PEWARNAAN TITIK PADA GRAF FUZZY

Achmad Fuad

S1 Matematika, Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, email: achmadfuad36@yahoo.co.id

Budi Rahadjeng, S.Si, M.Si.

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, email : rahajeng13@yahoo.com

ABSTRAK

Keluarga himpunan $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\}$ dari subset fuzzy pada V disebut k-pewarnaan fuzzy dari $G(V,\sigma,\mu)$ jika memenuhi syarat $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \ldots \cup \gamma_k = \sigma$, $min\left\{\gamma_i(u), \gamma_j(u) | 1 \le i \ne j \le k\right\} = 0,\ \forall\, u \in V$, dan setiap pasang titik u dan v yang berhubungan kuat $min\{\gamma_i(u), \gamma_i\,(v)\} = 0$. Pada graf fuzzy sepasang titik dikatakan berhubungan lemah jika $\mu(u,v) < \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$ dan berhubungan kuat jika $\mu(u,v) \ge \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$. Pewarnaan minimum dari pewarnaan suatu graf fuzzy disebut bilangan kromatik fuzzy dan dilambangkan $\chi_F(G)$. Pada suatu graf fuzzy jika setiap pasang titiknya berhubungan lemah maka bilangan kromatik nya $\chi_F(G) = 1$, graf fuzzy ini disebut graf fuzzy trivial. Sebaliknya jika setiap pasang titik pada suatu graf fuzzy berhubungan kuat maka $\chi_F(G) = n$. Skripsi ini juga mengkaji tentang bilangan kromatik pada Graf fuzzy sikel berdasarkan banyak titik pada graf fuzzy sikel. Misalkan graf fuzzy sikel dengan banyak titiknya adalaha genap dan bukan trivial maka bilangan kromatik fuzzynya adalah 2. Jika sikel fuzzy dengan banyak titiknya ganjil dan setiap pasang titiknya berhubungan kuat, maka bilangan kromatik fuzzynya adalah 3. Sebaliknya jika graf fuzzy sikel dengan banyak titiknya ganjil dan ada setidaknya satu pasang titik yang berhubungan lemah dan bukan merupakan graf fuzzy trivial, maka bilangan kromatik fuzzynya adalah 2.

Kata kunci : graf fuzzy sikel, k-pewarnaan titk fuzzy pada graf fuzzy, bilangan kromatik fuzzy.

ABSTRACT

Family $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\}$ which γ_I is subset fuzzy of fuzzy set on V. Γ is called a k-fuzzy coloring of $G(V,\sigma,?)$ if : $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_k = \sigma$, $min\left\{\gamma_i(u), \gamma_j(u) | 1 \le i \ne j \le k\right\} = 0,\ \forall\, u \in V$, and $\forall\, u, v \in V$ which stronge adjacent, $\min\left\{\gamma_i(u), \gamma_i(v) | (1 \le i \le k)\right\} = 0$. On fuzzy graph a pair vertices called weakly adjacent if $\mu(u,v) < \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$ and called strongly adjacent if $\mu(u,v) \ge \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$.Minimum coloring of fuzzy graph called fuzzy chromatic number and denoted $\chi_F(G)$. On fuzzy graph if each pair is weakly adjacent then the chromatic number of fuzzy graph $\chi_F(G) = 1$, this fuzzy graph is called fuzzy graph trivial. Otherwise if every pair of vertices on a graph fuzzy is strongly adjacent then the chromatic number of fuzzy graph is $\chi_F(G) = n$. This thesis discuss about fuzzy chromatic number on cycle fuzzy based length of cycle. Let cycle fuzzy with even length and not fuzzy graph trivial so fuzzy chromathic number is 2. And if a fuzzy graph cycle odd length and not fuzzy graph trivial then $\chi_F(G) = 2$ if there exists at least a pair of vertices are weakly adjacent, and $\chi_F(G) = 3$.

Key words: fuzzy graph, fuzzy graph complement, fuzzy graph cycle, k-coloring vertex of fuzzy graph, chromatic number of fuzzy graph.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak digunakan untuk mempermudah suatu penyelesaian masalah. Dengan merepresentasikan persoalan ke dalam bentuk graf, maka persoalan dijelaskan secara lebih sederhana. Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan bertambah lagi satu bahasan matematika yaitu himpunan fuzzy. Himpunan fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh *Prof. Zadeh.*

Pada perkuliahan teori graf telah dibahas mengenai pewarnaan titik pada suatu graf serta bilangan kromatik pada suatu graf. Pada aplikasinya pewarnaan titik pada graf tidak dapat digunakan dalam permasalahan yang lebih kompleks. Dan kemudian pewarnaan titik diperluas pada graf fuzzy, salah satu jurnal yang membahas mengenai pewarnaan titik fuzzy pada graf fuzzy adalah “An Upper Bound For Fuzzy Chromatic Number Of Fuzzy Graphs And Their Complement” oleh Isnaini Rosyida. Berdasarkan jurnal tersebut skripsi ini akan mengkaji lebih dalam mengenai pewarnaan titik pada graf fuzzy dan bilangan kromatik pada graf fuzzy dan pada macam-macam graf fuzzy.

Sistematika penulisan skripsi ini dimulai dengan pendahuluan pada bab I. Dan kajian teori pada bab II berisi teori-teori yang mendukung materi yang akan dibahas. Bab III berisi pembahasan, yang akan difokuskan pada definisi, teorema, dan lemma mengenai pewarnaan titik graf fuzzy serta bilangan kromatik pada graf fuzzy dan pada macam-macam graf fuzzy.

KAJIAN TEORI

2.1.Graf Fuzzy

Definisi 2.1.1:

Misal V adalah himpunan titik berhingga dan tidak kosong. Graf fuzzy $G(V,\sigma,\mu)$ berisikan V dan sepasang fungsi (σ,μ), dimana $\sigma : V \to [0,1]$, $\mu : V{\times}V \to [0,1]$, sedemikian hingga:

$$\mu(u,v) \le min\{\sigma(u),\sigma(v)\}, \forall\, u,v \in V.$$

Graf fuzzy $G(V,\sigma,\mu)$ dapat disajikan dalam bentuk diagram dimana himpunan fuzzy pada V adalah titiknya dan himpunan fuzzy pada $V{\times}V$ adalah sisinya, jika derajat keanggotaannya adalah 0 maka tidak perlu digambar.

2.2. Komplemen Graf fuzzy

Definisi 2.2.1:

Komplemen graf fuzzy $G(V,\bar{\sigma},\overline{\mu})$ adalah graf fuzzy $\bar{G}(V,\bar{\sigma},\overline{\mu})$,dimana $\bar{\sigma} = \sigma$ dan $\overline{\mu}(u,v) = min\{\sigma(u),\sigma(v)\} - \mu(u,v), \forall\, u,v \in V$.

2.3. Graf Sikel Fuzzy

Definisi 2.3.1:

Misalkan $G(V,\sigma,\mu)$ graf fuzzy, sikel C pada graf fuzzy $G(V,\sigma,\mu)$ titik-titik berberda dan berurutan $(u_0,u_1,u_2,\dots,u_n)$ dengan sepasang fungsi (σ,μ) , dimana $\sigma : V \to [0,1]$, $\mu : V{\times}V \to [0,1]$, sedemikian hingga $\mu(u_i,u_{i+1}) > 0$, untuk $1 \le i \le n$ dan $\mu(u_j,u_k) = 0$, untuk $k \ne j+1$ dimana $u_0 = u_n$ dan n disebut panjang dari sikel C. Sikel C dalam graf fuzzy disebut sikel fuzzy.

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. PEWARNAAN TITIK PADA GRAF FUZZY DAN BILANGAN KROMATIK PADA GRAF FUZZY

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai pewarnaan titk pada graf fuzzy, bilangan kromatik graf fuzzy dan teorema-teorema mengenai bilangan kromatik pada graf fuzzy. Jika sebelumnya pada graf terdapat titik yang berhubungan langsung maka pada graf fuzzy titik yang berhubungan dibedakan dalam 2 jenis, yaitu berhubungan kuat dan berhubungan lemah. Dari kedua jenis titik yang berhubungan dapat ditentukan pewarnaan titik pada graf fuzzy.

Definisi 3.1.1 :

Dua titik u dan v pada graf fuzzy $G(\mathrm{V},\sigma,\mu)$ dikatakan berhubungan kuat jika $\mu(u,v) \ge \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$, dan berhubungan lemah jika $\mu(u,v) < \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$.

Definisi 3.1.2:

Keluarga himpunan $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ dimana γ_i adalah subset dari himpunan fuzzy pada V . Γ disebut k-pewarnan fuzzy dari $G(V,\sigma,\mu)$ jika memenuhi:

i. $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_k = \sigma$

ii. $min\{\gamma_i(u),\gamma_j(u) | 1 \le i \ne j \le k\} = 0,\ \forall\ u \in V$

iii. $\forall\, u,v \in V$ yang berhubungan kuat,$\min\{\gamma_i(u),\gamma_i(v) | (1 \le i \le k)\} = 0$.

Definisi 3.1.3 :

Bilangan kromatik suatu graf fuzzy $G(V,\sigma,\mu)$ adalah bilangan k terkecil sedemikian hinggagraf fuzzy $G(V,\sigma,\mu)$ memiliki k -pewarnaan fuzzy. Bilangan kromatik pada graf $G(V,\sigma,\mu)$ dilambangkan dengan $\chi_F(G)$.

Definisi 3.1.4:

Graf fuzzy $G(V,\sigma,\mu)$ disebut graf fuzzy trivial jika dan hanya jika setiap pasang titiknya berhubungan lemah.

Lemma 3.1.1

Misalkan $G(V,\sigma,\mu)$ adalah graf fuzzy trivial, maka $\chi_F(G) = 1$.

Bukti :

Diketahui graf fuzzy $G(V,\sigma,\mu)$ adalah graf fuzzy trivial, maka u,v berhubungan lemah $\forall u,v \in V$.

Karena setiap pasang titik berhubungan lemah, maka dapat dibentuk $\Gamma = \{\gamma_1\}$.

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} \sigma(x), & x \in V \\ 0, & x \notin V \end{cases}$$

Karena anggota dari Γ hanya γ_1, maka syarat (i), (ii) pada definisi 3.1.2 terpenuhi. Pada graf fuzzy $G(V,\sigma,\mu)$ tidak terdapat titik-titik yang berhubungan kuat maka syarat (iii) pada definisi 3.1.2 terpenuhi. Dan karena 1 adalah bilangan terkecil, maka $\chi_F(G) = 1$.

Lemma 3.1.2

Misalkan $G(V,\sigma,\mu)$ adalah graf fuzzy dengan n titik dan setiap pasang titiknya berhubungan kuat maka $\chi_F(G) = n$.

Bukti:

Diketahui graf fuzzy $G(V,\sigma,\mu)$ dengan u,v berhubungan kuat $\forall u,v \in V$.

Misalkan $V = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Karena tiap pasang titik di $G(V,\sigma,\mu)$ berhubungan kuat. Maka dapat dibentuk keluarga himpunan $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ dimana

$$\gamma_i(x) = \begin{cases} \sigma(x_i), & x = x_i \\ 0, & x \neq x_i \end{cases}$$

Anggota dari Γ dapat disajikan dengan tabel sebagai berikut:

Table 3.1. Derajat keanggotaan titik pada γ_i

TITIK	γ_1	γ_2	γ_3	.	γ_n	Max
x_1	x_1	0	0	.	0	x_1
x_2	0	x_2	0	.	0	x_2
x_3 . . . x_n	0 . . . 0	0 . . . 0	x_3 . . . 0	. . . . .	0 . . . x_n	x_3 . . . x_n

Pada tabel 3.1 didapatkan:

$(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \dots \cup \gamma_n)(x_1) = \sigma(x_1)$

$(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \dots \cup \gamma_n)(x_2) = \sigma(x_2)$

$(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \dots \cup \gamma_n)(x_3) = \sigma(x_3)$

.

.

.

.

$(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \dots \cup \gamma_n)(x_n) = \sigma(x_n)$.

Tabel 3.2. Irisan tiap anggota pada Γ

TITIK	min $\{\gamma_1, \gamma_2\}$	Mi $\{\gamma_1, \gamma_3$	.	min $\{\gamma_1, \gamma_n\}$	Min $\{\gamma_2, \gamma_3\}$	.	min $\{\gamma_2, \gamma_n\}$	.	min $\{\gamma_3, \gamma_n\}$
x_1	0	0	.	0	0	.	0	.	0
x_2	0	0	.	0	0	.	0	.	0
x_3	0	0	.	0	0	.	0	.	0
.			.			.		.	
.			.			.		.	
.			.			.		.	
.			.			.		.	
x_n	0	0	.	0	0	.	0	.	0

Pada tabel 3.2 berlaku $min\left\{\gamma_i(x_p), \gamma_j(x_p) | 1 \leq i \neq j \leq k\right\} = 0,\ \forall x_p \in V$. Dan dari tabel 3.6 dapat dilihat bahwa $\min\left\{\gamma_i(x_p), \gamma_i(x_k)\right\} = 0$ dimana x_p, x_k adalah titik-titik yang berhubungan kuat di $G(V, \sigma, \mu)$. Jadi Γ memenuhi definisi 3.1.2. Pada graf fuzzy $G(V, \sigma, \mu)$ semua titik saling berhubungan kuat, maka graf fuzzy $G(V, \sigma, \mu)$ dapat diwarnai hanya dengan n-pewarnaan fuzzy. Jadi $\chi_F(G) = n$.

3.2 BILANGAN KROMATIK PADA GRAF FUZZY DAN BILANGAN KROMATIK PADA KOMPLEMEN GRAF FUZZY

Pada subbab ini, akan dijelaskan mengenai bilangan kromatik pada graf fuzzy dan komplemen graf fuzzy dan juga mengenai penjumlahan dan perkalian antara bilangan kromatik pada graf fuzzy dan bilangan kromatik pada komplemen graf fuzzy.

Definisi 3.2.1

Misalkan $G(V, \sigma, \mu)$ graf fuzzy dan $\bar{G}(V, \bar{\sigma}, \bar{\mu})$ adalah komplemennya. $G(V, \sigma, \mu) = \bar{G}(V, \bar{\sigma}, \bar{\mu})$ jika dan hanya jika $\mu(u, v) = \bar{\mu}(u, v)$.

Teorema 3.2.1

Misalkan $G(V, \sigma, \mu)$ graf fuzzy dan $\bar{G}(V, \bar{\sigma}, \bar{\mu})$ adalah komplemennya. Jika $\mu(u, v) = \frac{1}{2}\min\{\sigma(u), \sigma(v)\}, \forall u, v \in V$ maka $G(V, \sigma, \mu) = \bar{G}(V, \bar{\sigma}, \bar{\mu})$.

Bukti:

Diketahui graf fuzzy $G(V, \sigma, \mu)$ dengan $\mu(u, v) = \frac{1}{2}\min\{\sigma(u), \sigma(v)\}, \forall u, v \in V$, dan komplemen dari graf fuzzy $G(V, \sigma, \mu)$ adalah $\bar{G}(V, \bar{\sigma}, \bar{\mu})$ .Menurut definisi 2.2.1 $\bar{\sigma} = \sigma$ dan

$\bar{\mu}(u, v) = \min\{\sigma(u), \sigma(v)\} - \mu(u, v), \forall u, v \in V$

$$= \min\{\sigma(u), \sigma(v)\} - \frac{1}{2}\min\{\sigma(u), \sigma(v)\},\ \forall u, v \in V$$

$$= \frac{1}{2}\min\{\sigma(u), \sigma(v)\}\ \forall u, v \in V$$

Jadi $\bar{\mu}(u, v) = \mu(u, v), \forall u, v \in V$. Karena $V = V$, $\bar{\sigma} = \sigma, \bar{\mu}(u, v) = \mu(u, v)$ maka $G(V, \sigma, \mu) = \bar{G}(V, \bar{\sigma}, \bar{\mu})$.

Teorema 3.2.2

Misalkan $G(V, \sigma, \mu)$ graf fuzzy dan $\bar{G}(V, \bar{\sigma}, \bar{\mu})$ adalah komplemennya. Jika u,v $\in V$ di $G(V, \sigma, \mu)$ berhubungan lemah maka u,v di $\bar{G}(V, \bar{\sigma}, \bar{\mu})$ berhubungan kuat.

Bukti :

Diketahui graf fuzzy $G(V, \sigma, \mu)$ dan $\bar{G}(V, \bar{\sigma}, \bar{\mu})$ adalah komplemennya. $u, v \in V$ berhubungan lemah di graf fuzzy $G(V, \sigma, \mu)$, maka $\mu(u, v) < \frac{1}{2}\min\{\sigma(u), \sigma(v)\}$.

Menurut definisi 2.2.1 :

$$\bar{\mu}(u, v) = \min\{\sigma(u), \sigma(v)\} - \mu(u, v)$$

Dengan mensubtitusikan nilai $\mu(u, v)$, didapat :

$$\mu(u,v) > \min\{\sigma(u),\sigma(v)\} - \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$$

$$\mu(u,v) > \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$$

Menurut definisi 3.1.1 maka $u, v \in V$ berhubungan kuat di graf fuzzy $\bar{G}(V,\bar{\sigma},\bar{\mu})$

Teorema 3.2.3

Misalkan $G(V,\sigma,\mu)$ adalah graf fuzzy dengan n titik dan $\bar{G}(V,\bar{\sigma},\bar{\mu})$ adalah komplemen dari $G(V,\sigma,\mu)$ Jika $G(V,\sigma,\mu)$ memenuhi syarat:

(i). Ada tepat satu pasang titik $u, v \in V$ sedemikian hingga $\mu(u,v) \neq \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$

(ii). $\mu(x,y) = \frac{1}{2}\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}\ \forall\, x,y \in V - \{u,v\}$

maka $\chi_F(G) + \chi_F(\bar{G}) = 2(n-1)$ dan $\chi_F(G).\chi_F(\bar{G}) = n(n-1)$.

Bukti:

Diketahui graf fuzzy $G(V,\sigma,\mu)$ dengan banyaknya titik adalah n, dan $\bar{G}(V,\bar{\sigma},\bar{\mu})$ adalah komplemennya. Misalkan $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan $G(V,\sigma,\mu)$ memenuhi syarat:

(i). Ada tepat satu pasang titik $u, v \in V$ sedemikian hingga $\mu(u,v) \neq \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$

(ii). $\mu(x,y) = \frac{1}{2}\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}\ \forall\, x,y \in V - \{u,v\}$

Maka ada 2 kasus yaitu $\mu(u,v) < \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$ atau $\mu(u,v) > \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$

Kasus 1: $\mu(u,v) < \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$

Tanpa mengurangi keumuman asumsikan v_1, v_2 adalah titik-titik yang memenuhi $\mu(u,v) < \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$. Maka dapat dibentuk keluarga himpunan Γ dimana

$$\gamma_1(v) = \begin{cases} \sigma(v), & v = \{v_1, v_2\} \\ 0 & v \in V - \{v_1, v_2\} \end{cases}$$

Karena selain titik v_1, v_2 adalah titik-titik yang berhubungan kuat, maka dapat dibentuk subset-subset fuzzy $\gamma_k\ (k \neq 1, k = 2,3,4 \dots, n-1)$ dimana

$$\gamma_k(v) = \begin{cases} \sigma(v_i), & i = k+1 \\ 0 & i \neq k+1 \end{cases}$$

Jadi $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{n-1}\}$ maka $\chi_F(G) = n-1$. Karena v_1, v_2 berhubungan lemah di $G(V,\sigma,\mu)$ maka menurut teorema 3.2.2 v_1, v_2 berhubungan kuat di $\bar{G}(V,\bar{\sigma},\bar{\mu})$. Dan karena $\forall x,y \in V - \{v_1, v_2\}$ berlaku $\mu(x,y) = \frac{1}{2}\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}$ menurut pembuktian dari teorema 3.2.1 $\bar{\mu}(x,y) = \frac{1}{2}\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}$. Maka setiap titik berhubungan kuat di $\bar{G}(V,\bar{\sigma},\bar{\mu})$. Menurut lemma 3.1.2 maka $\chi_F(\bar{G}) = n$, maka

$$\chi_F(G) + \chi_F(\bar{G}) = (n-1) + n$$
$$= 2n - 1$$
$$\chi_F(G).\chi_F(\bar{G}) = (n-1).n$$
$$= n(n-1)$$

Kasus 2: $\mu(u,v) > \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$

Karena $\mu(u,v) > \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$, maka u, v berhubungan kuat di $G(V,\sigma,\mu)$ begitu juga pada $x, y \in V - \{u,v\}$, maka semua titik di $G(V,\sigma,\mu)$ saling berhubungan kuat. Menurut lemma 3.1.2 maka $\chi_F(G) = n$. Karena $\forall x,y \in V - \{v_1, v_2\}$ berlaku $\mu(x,y) = \frac{1}{2}\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}$ maka menurut pembuktian dari teorema 3.2.1 $\bar{\mu}(x,y) = \frac{1}{2}\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}$ maka x, y berhubungan kuat di $\bar{G}(V,\bar{\sigma},\bar{\mu})$ dan

$$\bar{\mu}(u,v) = \min\{\sigma(u),\sigma(v)\} - \mu(u,v)$$
$$\bar{\mu}(u,v) < \min\{\sigma(u),\sigma(v)\} - \frac{1}{2}\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}$$
$$\bar{\mu}(u,v) < \frac{1}{2}\min\{\sigma(u),\sigma(v)\}$$

Jadi u, v berhubungan lemah di $\bar{G}(V,\bar{\sigma},\bar{\mu})$. Seperti pada kasus 1 maka didapat $\chi_F(\bar{G}) = n - 1$, maka

$$\chi_F(G) + \chi_F(\bar{G}) = (n-1) + n$$
$$= 2n - 1$$
$$\chi_F(G).\chi_F(\bar{G}) = (n-1).n = n(n-1)$$

3.3 BILANGAN KROMATIK PADA GRAF FUZZY SIKEL DAN BILANGAN KROMATIK PADA KOMPLEMEN GRAF FUZZY SIKEL

Pada subbab ini, akan dijelaskan mengenai bilangan kromatik pada graf fuzzy sikel dan bilangan kromatik pada komplemen graf fuzzy berdasarkan banyaknya titik pada graf fuzzy sikel dan juga mengenai penjumlahan dan perkalian antara bilangan kromatik pada graf fuzzy sikel dan bilangan kromatik pada komplemen graf fuzzy sikel.

Teorema 3.3.1

Misalkan $G(V,\sigma,⍰)$ adalah graf fuzzy sikel dengan panjang sikel fuzzy genap dan bukan graf fuzzy trivial , maka $\chi_F(G) = 2$.

Bukti:

Diketahui graf fuzzy sikel $G(V,\sigma,⍰)$ dengan $V = \{v_1, v_2, v_{3,} \dots, v_n\}$, karena panjang sikel genap maka $n =$ bilangan genap. Dan $G(V,\sigma,⍰)$ bukan graf fuzzy trivial, maka $\chi_F(G) > 1$. Karena $G(V,\sigma,⍰)$ adalah graf fuzzy sikel maka menurut definisi 2.3.1 $⍰(v_i, v_{i+1}) > 0$, $1 \le i \le n$ dan $⍰(v_j, v_k) = 0$, $k \ne j+1$. Maka v_j, v_k berhubungan lemah di $G(V,\sigma,⍰)$. Himpunan titik pada $G(V,\sigma,⍰)$ dapat dipartisi menjadi 2 himpunan, yaitu

$V_1 = \{v_1, v_3, v_5 \dots, v_{n-1}\}$

$V_2 = \{v_2, v_4, v_6 \dots, v_n\}$

Dimana untuk setiap anggota pada V_i saling berhubungan lemah. Maka dapat dibentuk $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ dimana,

$$\gamma_1 = \begin{cases} \sigma(v_i), & i = 1,3,5,\dots,n-1 \\ 0, & i = 2,4,6,\dots,n \end{cases}$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} \sigma(v_i), & i = 2,4,6,\dots,n \\ 0, & i = 1,3,5,\dots,n-1 \end{cases}$$

Maka, $(\gamma_1 \cup \gamma_2)(v_i) = \sigma(v_i)$, $\min\{\gamma_1(v_i), \gamma_2(v_i)\} = 0$, $\forall v_i \in V$ dan $\forall v_i, v_{i+1} \in V$ yang berhubungan kuat, $min\{\gamma_i(v_i), \gamma_i(v_{i+1}) | (1 \le i \le n)\} = 0$.

Jadi $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ merupakan 2-pewarnaan fuzzy pada graf sikel $G(V,\sigma,⍰)$. Karena $\chi_F(G) > 1$, maka bilangan kromatik $G(V,\sigma,⍰)$ adalah 2.

Teorema 3.3.2

Misalkan $G(V,\sigma,⍰)$ adalah graf fuzzy sikel dengan panjang sikel fuzzy adalah ganjil dan bukan trivial. Jika ada setidaknya satu pasang titik $⍰(u_i, u_{i+1})$ yang berhubungan lemah maka $\chi_F(G) = 2$. Jika semua pasang titik $⍰(u_i, u_{i+1})$ berhubungan kuat maka $\chi_F(G) = 3$.

Bukti:

Diketahui graf fuzzy sikel $G(V,\sigma,⍰)$ dengan $V = \{v_1, v_2, v_{3,} \dots, v_n\}$, karena panjang sikel fuzzy ganjil maka $n =$ bilangan ganji. Dan $G(V,\sigma,⍰)$ bukan graf fuzzy trivial, maka $\chi_F(G) > 1$. Karena $G(V,\sigma,⍰)$ adalah graf fuzzy sikel maka menurut definisi 2.3.1 $⍰(v_i, v_{i+1}) > 0$, $1 \le i \le n$ dan $⍰(v_j, v_k) = 0$, $k \ne j+1$. Maka v_j, v_k berhubungan lemah di $G(V,\sigma,⍰)$.

Kasus 1:

Ada setidaknya satu pasang titik $⍰(u_i, u_{i+1})$ yang berhubungan lemah.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan v_1, v_2 berhubungan lemah. Seperti pada pembuktian pada teorema 3.3.1, himpunan titik pada $G(V,\sigma,⍰)$ dapat dipartisi menjadi 2 himpunan, yaitu

$V_1 = \{v_3, v_5 \dots, v_n\}$

$V_2 = \{v_1, v_2, v_4, v_6 \dots, v_{n-1}\}$

Dimana untuk setiap anggota pada V_i saling berhubungan lemah. Maka dapat dibentuk $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ dimana,

$$\gamma_1 = \begin{cases} \sigma(v_i), & i = 3,5,7\dots,n \\ 0, & i = 1,2,4,6,\dots,n-1 \end{cases}$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} \sigma(v_i), & i = 1,2,4,6,\dots,n-1 \\ 0, & i = 3,5,7\dots,n \end{cases}$$

Maka, $(\gamma_1 \cup \gamma_2)(v_i) = \sigma(v_i)$

$\min\{\gamma_1(v_i), \gamma_2(v_i)\} = 0$, $\forall v_i \in V$

Untuk setiap pasang $(v_i, v_{i+1}) \in V$ yang berhubungan kuat berlaku, $min\{\gamma_i(v_i), \gamma_i(v_{i+1}) | (1 \le i \le n)\} = 0$.

Jadi $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ merupakan 2-pewarnaan fuzzy pada graf sikel $G(V,\sigma,⍰)$. Karena $\chi_F(G) > 1$, maka bilangan kromatik $G(V,\sigma,⍰)$ adalah 2.

Kasus 2:

Semua pasang titik $⍰(v_i, v_{i+1})$ berhubungan kuat.

Maka v_{n-1}, v_n dan v_n, v_1 berhubungan kuat, dimana n =bilangan ganjil. Maka himpunan titik pada $G(V,\sigma,⍰)$ dapat dipartisi menjadi 3 himpunan, yaitu

$V_1 = \{v_1, v_3, v_5 \dots, v_{n-2}\}$

$V_2 = \{v_2, v_4, v_6 \dots, v_{n-1}\}$

$V_3 = \{v_n\}$

Dimana untuk setiap anggota pada V_i saling berhubungan lemah. Maka dapat dibentuk $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ dimana,

$$\gamma_1 = \begin{cases} \sigma(v_i), & v_i \in V_1 \\ 0, & v_i \notin V_1 \end{cases}$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} \sigma(v_i), & v_i \in V_2 \\ 0, & v_i \notin V_2 \end{cases}$$

$$\gamma_3 = \begin{cases} \sigma(v_i), & v_i \in V_3 \\ 0, & v_i \notin V_3 \end{cases}$$

Maka, $(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3)(v_i) = \sigma(v_i)$

$\min\{\gamma_1(v_i), \gamma_2(v_i)\} = 0, \forall v_i \in V$

$\min\{\gamma_1(v_i), \gamma_3(v_i)\} = 0, \forall v_i \in V$

$\min\{\gamma_2(v_i), \gamma_3(v_i)\} = 0, \forall v_i \in V$

Untuk setiap pasang $(v_i, v_{i+1}) \in V$ yang berhubungan kuat berlaku, $min\{\gamma_i(v_i), \gamma_i(v_{i+1})| \quad (1 \le i \le n)\} = 0$. Jadi $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ merupakan 3-pewarnaan fuzzy pada graf fuzzy sikel $G(V, \sigma, \mu)$. Karena $\chi_F(G) > 1$, maka bilangan kromatik $G(V, \sigma, \mu)$ adalah 3

Teorema 3.3.3

Misalkan $G(V, \sigma, \mu)$ adalah graf fuzzy sikel dengan panjang sikel fuzzy ≥ 4 dan bukan graf fuzzy trivial, maka

$\chi_F(G) + \chi_F(\bar{G}) \;\le\; 2(n-1)$ dan

$\chi_F(G) . \chi_F(\bar{G}) \;\le\; n(n-2)$

Bukti:

Diketahui graf fuzzy sikel $G(V, \sigma, \mu)$ dengan $V = \{v_1, v_2, v_{3,} \dots, v_n\}$, karena panjang sikel fuzzy ≥ 4 maka $n \ge 4$. Karena $G(V, \sigma, \mu)$ adalah graf fuzzy sikel maka menurut definisi 2.3.1 $\mu(v_i, v_{i+1}) > 0$, $1 \le i \le n$ dan $\mu(v_j, v_k) = 0$, $k \ne j + 1$. Maka titik v_j, v_k berhubungan lemah di $G(V, \sigma, \mu)$. Karena graf fuzzy $G(V, \sigma, \mu)$ bukan graf fuzzy trivial maka ada setidaknya satu pasang titik $\mu(u_i, u_{i+1})$ yang berhubungan kuat. Maka ada 2 kasus yaitu:

Kasus 1:

Jika banyaknya titik pada $G(V, \sigma, \mu)$ adalah genap atau $n =$ bilangan genap

Misal

$\mu(v_i, v_{i+1}) = \frac{1}{2}\min\{\sigma(v_i), \sigma(v_{i+1})\} \, \forall i = 1,2,3, .., n-1.$

Menurut pembuktian pada teorema 3.2.1 diperoleh

$\mu(u, v) = \frac{1}{2}\min\{\sigma(u), \sigma(v)\} \, \forall \, u, v \in V$. Karena banyaknya titik pada graf fuzzy sikel $G(V, \sigma, \mu)$ adalah genap, maka menurut teorema 3.3.1 $\chi_F(G) = 2$. Karena titik (v_j, v_k), $k \ne j + 1$ berhubungan lemah di $G(V, \sigma, \mu)$, maka menurut teorema 3.2.2 $(v_j, v_k), k \ne j + 1$ berhubungan kuat di $\bar{G}(V, \sigma, \mu)$. Maka setiap pasang titik di $\bar{G}(V, \sigma, \mu)$ saling berhubungan kuat, dan menurut lemma 3.1.2 $\chi_F(\bar{G}) = n$. Jadi

$$\chi_F(G) + \chi_F(\bar{G}) = 2 + n$$

Karena $n \ge 4$,

$$\chi_F(G) + \chi_F(\bar{G}) \le (n-2) + n$$
$$\chi_F(G) + \chi_F(\bar{G}) \le 2n - 2$$
$$\chi_F(G) + \chi_F(\bar{G}) \le 2(n-1)$$

Dan

$$\chi_F(G) . \chi_F(\bar{G}) = 2 . n$$
$$\chi_F(G) . \chi_F(\bar{G}) \le (n-2) . n$$

Karena $\chi_F(\bar{G}) = n$ memenuhi, maka untuk setiap bilangan kromatik $\bar{G}(V, \sigma, \mu)$ berapapun berlaku:

$$\chi_F(G) + \chi_F(\bar{G}) \le 2(n-1)$$
$$Dan$$
$$\chi_F(G) . \chi_F(\bar{G}) \le (n-2) . n$$

Kasus 2:

Jika banyaknya titik pada $G(V, \sigma, \mu)$ adalah ganjil atau $n =$ bilangan ganjil

Misalkan

$\mu(v_i, v_{i+1}) = \frac{1}{2}\min\{\sigma(v_i), \sigma(v_{i+1})\}, \forall i = 1,2,3, ., n-1.$

Menurut pembuktian pada teorema 3.2.1 diperoleh

$$\mu(u, v) = \frac{1}{2}\min\{\sigma(u), \sigma(v)\} \, \forall \, u, v \in V$$

Karena $(v_i, v_{i+1}), \forall i = 1,2,3, \dots . n-1$ berhubungan kuat, maka menurut teorema 3.3.2 $\chi_F(G) = 3$. Karena titik $(v_j, v_k), k \ne j + 1$ berhubungan lemah di $G(V, \sigma, \mu)$, maka menurut teorema 3.2.2 $(v_j, v_k), k \ne j + 1$ berhubungan kuat di $\bar{G}(V, \sigma, \mu)$. Maka setiap pasang titik di $\bar{G}(V, \sigma, \mu)$ saling berhubungan kuat, dan menurut lemma 3.1.2 $\chi_F(\bar{G}) = n$. Jadi

$$\chi_F(G) + \chi_F(\bar{G}) = 3 + n$$

Karena $n \ge 4$ dan $n =$ bilangan ganjil, maka $n \ge 5$. Jadi

$$\chi_F(G) + \chi_F(\bar{G}) \le (n-2) + n$$
$$\chi_F(G) + \chi_F(\bar{G}) \le 2n - 2$$

$$\chi_F(G)+\chi_F(\bar{G}) \leq 2(n-1)$$

Dan

$$\chi_F(G).\chi_F(\bar{G}) = 3.n$$

$$\chi_F(G).\chi_F(\bar{G}) \leq (n-2)$$

Karena $\chi_F(G) = 3$ dan $\chi_F(\bar{G}) = n$ memenuhi, maka untuk setiap bilangan kromatik $G(V, \sigma, \mu)$ dan $\bar{G}(V, \sigma, \mu)$ berapapun berlaku:

$$\chi_F(G)+\chi_F(\bar{G}) \leq 2(n-1)$$

$$Dan$$

$$\chi_F(G).\chi_F(\bar{G}) \leq (n-2).n$$

KESIMPULAN DAN SARAN

1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Perbedaan graf dengan graf fuzzy adalah pada graf fuzzy terdapat sepasang fungsi (σ, μ) dimana $\sigma : V \rightarrow [0, 1]$ $\mu : V{\times}V \rightarrow [0, 1]$.
2. Pembentukan k-pewarnaan fuzzy Γ adalah dengan memisahkan setiap titik yang berhubungan lemah pada anggota Γ yang berbeda, dan menggabungkan titik yang berhubungan lemah pada anggota Γ yang sama. Sedemikian hingga definisi k-pewarnaan fuzzy terpenuhi.
3. Graf fuzzy $G(V, \sigma, \mu)$ dengan banyaknya titiknya adalah n, jika setiap titiknya berhubungan lemah maka bilangan kromatik fuzzynya adalah 1. Jika setiap titiknya berhubungan kuat maka bilangan kromatik fuzzynya adalah n
4. Graf fuzzy $G(V, \sigma, \mu)$ dengan $\bar{G}(V, \bar{\sigma}, \bar{\mu})$ adalah komplemennya. $G(V, \sigma, \mu) = \bar{G}(V, \bar{\sigma}, \bar{\mu})$, jika $\bar{\mu} = \mu$, dan jika sepasang titik berhubungan lemah di $G(V, \sigma, \mu)$ maka berhubungan kuat di $\bar{G}(V, \bar{\sigma}, \bar{\mu})$.
5. Graf fuzzy $G(V, \sigma, \mu)$ dengan n titik dan $\bar{G}(V, \bar{\sigma}, \bar{\mu})$ adalah komplemen dari $G(V, \sigma, \mu)$ Jika $G(V, \sigma, \mu)$ memenuhi syarat:
   i. Ada tepat satu pasang titik $u, v \in V$ sedemikian hingga $\mu(u, v) \neq \frac{1}{2}\min\{\sigma(u), \sigma(v)\}$
   ii. $\mu(x, y) = \frac{1}{2}\min\{\sigma(x), \sigma(y)\}\ \forall\, x, y \in V - \{u, v\}$

   maka $\chi_F(G) + \chi_F(\bar{G}) = 2(n-1)$ dan $\chi_F(G).\chi_F(\bar{G}) = n(n-1)$.
6. Graf fuzzy $G(V, \sigma, \mu)$ adalah graf sikel fuzzy dan bukan graf fuzzy trivial. Jika panjang sikel adalah genap maka bilangan kromatik fuzzynya adalah 2. Jika panjang sikel adalah ganjil dan semua pasang titik nya berhubungan kuat maka bilangan kromatiknya adalah 3, jika ada minimal sepasang titik yang berhubungan lemah maka bilangan kromatiknya adalah 2.
7. Graf sikel fuzzy $G(V, \sigma, \mu)$ dengan n titik ($n \geq 4$) dan bukan graf fuzzy trivial, maka

   $\chi_F(G) + \chi_F(\bar{G}) \leq 2(n-1)$ dan $\chi_F(G).\chi_F(\bar{G}) \leq n(n-2)$.

2. Saran

Pewarnaan graf fuzzy juga dapat dipelajari mendalam dengan menentukan pewarnaan gabungan graf fuzzy, irisan graf fuzzy. Dalam menentukan pewarnaan titik pada graf fuzzy dapat dilakukan dengan beberapa metode salah satunya adalah metode $\alpha - cut$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] SATTANATHAN R dan LAVANYA S, 2000, *Complementary Fuzzy Graphs and Fuzzy Chromatic Number*.(online). (http://eashwarpublications.com/doc/acm234.pdf, diunduh pada tanggal 21 maret 2013 pukul 05:11)

[2] ROSYIDA ISNAINI, LAVANYA S,WIDODO,CH.R.INDARTI, dan SUGENG,K,A, 2000, *An Upper Bound For Fuzzy Graphs and Their Complement*.(online) (http://s3.amazonaws.com/ppt-download/draft1isnaini-121121231625-phpapp01.pdf?response-content-disposition=attachment&Signature=CGcftC2WZn0F

enpoc4n2m5jWBKk%3D&Expires=1364516195&AWSAccessKeyId=AKIAIW74DRRRQSO4NIKA, diunduh pada tanggal 29 maret 2013 pukul 07:14)

[3] ESLANCHI C, dan ONAGH B.N, 2005, *Vertex-Strength Of Fuzzy Graphs.*(online). (http://www.emis.de/journals/HOA/IJMMS/Volume2006/043614.pdf, di unduh pada tanggal 25 maret 2013 pukul 03:47)

[4] Budayasa I Ketut, 2007, *Teori Graph dan Aplikasinya*, Unesa University Press : Surabaya.

[5] SATTANATHAN R dan LAVANYA S, 2009, *Fuzzy Total Coloring Of Fuzzy Graphs.*(online) (http://www.csjournals.com/IJITKM/PDF%202-1/8_SLavanya_RSattanathan.pdf, di unduh pada tanggal 25 maret 2013 pukul04.07)

[6] SUNITHA M.S, dan KUMAR A.VIJAY, 2002, *Complement Of A Fuzzy Graph.*(online) (http://www.new1.dli.ernet.in/data1/upload/insa/INSA_1/20006182_1451.pdf, di unduh pada tanggal 30 maret 2013 pukul 21:26).

[7] BONDY J.A, dan MURTY U,S,R, 1976, *GraphTheory With Application*, The Macmillan Press.ltd : CANADA

[8] MASRIYAH, 2007, *Pengantar Dasar Matematika*, Unesa University Press:Surabaya

.