# GRAF TOTAL DARI RING KOMUTATIF

**Andika**
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Surabaya, 60231
Email: rizalandika90@yahoo.co.id

**Dwi Juniati**
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Surabaya, 60231
Email:dwi.juniati@yahoo.com

**ABSTRAK**

Graf total dari ring komutatif $R$ yang dilambangkan dengan $T(\Gamma(R))$ adalah graf dengan himpunan titiknya adalah semua elemen dari ring $R$ dan setiap $x, y \in R$ dihubungkan oleh sebuah sisi jika dan hanya jika $x + y \in Z(R)$. $Z(\Gamma(R))$ merupakan graf terhubung dan jika $Z(R)$ membentuk ideal maka $Z(\Gamma(R))$ merupakan graf komplit. $Reg(\Gamma(R))$ merupakan gabungan dari beberapa graf komplit atau graf bipartisi komplit yang saling lepas. Jika $Reg(\Gamma(R))$ terhubung, maka $diam\left(Reg(\Gamma(R))\right) \leq 2$. Jika $Nil(\Gamma(R))$ subgraf dari $Z(\Gamma(R))$ maka $Nil(\Gamma(R))$ merupakan graf komplit.

**Kata kunci:** graf total, graf pembagi nol dan graf komplit.

**ABSTRACT**

The graph total of a ring commutative $R$ denote $T(\Gamma(R))$ is graph with all elements of $R$ as vertices, and for distinct $x, y \in R$ are adjacent if and only if $x + y \in Z(R)$. $Z(\Gamma(R))$is always connected and if $Z(R)$ is ideal, then $Z(\Gamma(R))$ is a complete graph. $Reg(\Gamma(R))$ is the union of disjoint subgraphs, each of which is either complete graph or complete bipartite graph. If $Reg(\Gamma(R))$ is connected, then $diam\left(Reg(\Gamma(R))\right) \leq 2$. If $Nil(\Gamma(R))$ subgraph of $Z(\Gamma(R))$, then $Nil(\Gamma(R))$ is a complete graph.

**Keyword**: total graph, zero divisor graph, and complete graph.

## PENDAHULUAN

Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui makalah tulisan Leonard Euler seorang ahli matematika dari Swiss. Euler adalah orang pertama yang berhasil memecahkan masalah jembatan Konigsberg di sungai Pregal yang sangat terkenal di Eropa yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai. Ia memodelkan masalah ini ke dalam graf. Daratan dinyatakan sebagai titik dan jembatan dinyatakan sebagai sisi.

Teori ring merupakan salah satu materi dalam aljabar abstrak. Asal usul teori ring berawal dari Richard Dedekind pada pertengahan abad ke 19. Ring mempelajari tentang struktur dari suatu himpunan terhadap dua operasi biner yaitu operasi aditif dan operasi multiplikatif.

Artikel ini mengambil dari jurnal internasional hasil kerja sama antara F. Anderson David dan Badawi Ayman yang berjudul "*the Total Graph of a Commutatif Ring*". Berdasarkan jurnal tersebut artikel yang berjudul "*Graf Total Dari Ring Komutatif*" ini akan membahas mengenai pendefinisian baru tentang graf total, subgraf total yang dibangunoleh $Z(R)$, subgraf total yang dibangun oleh $Reg(R)$, dan subgraf total yang dibangun oleh $Nil(R)$.

## LANDASAN TEORI

### 1.1 Graf

**Definisi 2.1.1: Graf**

Sebuah graf $G$ berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga (tak kosong) $V(G)$ dari obyek-obyek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. $V(G)$ disebut himpunan titik-titik $G$ dan $E(G)$ disebut himpunan sisi-sisi $G$. [3]

**Definisi 2.1.2:Berhubungan Langsung (*adjacent*)**

Misalkan u dan v adalah dua titik di $G$. titik u dan titik v dikatakan berhubungan langsung (*adjacent*) di $G$ jika ada sisi yang menghubungkan titik u dan titik v. [3]

**Definisi 2.1.3: Graf Sederhana**

Dalam suatu graf, apabila suatu sisi e menghubungkan suatu titik v dengan dirinya sendiri maka sisi e dinamakan sisi gelung. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi tersebutdinamakan sisi rangkap. Graf yang tidak memuat gelung dan tidak memuat sisi rangkap dinamakan graf sederhana. [3]

**Definisi 2.1.4: Graf Komplit**

Sebuah graf komplit (lengkap) dengan $n$ titik dilambangkan dengan $K_n$ adalah graf sederhana dengan $n$ titik sedemikian sehingga setiap dua titik berbeda dihubungkan oleh sebuah sisi. [3]

**Definisi 2.1.5: Graf Bipartisi Komplit**

Sebuah graf $G$ disebut graf bipartisi jika himpunan titik $G$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian Adan B sedemikian hingga setiapsisi dari $G$ menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik B.

Apabila $G$ graf sederhana dan bipartisi sedemikian sehingga setiap titik di A berhubungan langsung dengan setiap titik di B, maka $G$ disebut graf bipartisi komplit dan dilambangkan dengan $K_{m,n}$ dimana $|\mathrm{A}| = m$dan $|\mathrm{B}| = n$. [3]

**Definisi 2.1.6: Diameter Dan Girth Dari Graf**

Untuk setiap $x, y \in V(G)$, jarak dari titik $x$ dan titik $y$ dilambangkan dengan $d(x, y)$ adalah panjang dari lintasan terpendek dari $x$ ke $y$ ($d(x, x) = 0$ dan jika $x$ dan $y$ tidak terhubung maka $d(x, y) = \infty$). Diameter dari graf $G$ dilambangkan dengan $diam(G) = \sup\{d(x, y) : x, y \in V(G)\}$. Girth dari graf $G$ dilambangkan dengan $gr(G)$ adalah panjang dari sikel terpendek di graf $G(\ (G) = \infty$ jika $G$ tidak mempunyai sikel). [1]

**Definisi 2.1.7: Subgraf dan Subgraf Yang Diinduksi**

Sebuah graf $H$ disebut subgraf dari graf $G$, ditulis $H \subset G$, jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$. Misal $V \subset V(G)$, subgraf yang dibangun (diinduksi) oleh $V$ dilambangkan dengan $G[V]$ adalah sebuah subgraf dari $G$ yang himpunan titiknya adalah $V$ dan himpunan sisinya beranggotakan semua sisi $G$ yang mempunyai titik-titik akhir di $V$. [3]

**Definisi 2.1.8: Graf Terhubung**

$G$ merupakan graf terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut . Sebuah komponen graf $G$ adalah subgraf terhubung maksimal dari. Setiap graf terhubung memiliki tepat satu komponen sedangkan graf tak terhubung memiliki paling sedikit dua komponen. Misal $G_1$ dan $G_2$ adalah subgraf dari $G$, $G_1$ dan $G_2$ saling lepas pada $G$ jika tidak ada titik di $G_1$ yang berhubungan langsung dengan titik di $G_2$ dan sebaliknya. [3]

**2.2 Ring**

**Definisi 2.2.1: Ring**

Sebuah himpunan tak kosong $R$ dengan operasi biner pertama * dan operasi biner kedua $\circ$ disebut ring, jika $\forall\ a, b, c\ \in R$ berlaku:

1. $a * b \in R$
2. $(a * b) * c = a * (b * c)$
3. $\exists\ 0\ \in R\ \ni a * 0 = 0 * a = a$
4. $\exists - a \in R \ni a * -a = -a * a = 0$
5. $a * b = b * a$
6. $a \circ b \in R$
7. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
8. $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$ dan $(b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a)$

Sebuah himpunan tak kosong $R$ dengan operasi biner pertama * dan operasi biner kedua $\circ$ membentuk ring dilambangkan dengan $(R,*,\circ)$. [4]

**Definisi 2.2.2: Pembagi Nol**

Diberikan $R$ adalah ring komutatif. $a \in R$, $a \neq 0$, $a$ disebut pembagi nol jika $\exists b \in R, b \neq 0$ sedemikian sehingga $ab = 0$. $Z(R)^*$ adalah himpunan pembagi nol dari ring $R$ sedangkan $Z(R) = Z(R)^* \cup \{0\}$. [4]

**Definisi 2.2.3: Elemen Reguler**

Diberikan $R$ adalah ring komutatif. $a \in R$, $a \neq 0$ disebut elemen reguler dari $R$ jika $\exists b \in R$ berlaku $a = aba.Reg(R)$ adalah himpunan elemen regular dari ring $R$. [5]

**Definisi 2.2.4: Nilpotent**

Diberikan $R$ adalah ring komutatif. $a \in R$, $a \neq 0$ disebut nilpotent jika ada bilangan bulat positif $n$ sedemikian sehingga $a^n = 0$ dimana 0 adalah elemen nol dari $R$. $Nil(R)^*$ himpunan nilpotent dari ring $R$ sedangkan $Nil(R) = Nil(R)^* \cup \{0\}$. [4]

**Definisi 2.2.5: Ideal**

Diberikan $R$ ring.$I \subset R$ , $I \neq \emptyset$ . $I$disebut ideal dari $R$ jika memenuhi:

1. $\forall\, x, y \in I$ maka $x + y \in I$ dan $-x \in I$.
2. $\forall\, r \in R, a \in I$ berlaku $ra \in I$ dan $ar \in I$.[4]

**Definisi 2.2.6: Koset**

Diberikan $R$ ring, $I$ ideal dari $R$dan $a \in R$. $a + I = \{a + i : i \in I\}$ disebut koset dari ideal $I$. [4]

**Definisi 2.2.7: Ring Faktor**

Diberikan $R$ ring dan $I$ ideal dari $R$. Ring faktor dari $R$ yang dibangun oleh ideal $I$ dilambangkan dengan $R/I$ dengan $R/I = \{a + I : a \in R\}$ dimana $\forall a, b \in R$ berlaku:

1. $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$
2. $(a + I)(b + I) = (ab) + I$.[4]

**Definisi 2.2.8: Homomorfisma Ring**

Suatu pemetaan $f$ dari ring $(R, +, \times)$ ke ring $(S, \oplus, \otimes)$ disebut homomorfisma ring jika $\forall a, b \in R$ berlaku:

1. $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$
2. $f(a \times b) = f(a) \otimes f(b)$.[4]

**Definisi 2.2.9: Isomorfisma Ring**

Suatu pemetaan $f$ dari ring $(R, +, \times)$ ke ring $(S, \oplus, \otimes)$ disebut isomorfisma ring jika $f$ homomorfisma dan $f$ korespondensi satu-satu. Ring $R$ dan ring $S$ dikatakan isomorfik jika dan hanya jika ada fungsi $f$ sedemikan sehingga $f$ merupakan isomorfisma ring. Ring $R$ isomorfik dengan ring $S$ dilambangkan dengan $R \cong S$. [4]

## PEMBAHASAN

### 3.1 Graf Total

**Definisi3.1.1: Graf Pembagi Nol**

Graf pembagi nol dari $R$ dilambangkan dengan $\Gamma(R)$ adalah graf dengan himpunan titiknya adalah semua elemen dari $Z(R)^*$ dan untuk $\forall\, x, y \in Z(R)^*$ , $x \neq y$ maka titik $x$ dan titik $y$ dihubungkan oleh sebuah sisi jika dan hanya jika $xy = 0$.

**Definisi 3.1.2: Graf Total**

Graf total dari ring komtatif $R$ dilambangkan dengan $T(\Gamma(R))$ adalah graf dengan himpunan titiknya adalah semua elemen dari ring $R$ dan setiap $x, y \in R$, $x \neq y$ maka titik $x$ dan titik $y$ dihubungkan oleh sebuah sisi jika dan hanya jika $x + y \in Z(R)$.

### 3.2 Subgraf Total

**Definisi 3.2.1: Graf $\boldsymbol{Z(\Gamma(R))}$**

Diberikan $R$ adalah sebuah ring komutatif. $Z(\Gamma(R))$ adalah graf dengan himpunan titiknya adalah semua elemen dari $Z(R)$ dan setiap $x, y \in Z(R)$, $x \neq y$ maka titik $x$ dan titik $y$ dihubungkan oleh sebuah sisi jika dan hanya jika $x + y \in Z(R)$.

**Lemma 3.2.1**

$\boldsymbol{Z\big(\Gamma(R)\big)}$ merupakan subgraf dari $\boldsymbol{T\big(\Gamma(R)\big)}$.

**Definisi 3.2.2**

$\boldsymbol{Z\big(\Gamma(R)\big)}$ disebut subgraf total dari $\boldsymbol{T\big(\Gamma(R)\big)}$ yang dibangun oleh $\boldsymbol{Z(R)}$.

**Teorema 3.2.2**

Diberikan $R$ adalah sebuah ring komutatif maka $Z(\Gamma(R))$ merupakan graf terhubung.

**Bukti:**

Ambil sebarang $\boldsymbol{x, y \in V(Z\big(\Gamma(R)\big)}$ maka $\boldsymbol{x, y \in Z(R)}$. Jika $\boldsymbol{x + y \in Z(R)}$ maka $\boldsymbol{(x, y)}$ merupakan lintasan dari $\boldsymbol{x}$ ke $\boldsymbol{y}$. Jika $\boldsymbol{x + y \notin Z(R)}$ maka $\boldsymbol{x + 0 = x \in Z(R)}$ dan $\boldsymbol{y + 0 = y \in Z(R)}$ sehingga $\boldsymbol{(x, 0, y)}$ merupakan lintasan dari $\boldsymbol{x}$ ke $\boldsymbol{y}$. Jadi $\boldsymbol{Z\big(\Gamma(R)\big)}$ merupakan graf terhubung.

**Teorema 3.2.3**

Diberikan $\boldsymbol{R}$ adalah sebuah ring komutatif. Jika $\boldsymbol{Z(R)}$ merupakan ideal dari $\boldsymbol{R}$ maka $\boldsymbol{Z(\Gamma(R))}$ merupakan graf komplit.

**Bukti:**

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$. Karena $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$ ideal maka $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$ sehingga titik $\boldsymbol{x}$ dan titik $\boldsymbol{y}$ berhubungan langsung (*adjacent*) di $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$. Jadi $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ merupakan graf komplit.

**Definisi 3.2.3: Graf $\boldsymbol{Reg}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}))$**

Diberikan $\boldsymbol{R}$ adalah sebuah ring komutatif dengan elemen satuan. $\boldsymbol{Reg}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}))$ adalah graf dengan himpunan titiknya adalah semua elemen dari $\boldsymbol{Reg}(\boldsymbol{R})$ dan setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Reg}(\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ maka titik $\boldsymbol{x}$ dan titik $\boldsymbol{y}$ dihubungkan oleh sebuah sisi jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$.

**Lemma 3.2.4**

$Reg(\Gamma(R))$ merupakan subgraf dari $T(\Gamma(R))$.

**Definisi 3.2.4**

$Reg(\Gamma(R))$ disebut subgraf total dari $T(\Gamma(R))$ yang dibangun oleh $Reg(R)$.

**Teorema 3.2.5**

Diberikan $R$ adalah sebuah ring komutatif dan $Z(R)$ merupakan ideal dari $R$. Jika $\forall x, y \in Reg(R)$ dengan $x$ dan $y$ terhubung di $Reg(\Gamma(R))$ dan $x+y \notin Z(R)$, maka $(x,-x,y)$ dan $(x,-y,y)$ adalah lintasan dari $x$ ke $y$ di $Reg(\Gamma(R))$ dengan panjang 2.

**Bukti:**

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{Reg}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}))\right)$ dan $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$maka $\exists\, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{Reg}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}))\right)$ sehingga $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$ merupakan lintasan dari $\boldsymbol{x}$ke $\boldsymbol{y}$. Jadi $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}), (\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$. Karena $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$ ideal maka $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})-(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$.$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$dan $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$ ideal maka $-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$.$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$ ideal maka $\mathbf{0}=\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$dan $\mathbf{0}=-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$.

Karena $x+(-x) \in Z(R)$ dan $-x+y \in Z(R)$ maka $(x,-x,y)$ merupakan lintasan dari $x$ ke $y$.

Karena $x-y \in Z(R)$ dan $-y+y \in Z(R)$ maka $(x,-y,y)$ merupakan lintasan dari $x$ ke $y$.

Jadi $(x,-x,y)$ dan $(x,-y,y)$ merupakan lintasan dari $x$ ke $y$ di $Reg(\Gamma(R))$ dengan panjang 2.

**Teorema 3.2.6**

Diberikan $\boldsymbol{R}$ adalah sebuah ring komutatif dan $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$ merupakan ideal dari $\boldsymbol{R}$. Jika $\boldsymbol{Reg}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}))$ terhubung maka $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Reg}(\mathbf{R})$ berlaku $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathbf{Z}(\mathbf{R})$ atau $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in \mathbf{Z}(\mathbf{R})$.

**Bukti:**

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{Reg}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}))\right)$ maka $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Reg}(\boldsymbol{R})$. Jika titik $\boldsymbol{x}$ dan titik $\boldsymbol{y}$ berhubungan langsung (*adjacent*) maka $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$. Jika titik $\boldsymbol{x}$ dan titik $\boldsymbol{y}$ tidak berhubung langsung maka $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$. Berdasarkan teorema 3.2.5 $(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ adalah lintasan dari $\boldsymbol{x}$ ke $\boldsymbol{y}$ di $\boldsymbol{Reg}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}))$ sehingga $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$. Jadi $\boldsymbol{Reg}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}))$ terhubung maka $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Reg}(\boldsymbol{R})$ berlaku $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$atau $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$.

**Teorema 3.2.7**

Diberikan $\boldsymbol{R}$ adalah sebuah ring komutatif dan $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$ merupakan ideal dari $\boldsymbol{R}$, $|\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})|=\boldsymbol{\alpha}$ dan $|\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})|=\boldsymbol{\beta}$.

i. Jika $2 \in Z(R)$, maka $Reg(\Gamma(R))$ merupakan gabungan dari sebanyak $\beta-1$ graf komplit $K_\alpha$ yang saling lepas.
ii. Jika $2 \notin Z(R)$, maka $Reg(\Gamma(R))$ merupakan gabungan dari sebanyak $\frac{\beta-1}{2}$ graf bipartisi komplit $K_{\alpha,\alpha}$ yang saling lepas.

**Bukti:**

i. Ambil sebarang $x \in Reg(R)$ maka $x+Z(R) \in R/Z(R)$. Ambil sebarang $a, b \in x+Z(R)$. $a \in x+Z(R)$ maka $\exists z_1 \in Z(R)$ sehingga $a=x+z_1$. $b \in x+Z(R)$ maka $\exists z_2 \in Z(R)$ sehingga $b=x+z_2$. Karena $2 \in Z(R)$ maka $a+b=(x+z_1)+(x+z_2)=2x+z_1+z_2 \in Z(R)$ sehingga titik $a$ dan titik $b$ berhubungan langsung di $Reg(\Gamma(R))$. Karena $\forall a, b \in x+Z(R)$, titik$a$ dan titik $b$ berhubungan langsung (*adjacent*) di $Reg(\Gamma(R))$ dan $|x+Z(R)|=|Z(R)|=\alpha$ maka $x+Z(R)$ membentuk graf komplit dengan $\alpha$ titik atau $K_\alpha$. Karena $0 \notin Reg(R)$ maka $0+Z(R)=Z(R)$ tidak pada $Reg(R)$ sehingga ada sebanyak $\beta-1$ koset yang membentuk $K_\alpha$.
Ambil sebarang $p \in x+Z(R)$ dan $q \in y+Z(R)$dengan titik $p$ dan titik $q$ berhubungan langsung *(adjacent)* maka $p+q \in Z(R)$.$x+y=(x+z_1)+(y+z_2)-(z_1+z_2)=p+q-(z_1+z_2) \in Z(R)$. $2 \in Z(R)$ maka $x+y-2y=x-y \in Z(R)$ sehingga $x+Z(R)=y+Z(R)$. Jadi $Reg(\Gamma(R))$ merupakan gabungan dari sebanyak $\beta-1$ graf komplit $K_\alpha$ yang saling lepas.

ii. Ambil sebarang $x \in Reg(R)$ dan ambil sebarang $a, b \in x + Z(R)$. Andaikan titik $a$ dan titik $b$ berhubungan langsung *(adjacent)* maka $a + b = (x + z_1) + (x + z_2) = 2x + z_1 + z_2 \in Z(R)$ untuk suatu $z_1, z_2 \in Z(R)$ tapi mengakibatkan $2 \in Z(R)$. Kontradiksi dengan $2 \notin Z(R)$ sehingga $\forall a, b \in x + Z(R)$ maka titik $a$ dan titik $b$ tidak berhubungan langsung. $x \in Reg(R)$ maka$-x \in Reg(R)$ sehingga $x + Z(R)$ dan $-x + Z(R)$ merupakan dua koset berbeda dan setiap titik pada $x + Z(R)$ berhubungan langsung dengan setiap titik pada $-x + Z(R)$. Karena $|x + Z(R)| = |-x + Z(R)| = |Z(R)| = \alpha$ maka $x + Z(R) \cup -x + Z(R)$ membentuk sebuah graf bipartisi komplit $K_{\alpha,\alpha}$. Karena $0 \notin Reg(R)$ maka $0 + Z(R) = Z(R)$ tidak pada $Reg(R)$ sehingga ada sebanyak $\frac{\beta-1}{2}$ pasang koset yang membentuk sebuah graf bipartisi komplit $K_{\alpha,\alpha}$.
Ambil sebarang $p \in x + Z(R)$ dan $q \in y + Z(R)$ dengan $p$ dan $q$ berhubungan langsung maka $p + q \in Z(R). x + y = (x + z_1) + (y + z_2) - (z_1 + z_2) = p + q - (z_1 + z_2) \in Z(R)$ sehingga $y + Z(R) = -x + Z(R)$. Jadi $Reg(\Gamma(R))$ merupakan gabungan dari sebanyak $\frac{\beta-1}{2}$ graf bipartisi komplit $K_{\alpha,\alpha}$ yang saling lepas.

**Teorema 3.2.8**

Diberikan $\boldsymbol{R}$ adalah sebuah ring komutatif dengan elemen satuan dan $\boldsymbol{Z(R)}$ merupakan ideal dari $\boldsymbol{R}$, maka memenuhi:

i. $Reg(\Gamma(R))$ graf komplit jika dan hanya jika $R/Z(R) \cong Z_2$ atau $R \cong Z_3$.
ii. $Reg(\Gamma(R))$ terhubung jika dan hanya jika $R/Z(R) \cong Z_2$ atau $R/Z(R) \cong Z_3$.

**Bukti:**

Misal: $|\boldsymbol{Z(R)}| = \boldsymbol{\alpha}$ dan $|\boldsymbol{R/Z(R)}| = \boldsymbol{\beta}$.

i. Berdasarkan teorema 3.2.7, $Reg(\Gamma(R))$ graf komplit jika dan hanya $Reg(\Gamma(R))$ merupakan sebuah $K_\alpha$ atau $K_{1,1}$. Jika $2 \in Z(R)$ maka $\beta - 1 = 1$ dan didapat $\beta = 2$ sehingga $R/Z(R) \cong Z_2$. Jika $2 \notin Z(R)$ maka $\alpha = 1$ dan $\frac{\beta-1}{2} = 1$ didapat $\beta = 3 |R| = |Z(R)| . |R/Z(R)| = 3 . 1 = 3$ sehingga $R \cong Z_3$.
ii. Berdasarkan teorema 3.2.7$Reg(\Gamma(R))$ terhubung jika dan hanya $Reg(\Gamma(R))$ merupakan sebuah $K_\alpha$ atau sebuah $K_{\alpha,\alpha}$. Jika $2 \in Z(R)$ maka $\beta - 1 = 1$ dan didapat $\beta = 2$. Jika $2 \notin Z(R)$ maka $\frac{\beta-1}{2} = 1$ dan didapat $\beta = 3$. Jadi $R/Z(R) \cong Z_2$ atau $R/Z(R) \cong Z_3$.

**Teorema 3.2.9**

Diberikan $\boldsymbol{R}$ adalah sebuah ring komutatif dengan elemen satuan dan $\boldsymbol{Z(R)}$ merupakan ideal dari $\boldsymbol{R}$. Jika $\boldsymbol{Reg(\Gamma(R))}$ terhubung, maka $\boldsymbol{diam\left(Reg(\Gamma(R))\right) \leq 2}$.

**Bukti:**

$\boldsymbol{Reg(\Gamma(R))}$ terhubung maka berdasarkan teorema 3.2.7 $\boldsymbol{Reg(\Gamma(R))}$ berupa sebuah graf komplit atau sebuah graf bipartisi komplit sehingga $\boldsymbol{diam\left(Reg(\Gamma(R))\right) \leq 2}$.

**Teorema 3.2.10**

Diberikan $\boldsymbol{R}$ adalah sebuah ring komutatif dengan elemen satuan dan $\boldsymbol{Z(R)}$ merupakan ideal dari $\boldsymbol{R}$. Jika $\boldsymbol{Reg(\Gamma(R))}$ memuat sikel, maka $\boldsymbol{gr\left(Reg(\Gamma(R))\right) \leq 4}$.

**Bukti:**

Berdasarkan teorema 3.2.7 $\boldsymbol{Reg(\Gamma(R))}$ merupakan graf dengan setiap komponennya adalah graf komplit atau graf bipartisi komplit sehingga $\boldsymbol{Reg(\Gamma(R))}$ harus memuat sikel dengan panjang 3 atau sikel dengan panjang 4. Jadi $\boldsymbol{gr\left(Reg(\Gamma(R))\right) \leq 4}$.

**Definisi 3.2.5**

Diberikan $R$ adalah sebuah ring komutatif dengan elemen satuan. $Nil(R) = Nil(R)^* \cup \{0\}$. $Nil(\Gamma(R))$adalah graf dengan himpunan titiknya adalah semua elemen dari $Nil(R)$dan setiap $x, y \in Nil(R)$, $x \neq y$ maka titik $x$ dan titik $y$ dihubungkan oleh sebuah sisi jika dan hanya jika $x + y \in Z(R)$.

**Lemma 3.2.11**

$\boldsymbol{Nil(\Gamma(R))}$ merupakan subgraf dari $\boldsymbol{T(\Gamma(R))}$.

**Definisi 3.2.6**

$\boldsymbol{Nil(\Gamma(R))}$ disebut subgraf total dari $\boldsymbol{T(\Gamma(R))}$yang dibangun oleh $\boldsymbol{Nil(R)}$.

**Teorema 3.2.12**

Diberikan $\boldsymbol{R}$ adalah sebuah ring komutatif dengan elemen satuan. Jika $\boldsymbol{Nil(\Gamma(R))}$ subgraf dari $\boldsymbol{Z(\Gamma(R))}$ maka $\boldsymbol{Nil(\Gamma(R))}$ merupakan graf komplit.

**Bukti:**

Tunjukkan terlebih dahulu bahwa $\boldsymbol{Nil}(\boldsymbol{R})$ merupakan ideal. Karena $\boldsymbol{Nil}(\boldsymbol{R}) \subset \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$ maka $\boldsymbol{Nil}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}))$ merupakan graf komplit.

**Teorema 3.2.13**

Diberikan $\boldsymbol{R}$ adalah sebuah ring komutatif dan $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$ merupakan ideal dari $\boldsymbol{R}$. Jika $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Nil}(\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$, dan $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ maka titik $\boldsymbol{x}$ dan titik $\boldsymbol{y}$ berhubungan langsung *(adjacent)* di $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}))$.

**Bukti:**

Diberikan $x \in Nil(R)$ maka $x \in R$ dan $\exists n \in N$ sedemikian sehingga $x^n = 0$.

Jika $n = 1$ maka $x = 0 \in Z(R)$. Jika $n > 1$ maka $x^n = x\,x^{n-1} = 0$ sehingga $x$ merupakan pembagi nol dari ring $R$. Jadi $x \in Z(R)$. Diberikan $y \in Z(R)$ dan $y \neq x$ maka $x + y \in Z(R)$ sehingga titik $x$ dan titik $y$ berhubungan langsung *(adjacent)* di $T(\Gamma(R))$.

**Teorema 3.2.14**

Diberikan $\boldsymbol{R}$ adalah sebuah ring komutatif dengan elemen satuan dan $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$ merupakan ideal dari $\boldsymbol{R}$. Jika $\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{Nil}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}))\right) \neq \{\boldsymbol{0}\}$ dan $\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{Nil}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}))\right) \subset \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}))\right)$, maka $\boldsymbol{gr}\left(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}))\right) = \boldsymbol{3}$.

**Bukti:**

Andaikan $\boldsymbol{gr}\left(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}))\right) > 3$.

$V\left(Nil(\Gamma(R))\right) \neq \{0\}$ maka $\exists x \in Nil(R)$ dengan $x \neq 0$.$V\left(Nil(\Gamma(R))\right) \subset V\left(Z(\Gamma(R))\right)$ maka $\exists y \in Z(R)$ dengan $y \neq 0$ dan $y \neq x$. Karena $x \in Nil(R)$ dan $Nil(R) \subset Z(R)$ maka $x \in Z(R)$.

$0, x \in Z(R)$dan $Z(R)$ ideal maka $0 + x = x \in Z(R)$ sehingga titik 0 dan titik $x$ berhubungan langsung. $x \in Nil(R)$ dan $y \in Z(R)$maka berdasarkan teorema3.10 titik $x$ dan titik $y$ berhubungan langsung.$y, 0 \in Z(R)$dan$Z(R)$ ideal maka $y + 0 = y \in Z(R)$ sehingga titik $y$ dan titik 0 berhubungan langsung . Jadi $(0, x, y, 0)$ merupakan sikel dengan panjang 3. Terjadi kontradiksi sehingga pengandaian salah. Jadi $gr\left(Z(\Gamma(R))\right) = 3$.

**KESIMPULAN**

Graf total dari ring komutatif $R$ dilambangkan dengan $T(\Gamma(R))$ adalah graf dengan himpunan titiknya adalah semua elemen dari ring $R$ dan setiap $x, y \in R$, $x \neq y$ maka titik $x$ dan titik $y$ dihubungkan oleh sebuah sisi jika dan hanya jika $x + y \in Z(R)$. Dalam skripsi ini telah dibahas 3 subgraf total dari $T(\Gamma(R))$ yaitu $Z(\Gamma(R))$ subgraf total yang dibangun oleh $Z(R)$, $Reg(\Gamma(R))$ subgraf total yang dibangun oleh $Reg(R)$, dan $Nil(\Gamma(R))$ subgraf total yang dibangun oleh $Nil(R)$. Dari pembahasan di atas didapatkan sifat-sifat dari ketiga subgraf total tersebut dalam bentuk teorema dan lemma.

**DAFTAR PUSTAKA**


[1] Anderson, David F. and BadawiAyman. 2007. *The total graph of a comutatif ring.* USA: The University of Tennessee.

[2] Aprinurisa, Dilla. 2012. *Latis Dan graph pembaginolkompresdari ring komutatifhingga.* Skripsi. Tidakdipublikasikan . Surabaya: UniversitasNegeri Surabaya.

[3] Budayasa, I Ketut. 2007. *TeoriGraph danAplikasinya*. Surabaya:University Press UNESA.

[4] Gallian, Joseph A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra.* USA: University of Minnesota Duluth.

[5] Alkam, Osama and Osba, Emad Abu. 2008. *On the Regular Element in* $Z_n$. Tubitak: Turk J. Math