebenarnya bernilai 40 km . Nilai $\frac{x_2(\varphi)}{\omega_c} = 0,8$, sehingga posisi gerakansatelitpadakontrol perilaku *pitch* librasi bumi-satelitsetiapmengelilingilintasandengankecepatan orbit $\omega_c = 1,183 \times 10^{-3}$ g rad/detik tidak berada pada lintasannya.

Simpulan

Dari hasil dan pembahasan diperoleh simpulan sebagai berikut:

1. Persamaanonlinierpada model persamaanyangmengaturkontrol perilaku*pitch* librasi bumi-satelit diberikan oleh :

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2} \omega_c^2 \left(\frac{1 + e \cos \varphi}{1 + e} \right)^3 \sigma \sin 2\theta = -2\omega_c^2 e \sin \varphi \left(\frac{1 + e \cos \varphi}{1 + e} \right)^3$$

2. Dengan menggunakan nilai parameter φ yang berbeda pada artikel utama, diperoleh nilai fungsi dalam φ yaitu $\frac{x_1(\varphi)}{\pi}$ dan $\frac{x_2(\varphi)}{\omega_c}$ yang minimum dan simulasi grafik yang periodik sehingga menunjukkan pergerakan satelit pada posisi yang seharusnya.

Saran

Penelitian ini ini masih dapat dikembangkan lagi, misalnya dengan menyederhanakan bentuk integral dari solusi umum ke suatu fungsi khusus sehingga dapat diketahui dengan lebih mudah simulasi solusi analitiknnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Anthony, Y.A., O.F. Emmanuel. 2012. "A Dynamical System Theory Solution To An Orbiting Earth-Satellite Model". *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. Vol. 76: pp 123-142
- Chicone, Carmen. 1999. *Ordinary Differential Equations with Applications*. New York: Texts in Applied Mathematics, Vol. 34. Springer.
- Emmanuel, O.F., A.Y. Aidoo, A.K. Amos. 2010. "Analytical Solution To A Highly Nonlinear Earth-Satellite Pitch Attitude Libration Equation". *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. Vol. 58: pp 425-434.
- Gerlach, O.H. 1965. "Attitude stabilization and control of earth satellite". *Space Science Reviews*. Vol. 4: pp 541-582
- Ives, N.E. 1962. *Principles of Attitude Control of Artificial Satellites*. London: Communicated by The Deputy Controller Aircraft (Research and Development), Ministry of Aviation.
- Jiajun, P.T. 2005. *The College of William and Mary. New Result in Floquet Theory*, (Online), (<http://www.math.wm.edu/~jptian/preprints/pr-6-floquet.pdf>, di unduh 12 juni 2014).
- Kaplan, Marshall H. 1976. *Modern Spacecraft Dynamics and Control*. New York: John Wiley and Sons.
- Mohler, R.R. 1991. *"Nonlinear Systems"*. Vol 1. Dynamics and Control. Prentice Hall.
- Naga, S Dali. 2009. *Mekanika Teoritik Pada Titik Zat Dan Benda Tegar*. Elearning Universitas Gunadarma, (Online), (http://elearning.gunadarma.ac.id/docmodul/mekanika_teoritik_pada_titik_zat_dan_benda_tegar/5_benda_padat_tegar_berukuran_.pdf, diunduh 11 Agustus 2014)
- Ouhocine, C., Filipski, M.N., Mohd Noor, S.B., M.R.Ajir. "Small Satellite Attitude Control And Simulation". *Jurnal Mekanikal*. Vol. 17: pp 36-37
- Rafal, W. 1996. *Satellite Attitude Control Using Only Electromagnetic Actuation*. Denmark: Department of Control Engineering Aalborg University.
- Siregar, Suryadi. 1978. *Mengenal Titik Librasi Disekitar Bumi*. Bandung: Almanak Nubika.
- Siregar, Suryadi. 2007. *Dasar-dasar lintasan satelit*. Bandung: Ebook Penerbit ITB.
- Thomson, W.T. 1961. *Introduction to Space Dynamics*. New York: John Wiley and Sons.
- Widodo, Slamet. 2012. "Prinsip Pengendalian Attitude Satelit LAPAN-TUBSAT". (http://jurnal.lapan.go.id/index.php/berita_dirgantara/index, diakses tanggal 11 Agustus 2014). Vol. 13: hal. 45-49
- (http://www.mat.uniroma2.it/~locatell/school1astronet2/material/Biggs_lectures.pdf, di unduh 12 juni 2014)