

ANALISIS KESTABILAN PADA REAKSI OSILASI FEROSIANIDA-IODAT-SULFIT

Annisatul Mufidah

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
annismath@gmail.com

ABSTRAK

Pada artikel ini dikaji model dari reaksi Ferosianida-Iodat-Sulfit (FIS) yang dapat menimbulkan osilasi antara iodat dan sulfit dalam larutan ferosianida. Model reaksi FIS ini telah direduksi dari 4 variabel konsentrasi dan 5 tahap reaksi sehingga hanya terdiri dari 2 variabel konsentrasi. Untuk menentukan kestabilan dari sistem persamaan model FIS ditentukan titik kritis yang terlebih dahulu dilakukan linierisasi sehingga diperoleh matriks Jacobi, kemudian dapat ditentukan kestabilan setiap titik kritis dengan menentukan nilai eigen. Dari nilai eigen dan menggunakan simulasi numerik matcont dapat diketahui terjadinya Bifurkasi Hopf dengan $k_1 = 0.7082466541$ merupakan titik bifurkasi. Dimana terjadi perubahan dari titik fokus yang stabil menjadi titik fokus yang tidak stabil dan diikuti dengan munculnya limit cycle.

Kata kunci: osilasi, matcont, Bifurkasi Hopf, limit cycle

ABSTRACT

In this article a model of the reaction studied Ferrocyanide-iodate-sulfite (FIS) which may lead to oscillations between iodate and sulfite in solution ferrocyanide. FIS reaction model has been reduced from 4 and 5 stag variable concentrations of the reaction so that only consists of 2 variable concentrations. To determine the stability of the system of equations model of FIS determined critical point linearization is first performed to obtain the Jacobi matrix, can then be determined by the stability of each critical point determines the eigenvalues . From the eigenvalues and using numerical simulations can matcont known occurrence of Bifurcation Hopf with $k_1 = 0.7082466541$ is the bifurcation point. Where there is a change from a stable focus point becomes unstable focal point and is followed by the appearance of a limit cycle.

Keywords: oscillation, matcont, Bifurcation Hopf, the limit cycle

1. PENDAHULUAN

Reaksi Ferosianida-Iodat-Sulfit (FIS) merupakan reaksi kimia yang menghasilkan osilasi. Reaksi osilasi pada reaksi kimia adalah reaksi kimia yang berlangsung jauh dari keadaan setimbang, dimana suatu gangguan terhadap sistem reaksi tidak diatasi oleh sistem. Sebelum reaksi FIS, sudah ada model yang menjelaskan tentang reaksi yang menghasilkan osilasi pada reaksi Belousov-Zhabotinskii (BZ), yaitu model Oregonator. Model Oregonator ini sebelumnya telah dibahas pada skripsi Putri Yuliana. (Yuliana, 2010)

Untuk itu, penulis akan membahas reaksi FIS yang melibatkan senyawa belerang yaitu reaksi campuran Landolt yang menimbulkan osilasi pada PH, konsentrasi HSO_3^- , SO_3^{2-} , dan I_2 dalam suatu *continuous flow stirred tank reactor* (CSTR) dengan konsentrasi iodat dan ferosianida dipertahankan tetap. (Tanasale, 2006)

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Laju Reaksi

Laju menyatakan seberapa cepat atau lambat suatu proses berlangsung. Laju reaksi umum dinyatakan sebagai laju pengurangan konsentrasi molar pereaksi atau laju penambahan konsentrasi molar produk untuk satu satuan waktu, yang dinyatakan sebagai berikut:

Molaritas atau konsentrasi molar (M) suatu larutan menyatakan jumlah mol spesi zat terlarut dalam 1 liter larutan atau jumlah milimol dalam 1 mL larutan. (Sutresna, 2004)

$$\text{Reaksi : } mR \rightarrow nP \\ v = -\frac{\Delta[R]}{\Delta t} \quad \text{atau} \quad v = +\frac{\Delta[P]}{\Delta t}$$

Keterangan :

- R = pereaksi
- P = produk
- v = laju reaksi

$\Delta[R]$ = perubahan konsentrasi molar pereaksi
 $\Delta[P]$ = perubahan konsentrasi molar produk
 $-\frac{\Delta[R]}{\Delta t}$ = laju pengurangan konsentrasi molar salah satu pereaksi dalam satu satuan waktu
 $+\frac{\Delta[P]}{\Delta t}$ = laju penambahan konsentrasi molar salah satu produk dalam satu satuan waktu.

2.1.1 Faktor yang Mempengaruhi Laju Reaksi

Beberapa faktor yang mempengaruhi laju reaksi yaitu (Goldberg, 2004)

a. Kehadiran katalis

Katalis adalah suatu zat yang meningkatkan kecepatan suatu reaksi kimia tanpa dirinya mengalami perubahan kimia yang permanen. Proses tersebut disebut dengan katalisis. (Keenan, 1995)

Suatu katalis diduga mempengaruhi kecepatan reaksi dengan salah satu jalan, yaitu :

- i. Katalisis Homogen (Pembentukan Senyawa-Antara)
- ii. Katalisis Heterogen (Adsorpsi)

Katalisis Homogen (Pembentukan Senyawa-Antara)

Maksud dari pembentukan senyawa-antara adalah mencari suatu zat yakni katalis yang dapat bereaksi baik dengan molekul yang kekurangan energi pengaktifan maupun dengan molekul yang kelebihan energi pengaktifan, kemudian bereaksi membentuk zat yang diinginkan.

Katalisis Heterogen (Adsorpsi)

Banyak zat padat yang bertindak sebagai katalis, dapat mengikat cukup banyak kuantitas gas dan cairan pada permukaan dengan berdasarkan adsorpsi. Contoh katalis heterogen adalah logam seperti Pt, Cr dan Ni. Logam tersebut mempercepat reaksi-reaksi gas dengan cara membentuk ikatan lemah antara gas dan atom-atom logam pada permukaan. Proses tersebut disebut *adsorpsi*.

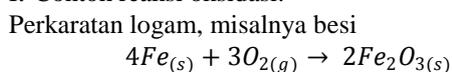
b. Konsentrasi zat pereaksi

Persamaan laju reaksi juga didefinisikan dalam bentuk konsentrasi pereaksi. Dengan naiknya konsentrasi maka naik pula kecepatan reaksinya dan sebaliknya.

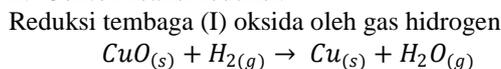
2.2 Reaksi Oksidasi dan Reduksi

Istilah oksidasi mengacu pada pelepasan elektron, sedangkan istilah reduksi mengacu pada penangkapan elektron.

- i. Contoh reaksi oksidasi:

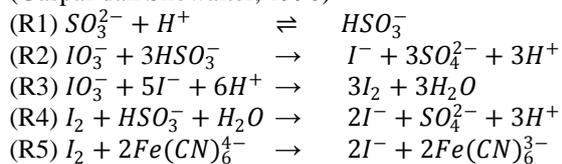


- ii. Contoh reaksi reduksi:



2.3 Reaksi Ferosianida-Iodat-Sulfit (FIS)

Reaksi Ferosianida-Iodat-Sulfit (FIS) merupakan reaksi kimia yang menghasilkan osilasi. Terdapat beberapa reaksi FIS yang menunjukkan adanya gejala reaksi osilasi yaitu (Gaspar dan Showalter, 1990)



2.4 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan 2. (Finizio dan Ladas, 1998)

2.5 Sistem Persamaan Diferensial Linier

Misalkan sistem persamaan diferensial linier dinyatakan sebagai berikut:

$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (1)

Dengan A adalah matriks koefisien berukuran $n \times n$, vektor konstan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ dan kondisi awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Sistem (1) disebut homogen jika $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ dan disebut non homogen jika $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

2.6 Titik Kritis

Diberikan sistem persamaan diferensial berbentuk

$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (2)

Titik \mathbf{x}^* disebut titik kritis dari persamaan (2), jika $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. Titik kritis disebut juga titik tetap atau titik kesetimbangan. (Tu, 1994)

2.7 Pelinieran

Misalkan sistem persamaan diferensial tak linier pada sistem (2) untuk $n = 2$ diberikan sebagai berikut

$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2)$
 $\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$ (3)

Dengan turunan-turunan parsial fungsi f_1 dan f_2 kontinu di \mathbb{R}^2 .

Dengan menggunakan ekspansi Taylor di sekitar titik kritis (x_1^*, x_2^*) , ruas kanan dari sistem (3) menjadi

$f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^*) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1^2} (x_1 - x_1^*)^2 + 2 \frac{\partial^2 f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) + \frac{\partial^2 f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2^2} (x_2 - x_2^*)^2 \right] + \dots$

$$f_2(x_1, x_2) = f_2(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^*) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1^2} (x_1 - x_1^*)^2 + 2 \frac{\partial^2 f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1 - x_1^*) (x_2 - x_2^*) + \frac{\partial^2 f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2^2} (x_2 - x_2^*)^2 \right] + \dots \quad (4)$$

Hasil ekspansi Taylor pada persamaan (4) juga dapat ditulis sebagai berikut

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^*) + \varphi_1(x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*)$$

$$f_2(x_1, x_2) = f_2(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^*) + \varphi_2(x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*) \quad (5)$$

dimana φ_1 dan φ_2 adalah fungsi tak linier.

Jika didefinisikan variabel-variabel baru

$$\xi_1 = x_1 - x_1^* \text{ dan } \xi_2 = x_2 - x_2^* \text{ maka diperoleh}$$

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{d(x_1 - x_1^*)}{dt} = f_1(x_1, x_2) - f_1(x_1^*, x_2^*)$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{d(x_2 - x_2^*)}{dt} = f_2(x_1, x_2) - f_2(x_1^*, x_2^*) \quad (6)$$

Substitusi sistem (6) ke (5) sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi_1, \xi_2) \\ \varphi_2(\xi_1, \xi_2) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(\xi_1, \xi_2)}{r} = 0, \text{ dimana } i = 1, 2 \text{ dan } r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

Sehingga sistem (7) menjadi

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Bentuk sistem (8) disebut pelinieran dari sistem persamaan diferensial tak linier pada sistem (2).

Secara umum, jika diberikan n persamaan diferensial tak linier

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

Dengan menggunakan ekspansi Taylor di sekitar titik kritis \mathbf{x}^* , persamaan (9) dapat ditulis sebagai

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

Dimana persamaan (10) adalah persamaan diferensial tak linier dengan

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{Df}(\mathbf{x}^*) \equiv \mathbf{Df}(\mathbf{x})_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{bmatrix}$$

Dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ adalah fungsi tak linier yang memenuhi kondisi $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*} \frac{\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} = 0$. $\mathbf{A}\mathbf{x}$ pada sistem (10) merupakan pelinieran sistem (10) dalam bentuk $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Matriks koefisien \mathbf{A} untuk sistem (10) merupakan matriks Jacobi di sekitar titik kritis \mathbf{x}^* . (Tu, 1994)

2.8 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Diberikan persamaan diferensial linier homogen sebagai berikut

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Solusi sistem (11) adalah $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$, \mathbf{v} adalah vektor konstan. Untuk mengetahui $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ solusi dari sistem (11) dengan mensubstitusi $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ ke sistem (11)

$$\frac{d}{dt} (e^{\lambda t} \mathbf{v}) = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} \text{ dan } \mathbf{A}(e^{\lambda t} \mathbf{v}) = e^{\lambda t} \mathbf{A}\mathbf{v}$$

$$\text{Maka } \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = e^{\lambda t} \mathbf{A}\mathbf{v}$$

Bagi kedua ruas persamaan tersebut dengan $e^{\lambda t}$ sehingga diperoleh

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad (12)$$

Sehingga $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ adalah solusi dari sistem persamaan (11) jika dan hanya jika \mathbf{v} dan λ memenuhi sistem (12). Suatu vektor tak nol \mathbf{v} yang memenuhi sistem (12) disebut vektor eigen dari \mathbf{A} dengan nilai eigen λ . Sistem persamaan (12) disebut sistem eigen (Sistem (12) disebut sistem eigen).

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda \mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} \quad (13)$$

Tetapi sistem (13) memiliki solusi tak nol \mathbf{v} jika dan hanya jika $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$. Sehingga nilai eigen λ dari \mathbf{A} adalah suatu akar persamaan

$$\mathbf{0} = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Dan vektor eigen dari \mathbf{A} adalah solusi tak nol dari persamaan $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, untuk suatu nilai λ . Determinan $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ disebut *polinom karakteristik* dari \mathbf{A} yang dapat dinotasikan sebagai $p(\lambda)$.

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) =$$

$$(-1)^k \lambda^k + (-1)^{k-1} \lambda^{k-1} c_1 + \dots + c_k = 0 \quad (14)$$

Suatu koefisien c_r adalah penjumlahan minor utama berderajat r ($1 \leq r \leq k$) dengan

$c_1 = \sum_1^k a_{11} = \text{trace } \mathbf{A}$ yaitu penjumlahan minor utama berderajat 1 atau penjumlahan semua suku diagonal matriks \mathbf{A} .

$c_2 =$ penjumlahan semua minor utama berderajat dua, dan seterusnya.

$$c_k = \det \mathbf{A}$$

2.9 Kestabilan Titik Kritis

Penentuan kestabilan titik kritis didapat dengan melihat nilai-nilai eigen matriks Jacobi \mathbf{A} , yaitu misal λ_i nilai eigen dengan $i = 1, 2, \dots, n$, yang

diperoleh dari $\det (A - \lambda I) = 0$. Menurut Tu (1994), secara umum kestabilan titik kritis mempunyai 2 perilaku yaitu:

1. Stabil, jika
 - a. Setiap nilai eigen bernilai negatif ($\lambda_i < 0$ untuk setiap i).
 - b. Setiap nilai eigen kompleks memiliki bagian real negatif atau sama dengan nol, ($\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ untuk setiap i).
2. Tak stabil, jika
 - a. Setiap nilai eigen bernilai positif atau sama dengan nol, ($\lambda_i \geq 0$ untuk setiap i).
 - b. Setiap nilai eigen kompleks memiliki bagian real positif, ($\text{Re}(\lambda_i) > 0$ untuk setiap i).

Tabel 2.1. Kriteria kestabilan titik kritis berdasarkan nilai eigen (Tu, 1994)

Real, berbeda, bertanda sama	Node	Stabil asimtotik: setiap nilai eigen bernilai negatif Tak stabil: setiap nilai eigen bernilai positif
Real, berbeda, berlawanan tanda	Pelana/saddle	Tak stabil
Real, Sama	Improper node	Stabil asimtotik: setiap nilai eigen bernilai negatif Tak stabil: setiap nilai eigen bernilai positif
Kompleks sekawan tetapi bukan imajiner murni	Fokus/spiral	Stabil asimtotik: bagian real negatif Tak stabil: bagian real positif
Imajiner murni	Pusat/center	Stabil

2.10 Bifurkasi Hopf

Bifurkasi umumnya digunakan dalam mempelajari dinamika non linear yaitu menggambarkan beberapa perubahan perilaku dari sistem dengan beberapa nilai parameter yang bervariasi. Sebuah titik bifurkasi adalah titik di dalam ruang parameter dimana bifurkasi terjadi.

Teori bifurkasi semakin berkembang dengan ditemukan bifurkasi Hopf. Bifurkasi Hopf adalah bifurkasi yang terjadi apabila matriks Jacobinya mempunyai sebuah pasangan bilangan kompleks dengan nilai eigen bagian real bernilai nol dan nilai eigen bagian imajiner tidak sama dengan nol. Bifurkasi Hopf digunakan untuk menentukan eksistensi orbit periodik atau *limit cycle* dari suatu sistem. (Zulminarni, 2007)

3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan ke dalam jenis studi literatur karena penelitian ini membahas tentang analisis kestabilan pada reaksi berosilasi Ferosianida-Iodat-Sulfit (FIS) berdasarkan referensi-referensi yang mendukung. Dari studi literatur menunjukkan bahwa reaksi berosilasi Ferosianida-Iodat-Sulfit (FIS) dapat dianalisis kestabilannya dengan menggunakan linierisasi.

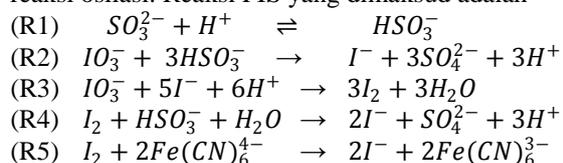
3.2 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian dalam skripsi ini dideskripsikan sebagai berikut:

1. Penulis mengumpulkan sumber-sumber dari jurnal, buku cetak, dan internet.
2. Dari literatur yang diperoleh, penulis memodelkan reaksi osilasi FIS.
3. Lalu menentukan titik kritis yang memenuhi dari model reaksi osilasi FIS.
4. Kemudian model reaksi osilasi FIS dilinierisasi di sekitar titik kritisnya.
5. Setelah itu menentukan nilai eigen pada model reaksi osilasi Ferosianida-Iodat-Sulfit (FIS).
6. Lalu menganalisis kestabilan dan jenis masing-masing titik kritis berdasarkan nilai eigennya.
7. Melakukan simulasi numerik menggunakan software Matcont.
8. Menarik kesimpulan dari analisis yang telah dilakukan di atas.

4. PEMBAHASAN

Gaspar dan Showalter berhasil menggunakan model dari 4 variabel konsentrasi dan 5 tahap reaksi untuk menjelaskan reaksi berosilasi antara iodat dan sulfit dalam larutan ferosianida. Model tersebut telah direduksi sehingga hanya terdiri dari 2 variabel konsentrasi. Kelima tahap reaksi dibutuhkan untuk menunjukkan adanya gejala reaksi osilasi. Reaksi FIS yang dimaksud adalah



Kelima reaksi FIS masing-masing mempunyai laju reaksi. Berikut ini merupakan besarnya tetapan laju reaksi untuk model reaksi FIS (Tanasale, 2006)

Tabel 4.1 Besarnya tetapan laju reaksi untuk model reaksi FIS

	FIS
k_2	$0.1 M^{-1} s^{-1}$
k_3	$1 M^{-1} s^{-1}$
k_4	$2 M^{-1} s^{-1}$

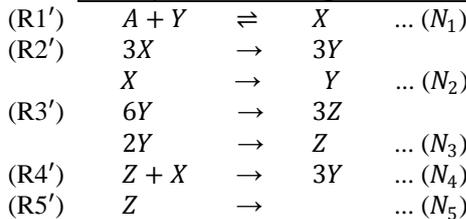
4.1 Pemodelan matematika

4.1.1 Pemodelan 4 Variabel

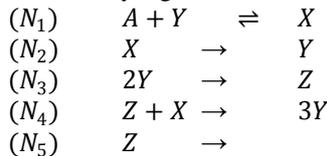
Dari kelima reaksi FIS, selanjutnya dimisalkan setiap senyawa pada masing-masing reaksi.

Tabel 4.2 Identifikasi simbol dari senyawa-senyawa pada reaksi FIS

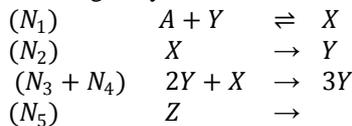
A	SO_3^{2-}
X	HSO_3^-
Y	H^+
Z	I_2



Pemodelan kelima reaksi di atas menghasilkan 4 variabel yang diberikan oleh reaksi di bawah ini

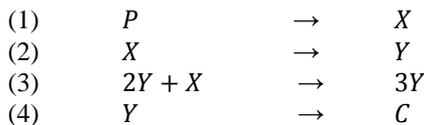


Reaksi (N₁) – (N₅) dapat disederhanakan menjadi 4 reaksi dengan mensubstitusi (N₃) ke (N₄) menjadi satu langkah yaitu



4.1.2 Pemodelan 2 Variabel

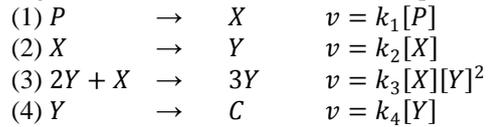
Reaksi FIS yang terdiri dari 4 variabel konsentrasi dapat direduksi menjadi 2 variabel konsentrasi. Model tereduksi tersebut adalah:



Tabel 4.3 Identifikasi simbol dari senyawa-senyawa pada reaksi FIS

	FIS
P	$SO_3^{2-} + H^+$
X	HSO_3^-
Y	H^+
C	Produk pembatas konsentrasi

Laju reaksi dari reaksi FIS tersebut dapat ditulis:



Persamaan diferensial laju reaksi terhadap waktu pada persamaan reaksi FIS yang telah ditransformasikan di atas untuk P, X dan Y. Pada zat pereaksi, laju reaksi bernilai negatif (-), dan pada produk laju reaksi bernilai positif (+).

Sehingga dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = -k_1[P]$$

$$\frac{dX}{dt} = k_1[P] - k_2[X] - k_3[X][Y]^2$$

$$\frac{dY}{dt} = k_2[X] + k_3[X][Y]^2 - k_4[Y]$$

Karena konsentrasi P dibuat tetap (konstan), maka $\frac{dP}{dt} = 0$

Sehingga persamaan laju reaksi untuk reaksi FIS:

$$\frac{dX}{dt} = k_1[P] - k_2[X] - k_3[X][Y]^2 \quad (14)$$

$$\frac{dX}{dt} = k_1 - k_2[X] - k_3[X][Y]^2 \quad (15)$$

$$\frac{dY}{dt} = k_2[X] + k_3[X][Y]^2 - k_4[Y] \quad (16)$$

Persamaan (14) dapat ditulis sebagai persamaan (15) karena konsentrasi P dibuat tetap.

4.2 Pendekatan Steady State terhadap Suatu

Konsentrasi

Steady state merupakan keadaan dimana suatu reaksi berada pada kesetimbangan. Konsentrasi ion bisulfid [HSO_3^-] (disimbolkan x) dalam steady state berhubungan dengan konsentrasi ion [H^+] (disimbolkan y). Nilai kondisi steady state x adalah $\frac{dx}{dt} = 0$ dan nilai kondisi steady state y adalah $\frac{dy}{dt} = 0$, persamaan (15) dan (16) menjadi:

$$k_1 - k_2x - k_3xy^2 = 0 \quad (17)$$

$$k_2x + k_3xy^2 - k_4y = 0 \quad (18)$$

Eliminasi persamaan (17) dan (18) menjadi

$$k_1 - k_2x - k_3xy^2 = 0$$

$$\frac{k_2x + k_3xy^2 - k_4y = 0}{k_1 - k_4y = 0} +$$

$$k_4y = k_1$$

$$y_{ss} = \frac{k_1}{k_4} \quad (19)$$

Untuk mendapatkan nilai kondisi steady state untuk x adalah $\frac{dx}{dt} = 0$, dengan mensubstitusi persamaan (19) ke persamaan (17) yaitu

$$k_1 - k_2x - k_3xy^2 = 0$$

$$k_1 - k_2x - k_3x \left(\frac{k_1}{k_4}\right)^2 = 0$$

$$k_1k_4^2 - k_2xk_4^2 - k_1^2k_3x = 0$$

$$k_1k_4^2 = (k_2k_4^2 + k_1^2k_3)x$$

$$x_{ss} = \frac{k_1k_4^2}{k_2k_4^2 + k_1^2k_3} \quad (20)$$

4.3 Analisis Kestabilan Titik Kritis

Analisis kestabilan titik kritis model FIS dilakukan dengan menentukan nilai eigen matriks Jacobian dari persamaan linierisasinya.

Dari persamaan (15) dan persamaan (16) dapat dicari titik-titik kestabilannya.

$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2x - k_3xy^2$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2x + k_3xy^2 - k_4y$$

Untuk menentukan kestabilan dari sistem persamaan model FIS terlebih dahulu ditentukan titik kritis dengan mengambil $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$

$$k_1 - k_2x - k_3xy^2 = 0 \tag{17}$$

$$k_2x + k_3xy^2 - k_4y = 0 \tag{18}$$

Dari persamaan (17) dan persamaan (18) akan diperoleh titik kritis yaitu $A \left[\frac{k_1k_4^2}{k_2k_4^2+k_1^2k_3}, \frac{k_1}{k_4} \right]$

Matriks Jacobi dari persamaan (15) dan persamaan (16) di titik kritis (x_{ss}, y_{ss}) adalah

$$J = \begin{bmatrix} -k_2 - k_3y^2 & -2k_3xy \\ k_2 + k_3y^2 & 2k_3xy - k_4 \end{bmatrix}_{(x,y)}$$

Untuk menentukan sifat kestabilan dari titik setimbang A maka langkah yang dilakukan adalah mencari nilai eigen dari matriks jacobinya.

Dengan mensubstitusi $A \left[\frac{k_1k_4^2}{k_2k_4^2+k_1^2k_3}, \frac{k_1}{k_4} \right]$ menjadi

$$J_A = \begin{bmatrix} -k_2 - \frac{k_3k_1^2}{k_4^2} & -\frac{2k_3k_1^2k_4}{k_2k_4^2+k_3k_1^2} \\ k_2 + \frac{k_3k_1^2}{k_4^2} & \frac{2k_3k_1^2k_4}{k_2k_4^2+k_3k_1^2} - k_4 \end{bmatrix}$$

Dengan mensubstitusi nilai parameter $k_2 = 0.1$, $k_3 = 1$, dan $k_4 = 2$ sehingga menjadi

$$J_A = \begin{bmatrix} -0.1 - \frac{k_1^2}{4} & -\frac{4k_1^2}{0.4+k_1^2} \\ 0.1 + \frac{k_1^2}{4} & \frac{4k_1^2}{0.4+k_1^2} - 2 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen ditentukan oleh persamaan $|J_A - \lambda I| = 0$ dengan I adalah matriks identitas dan λ adalah nilai eigen maka diperoleh

$$\begin{vmatrix} -0.1 - \frac{k_1^2}{4} - \lambda & -\frac{4k_1^2}{0.4+k_1^2} \\ 0.1 + \frac{k_1^2}{4} & \frac{4k_1^2}{0.4+k_1^2} - 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(-0.1 - \frac{k_1^2}{4} - \lambda\right) \left(\frac{4k_1^2}{0.4+k_1^2} - 2 - \lambda\right) - \left(0.1 + \frac{k_1^2}{4}\right) \left(-\frac{4k_1^2}{0.4+k_1^2}\right) = 0$$

Dengan nilai eigen (akar-akar karakteristik) adalah $\lambda_1 =$

$$-\frac{1}{8} \frac{-14k_1^2 + 108 + k_1^4 - \sqrt{320k_1^4 - 46872k_1^2 - 184k_1^6 + 21744 + k_1^2}}{0.4+k_1^2}$$

$\lambda_2 =$

$$-\frac{1}{8} \frac{-14k_1^2 + 108 + k_1^4 + \sqrt{320k_1^4 - 46872k_1^2 - 184k_1^6 + 21744 + k_1^2}}{0.4+k_1^2}$$

Nilai eigen λ_1 dan λ_2 bergantung pada nilai $k_1 > 0$, maka:

a. Untuk $0 < k_1 < 0.7082466541$

Diperoleh nilai eigen λ_1 dan λ_2 bergantung pada nilai k_1 , maka:

Untuk $0 < k_1 < 0.7082466541$, misal diambil $k_1 = 0.6$. Karena $\lambda_{1,2}$ dengan bagian real bernilai negatif, maka titik setimbang A berupa fokus stabil.

b. Untuk $k_1 = 0.7082466541$

Diperoleh nilai eigen λ_1 dan λ_2 bergantung pada nilai k_1 , maka:

Pada $k_1 = 0.7082466541$, $\lambda_{1,2}$ dengan bagian real bernilai 0, maka titik setimbang A berupa fokus stabil tetapi membutuhkan waktu lebih lama untuk menuju titik setimbang.

c. Untuk $k_1 > 0.7082466541$

Diperoleh nilai eigen λ_1 dan λ_2 bergantung pada nilai k_1 , maka:

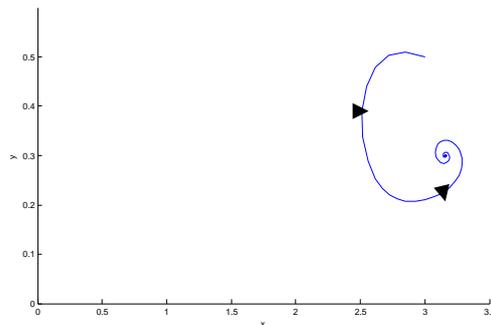
Untuk $k_1 > 0.7082466541$, misal diambil $k_1 = 1$. Karena $\lambda_{1,2}$ dengan bagian real bernilai positif, maka titik setimbang A berupa fokus tidak stabil.

4.4 Simulasi Numerik

Untuk mengetahui jenis dari setiap titik kritis yang diperoleh dari sistem persamaan (15) dan (16) maka dapat mengambil dari beberapa kemungkinan parameter. Dari kasus tersebut kita tetapkan satu variabel sebagai parameter yaitu k_1 dan variabel yang lain sudah ditetapkan.

a. Simulasi numerik pada saat $k_1 = 0.6$

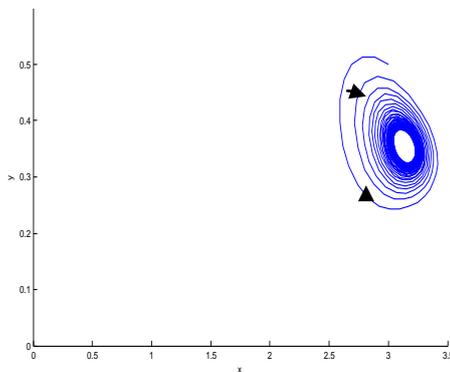
Akan diamati perubahan perilaku yang terjadi pada saat $0 < k_1 < 0.7082466541$, misal diambil $k_1 = 0.6$ maka nilai eigennya adalah $\lambda_{1,2} = -0.1476315790 \pm 0.598502281 I$. Terlihat bahwa nilai eigennya adalah imajiner dengan bagian real bernilai negatif. Dengan demikian titik setimbang $(3.157894737, 0.3)$ merupakan titik fokus yang stabil.



Gambar 4.1 Simulasi numerik pada saat $k_1 = 0.6$ melalui titik awal $(3,0.5)$

b. Simulasi numerik pada saat $k_1 = 0.7082466541$

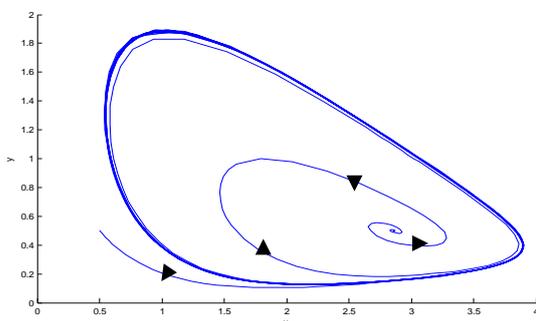
Akan diamati perubahan perilaku yang terjadi pada saat $k_1 = 0.7082466541$ maka nilai eigennya adalah $\lambda_{1,2} = 0 \pm 0.6714213739 I$. Terlihat bahwa nilai eigennya adalah imajiner dengan bagian real bernilai 0. Dengan demikian titik setimbang $(3.142130383, 0.3541233270)$ merupakan titik fokus yang stabil tetapi membutuhkan waktu lebih lama untuk menuju titik setimbang.



Gambar 4.2 Simulasi numerik pada saat $k_1 = 0.7082466541$ melalui titik awal $(3, 0.5)$

c. Simulasi numerik pada saat $k_1 = 1$

Akan diamati perubahan perilaku yang terjadi pada saat $k_1 > 0.7082466541$, misal diambil $k_1 = 1$ maka nilai eigennya adalah $\lambda_{1,2} = 0.2535714286 \pm 0.7973089305 I$. Terlihat bahwa nilai eigennya adalah imajiner dengan bagian real bernilai positif. Dengan demikian titik setimbang $(2.857142857, 0.5)$ merupakan titik fokus yang tidak stabil.



Gambar 4.3 Simulasi numerik pada saat $k_1 = 1$ melalui titik awal $(0.5, 0.5)$, dan $(2.857142857, 0.5)$

Dari gambar 4.1-gambar 4.3 menunjukkan terjadinya Bifurkasi Hopf dengan $k_1 = 0.7082466541$ merupakan titik bifurkasi. Dimana terjadi perubahan dari titik fokus yang stabil menjadi titik fokus yang tidak stabil dan diikuti dengan munculnya limit cycle.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

1. Model matematika dari reaksi Ferrosianida-Iodat-Sulfit (FIS) dalam bentuk sistem persamaan diferensial adalah $\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2x - k_3xy^2$ dan $\frac{dy}{dt} = k_2x + k_3xy^2 - k_4y$
2. Dari model matematika reaksi Ferrosianida-Iodat-Sulfit (FIS) dalam bentuk sistem persamaan diferensial dapat ditentukan penyelesaian sistem persamaan diferensialnya berupa titik kritis yaitu $A \left[\frac{k_1 k_4^2}{k_2 k_4^2 + k_1^2 k_3}, \frac{k_1}{k_4} \right]$
3. Analisis kestabilan titik kritis dari sistem persamaan model FIS dapat dilakukan dengan menentukan nilai eigen matriks Jacobian dari persamaan linierisasinya. Sehingga dapat diketahui bahwa pada saat $k_1 = 0.5$ dan $k_1 = 0.6$ yang terdapat pada $0 < k_1 < 0.7082466541$ menunjukkan titik setimbang A berupa fokus stabil. Saat $k_1 = 0.7082466541$, titik setimbang A berupa fokus stabil tetapi membutuhkan waktu lebih lama untuk menuju titik setimbang. Sedangkan pada $k_1 = 0.8$, $k_1 = 0.9$, dan $k_1 = 1$ untuk $k_1 > 0.7082466541$ menunjukkan titik setimbang A berupa fokus tidak stabil. Secara simulasi numeric dapat disimpulkan adanya reaksi osilasi pada reaksi FIS yang menunjukkan terjadinya Bifurkasi Hopf dengan $k_1 = 0.7082466541$ merupakan titik bifurkasi. Dimana terjadi perubahan dari titik fokus yang stabil menjadi titik fokus yang tidak stabil dan diikuti dengan munculnya limit cycle.

5.2 Saran

Dalam skripsi ini penulis menggunakan model reaksi FIS (Ferrosianida-Iodat-Sulfit) untuk menganalisis kesetimbangan pada reaksi tergantung pada beberapa kemungkinan parameter. Dari kasus tersebut kita tetapkan satu variabel sebagai parameter yaitu k_1 dan variabel yang lain sudah ditetapkan. Untuk itu penulis ingin menyarankan hendaknya dilakukan penelitian lebih lanjut tentang bifurkasi pada sistem ini.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]Finizio, J; Ladas, T. 1998. *Penerapan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Edisi Kedua. Terjemahan Widiarto Santoso. Jakarta: Erlangga
- [2]Goldberg, David E. 2004. *Kimia untuk Pemula*. Erlangga: Jakarta
- [3]Hera. *Laju Reaksi Kimia*. (<http://hera-kimia.blogspot.com/>, diakses tanggal 18 Januari 2014)

- [4]Keenan, Charles W. 1995. *Ilmu Kimia untuk Universitas Jilid 1*. Erlangga: Jakarta
- [5]Melani. *Reaksi Reduksi Oksidasi ppt.*([http://tunasharapan.sch.id/eliatour/bahan/Reaksi Reduksi Oksidasi.ppt](http://tunasharapan.sch.id/eliatour/bahan/Reaksi%20Reduksi%20Oksidasi.ppt), diakses 18 Januari 2014)
- [6]Morie, Indigo. *Hal-hal yang Mempengaruhi Laju Reaksi.*(<http://belajarkimia.com/hal-hal-yang-mempengaruhi-laju-reaksi>, diakses 18 Januari 2014)
- [7]Tanasale, M.F.J.D.P & Rahayu, S.I. *Siklus Batas Model Tereaksi Reaksi Osilasi Ferosianida-Iodat-Sulfit*. Seminar Nasional Kimia. 2006
- [8]Taufiqullah. *Pengertian Laju Reaksi.* (<http://masteropik.blogspot.com/2010/05/pengertian-laju-reaksi.html>, diakses 18 Januari 2014)
- [9]Tu, P.N.V. 1994. *Dynamical System, An Introduction with Applications in Economics and Biology*. Second Revision and enlarged edition. New York. Springer-Verlag.
- [10]V.Gaspar and K Showalter. *A Simple Model for the Oscillatory Iodate Oxidation of Sulfite and Ferrocyanide*. J. Phys. Chem. 1990, 94, 4973-4979
- [11]Yuliana, Putri.2010. *Pemodelan Reaksi Kimia Bersilasi Tipe Oregonator*. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya
- [12]Zulminarni. 2007.*Stabilitas dan Bifurkasi Hopf pada Sistem Autonomous Non Linear Tiga Dimensi*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh November
(<http://digilib.its.ac.idpublicITS-Master-7721-1205201703-bab1.pdf>, diakses 21 Juli 2014)

