GRAF PANGKAT PADA SEMIGRUP

Nur Hidayatul Ilmiah

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya.
mia_ilmiah99@yahoo.com

Dr. Agung Lukito, M.S.

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya.
gung_lukito@yahoo.co.id

Abstrak

Graf pangkat $P(S)$ pada semigrup S adalah sebuah graf tak berarah yang himpunan titiknya adalah S dan dua titik $a, b \in S$ berhubungan langsung jika dan hanya jika $a \neq b$ dan $a^m = b$ atau $b^m = a$ untuk suatu bilangan bulat positif m. Setiap titik di graf pangkat $P(S)$ berhubungan langsung dengan satu dan hanya satu elemen idempoten di semigrup S dan tidak ada dua idempoten yang terhubung oleh sebuah lintasan yaitu setiap komponen di graf pangkat $P(S)$ memuat idempoten tunggal untuk setiap titik pada komponen yang berhubungan langsung. Selain itu, graf pangkat $P(S)$ terhubung jika dan hanya jika memuat idempoten tunggal. Sehingga semigrup S paling banyak memiliki satu idempoten. Akibatnya jika G grup hingga, maka graf pangkat $P(G)$ selalu terhubung dan graf pangkat $P(G)$ lengkap jika dan hanya jika G grup siklik berorder 1 atau p^m.
Kata Kunci: Graf pangkat, berhubungan langsung, terhubung, lintasan, semigrup, grup, graf lengkap, grup siklik.

Abstract

Power graphs $P(S)$ of semigroups S is an undirected graph whose vertex set is S and two vertices $a, b \in S$ are adjacent if and only if $a \neq b$ and $a^m = b$ or $b^m = a$ for some positive integer m. Every vertex in P(S) is adjacent to one and only one idempotent in S and no two idempotens are connected by path i.e., each component of $P(S)$ contains a unique idempotent to which every other vertices of that coomponent are adjacent. Moreover, $P(S)$ is connected if and only if contains a single idempotent. So that, S contains at most one idempotent. As consequence, $P(G)$ is connected for any finite group G and $P(G)$ is complete if and only if G is a cyclic group of order 1 or p^m.
Keywords: Power graph, Adjacent, Connected, Path, Semigroup, Group, Complete graph, Cyclic group.

1. PENDAHULUAN

Menurut Howie (1976), himpunan tak kosong S dikatakan semigrup jika di dalam S didefinisikan dengan operasi biner $*$, sedemikian hingga S bersifat tertutup dan bersifat asosiatif.

Menurut Budayasa (2007), sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari obyek-obyek yang disebut titik, dan himpunan hingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$.

Memadukan ilmu aljabar abstrak seperti semigrup dengan teori graf bukan merupakan hal yang baru. Penelitian terkenal dari graf berarah yang mempertimbangkan elemen pada grup sebagai himpunan titik adalah Cayley Digraph, Selain itu, graf pangkat pada semigrup oleh Chakrabarty pada tahun 2009. Pada skrispsi ini, akan dibahas definisi graf pangkat pada semigrup serta sifat-sifatnya. Adapun graf yang akan dibahas adalah graf tak berarah.

2. DASAR TEORI

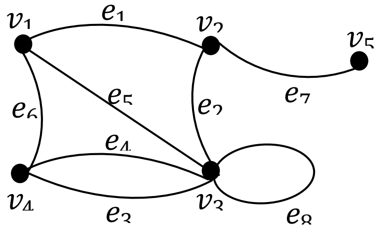
2.1.1 Graf

Definisi 2.1.1

Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari obyek-obyek yang disebut titik, dan himpunan hingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. (Budayasa, 2007: 1).

Contoh 2.1.1

Misalkan Graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$dapat direpresentasikan seperti terlihat pada Gambar 2.1 di bawah ini



Gambar 2.1 Graf G dengan 5 titik dan 8 sisi

2.2.1 Operasi Biner

Definisi 2.2.1
Diberikan sebuah himpunan G. Sebuah operasi biner * pada G adalah fungsi yang mengawankan setiap pasangan terurut pada G dengan tepat satu elemen di G. (Gallian, 2008: 40)

Contoh 2.2.1
Misalkan $\mathbb{Z}$ himpunan semua bilangan bulat. Operasi penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner. Sebab + merupakan fungsi dari $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ yaitu untuk setiap $(a,b) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ maka $(a+b) \in \mathbb{Z}$.

Sedangkan operasi pembagian (:) bukan operasi biner pada $\mathbb{Z}$. Sebab terdapat $(a,b) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ sedemikian hingga $(a{:}b) \notin \mathbb{Z}$. Misal $(3,5) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ tetapi $(3{:}\,5) \notin \mathbb{Z}$.

2.3.1 Semigrup

Definisi 2.3.1
Himpunan tak kosong S dikatakan semigrup jika di dalam S didefinisikan dengan operasi biner $*$, sedemikian hingga
1. untuk $a, b \in S$ maka $a * b \in S$ (bersifat tertutup).
2. untuk $a, b, c \in S$ maka $a * (b * c) = (a * b) * c$, (bersifat asosiatif).

(Howie, 1976: 1)

Contoh 2.3.1
$(\mathbb{Z}, +)$ merupakan semigrup karena memenuhi sifat tertutup dan asosiatif

Definisi 2.3.2
S dikatakan semigrup hingga jika memiliki sejumlah hingga elemen. (Tero, 1996: 1)

Contoh 2.3.2
$(\mathbb{Z}_5, +_5)$ merupakan semigrup.
$\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$.
Karena banyaknya elemen pada semigrup ini adalah 5,maka semigrup ini disebut semigrup hingga.

Definisi 2.3.3
S merupakan semigrup komutatif, jika memenuhi $\forall x, y \in S$, maka $x * y = y * x$. (Howie, 1976: 1)

Contoh 2.3.3
Pada Contoh 2.3.2, $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ juga merupakan semigrup komutatif.
Misalkan $2 \in S$ dan $3 \in S$, maka $2 +_5 3 = 3 +_5 2 = 0$.

Definisi 2.3.4
Jika $(S,*)$ adalah semigrup, maka himpunan bagian tak kosong T pada S disebut subsemigrup pada S jika tertutup di bawah operasi S yaitu $\forall x, y \in T$ berlaku $x * y \in T$. (Howie, 1976: 5)

Contoh 2.3.4
$T = \{1,2,4\}$ merupakan himpunan bagian dari $S = (\mathbb{Z}_7 - \{0\}, \times_7)$.
Perhatikan tabel Cayley beikut

$\times_7$	1	2	4
1	1	2	4
2	2	4	1
4	4	1	2

Berdasarkan tabel Cayley di atas dapat diketahui bahwa $(\forall x, y \in T)$ maka $x \times_7 y \in T$. Sehingga T merupakan subsemigrup pada $(\mathbb{Z}_7 - \{0\}, \times_7)$.

Definisi 2.3.5
Jika a adalah elemen pada semigrup S, maka subsemigrup $< a >$ pada S dibangun oleh a memuat perpangkatan bilangan positif pada a dan disebut subsemigrup siklik pada S yang dibangun oleh a. (Stephen, 1986: 243)

Contoh 2.3.5
Pada Contoh 2.3.5, T merupakan subsemigrup siklik.
Karena dibangun oleh $a = 4$ yaitu $T = \{1,2,4\} = \{4^3, 4^2, 4^1\}$.

2.4.1Grup

Definisi 2.4.1
Himpunan tak kosong G dikatakan membentuk grup jika di dalam G didefinisikan sebuah operasi biner *, sedemikian hingga
1. untuk $a, b \in G$ maka $a * b \in G$ (bersifat tertutup).
2. untuk $a, b, c \in G$ maka $a * (b * c) = (a * b) * c$ (bersifat asosiatif).
3. terdapat elemen khusus $e \in G$ sedemikian hingga $a * e = e * a = a$.
   Untuk setiap $a \in G$, e disebut elemen identitas .
4. untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian hingga
   $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$ dan a^{-1} disebut invers a di G.

(Herstein, 1996 : 41)

Contoh 2.4.1
Misal $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$.dengan operasi penjumlahan modulo 4.
Perhatikan tabel Cayley berikut ini

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

1. untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a +_4 b \in G$.
2. untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a +_4 (b +_4 c) = (a +_4 b) +_4 c$.
3. terdapat elemen $0 \in G$ sedemikian hingga $a +_4 0 = 0 +_4 a = a$ Untuk setiap $a \in G$.
4. untuk setiap $a \in G$ terdapat elemen $a^{-1} \in G$ sedemikian hingga $a +_4 a^{-1} = 0$.

Karena G memenuhi 4 sifat grup, maka G dengan operasi penjumlahan modulo 4 merupakan grup.

2.5.1 Subgrup
Definisi 2.5.1
Suatu himpunan bagian tak kosong H dari grup G disebut subgrup dari G jika terhadap operasi di G, H sendiri membentuk grup.(Herstein , 1996: 51)
Contoh 2.5.1
$H = \{0,2\}$ merupakan subgrup dari $< \mathbb{Z}_4, +_4 >$. Sebab
i) $H = \{0,2\}$
$\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$
$H \neq \emptyset$, $H \subseteq \mathbb{Z}_4$
ii) Perhatikan tabel Cayley di bawah ini:

$+_4$	0	2
0	0	2
2	2	0

Berdasarkan tabel Cayley (ii) tampak bahwa
a) untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a +_4 b \in H$.
b) untuk setiap $a, b, c \in H$ berlaku $a +_4 (b +_4 c) = (a +_4 b) +_4 c$.
c) terdapat elemen $0 \in H$ sedemikian hingga $a +_4 0 = 0 +_4 a = a$ Untuk setiap $a \in H$.
d) untuk setiap $a \in H$ terdapat elemen $a^{-1} \in H$ sedemikian hingga $a +_4 a^{-1} = 0$.

Sehingga H merupakan Grup.
Dari (i) dan (ii) maka terbukti bahwa H merupakan subgrup di $\mathbb{Z}_4$.

2.6.1 Grup Siklik
Definisi 2.6.1
Grup G dikatakan siklik jika terdapat sebuah elemen a di G sedemikian hingga $G = \{a^n | n \in Z\}$, elemen a disebut pembangkit dari G. G adalah grup siklik dibangun oleh a ditulis $G = < a >$. (Gallian, 2008: 72)
Contoh 2.6.1
Misalkan $U(10) = \{1, 3, 7, 9\}$ dengan operasi perkalian modulo 10.
$\{1, 3, 7, 9\} = \{3^0, 3^1, 3^3, 3^2\} = <3>$ dan
$\{1, 3, 7, 9\} = \{7^0, 7^3, 7^1, 7^2\} = <7>$.
Jadi 3 dan 7 adalah pembangkit untuk $U(10)$.

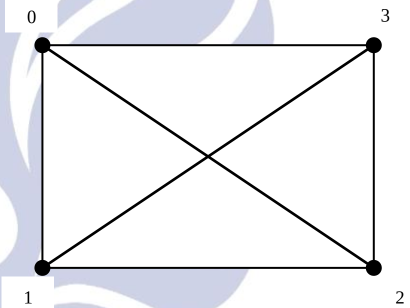
Teorema 2.6.1
Jika G grup hingga, maka order suatu elemen membagi order dari grup.
(Herstein, 1996: 60)
Bukti: Lihat (Herstein, 1996: 60)
Teorema 2.6.2
Setiap subgrup pada grup siklik adalah siklik. (Gallian, 2008: 77)
Bukti: Lihat (Gallian, 2008: 77 dan 78)

3. PEMBAHASAN

Definisi 3.1.1
Graf pangkat $P(S)$ pada semigrup S adalah sebuah graf tak berarah yang himpunan titiknya adalah S dan dua titik $a, b \in S$ berhubungan langsung jika dan hanya jika $a \neq b$ dan $a^m = b$ atau $b^m = a$ untuk suatu bilangan bulat positif m. (Chakrabarty, 2009:410)
Contoh 3.1.1
$(\mathbb{Z}_4, +_4)$ merupakan semigrup.
Graf pangkat pada semigrup $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ dapat direpresentasikan seperti pada tabel di bawah ini

$0^1 = 0$	$1^1 = 1$	$2^1 = 2$	$3^1 = 3$
$0^2 = 0$	$1^2 = 2$	$2^2 = 0$	$3^2 = 2$
$0^3 = 0$	$1^3 = 3$	$2^3 = 2$	$3^3 = 1$
$0^4 = 0$	$1^4 = 0$	$2^4 = 0$	$3^4 = 0$

Sehingga dapat digambarkan seperti Gambar 3.1 di bawah ini



Gambar 3.1 Graf pangkat pada semigrup $(\mathbb{Z}_4, +_4)$
Definisi 3.1.2
Sebuah elemen $i \in S$ adalah idempoten, jika $i^2 = i$. Himpunan semua idempoten dari S dinotasikan $E(S)$. (Howie, 1976: 5)
Contoh 3.1.2
Pada Contoh 3.1.1 yakni $(\mathbb{Z}_4, +_4)$, dapat diperoleh bahwa $E(S) = \{0\}$.

Dari Definisi 3.1.2 maka dapat dibuktikan bahwa $i^k = i$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Penjelasannya adalah sebagai berikut
Untuk $k = 1$, maka $i^1 = i$
Untuk $k = 2$, maka $i^2 = i$ (berdasarkan Definisi 3.1.2)
Untuk $k = 3$, maka $i^3 = i^2 . i = i . i = i^2 = i$
$\vdots$
Untuk $k = k$, maka $i^k = i$.

Proposisi 3.1.1
Misalkan S semigrup hingga, untuk setiap $a \in S$, terdapat $m \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga a^m adalah idempoten.

Bukti:
Misalkan $a \in S$. Karena S hingga, maka dapat dibentuk suatu barisan $a^1, a^2, a^3, \ldots \in S$. Sehingga terdapat tak hingga banyak bentuk $a^i \in S$ dengan S hingga. Karena itu, terdapat tak hingga banyak pula nilai i sedemikian hingga $a^i = x$ untuk suatu $x \in S$. Jadi, selalu dapat ditemukan $j > 2i$ sedemikian hingga $a^i = x = a^j$. Kalikan kedua ruas dengan a^{j-2i}. Sehingga diperoleh

$$a^i . a^{j-2i} = a^j . a^{j-2i}$$
$$a^{j-i} = a^{2j-2i}$$
$$a^{j-i} = a^{2(j-i)}$$

Atau dapat dimisalkan $m = j - i$. Sehingga diperoleh $a^m = a^{2m} = (a^m)^2$. ■

Definisi 3.1.3
Jika $a^m = e$ dan $a^n = f$ untuk suatu $e, f \in E(S)$, maka $e = a^{mn} = f$.(Chakrabarty, 2009:411)

Definisi 3.1.4
Relasi biner ρ pada S didefinisikan dengan
$a\rho b \Leftrightarrow a^m = b^m$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$. (3.1)
(Chakrabarty, 2009:411)

Jelas ρ adalah relasi ekivalen pada S. Karena ρ memenuhi sifat refleksif, simetris dan transitif.

Lemma 3.1.2
Misalkan S semigrup hingga dan ρ adalah relasi biner pada S yang didefinisikan oleh (3.1). Untuk setiap $a, b \in S$, berlaku $a\rho b$ jika dan hanya jika $a^{m_1} = b^{m_2} = i$ untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $i \in E\,(S)$.

Bukti:
1. (⇨)Misalkan $a\rho b$ dengan $a, b \in S$. Berdasarkan relasi biner yang didefinisikan oleh (3.1) $a^m = b^m$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$. Karena S hingga, maka berdasarkan Proposisi 3.1.1 terdapat $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $a^{n_1} = i$ dan $j = b^{n_2}$ dengan $i, j \in E\,(S)$.
   Misalkan kedua ruas pada $a^m = b^m$ dipangkatkan dengan n_1 dan n_2, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Sehingga dapat diperoleh $a^{mn_1n_2} = b^{mn_1n_2}$. Dengan sifat asosiatif pada perpangkatan diperoleh $(a^{n_1})^{mn_2} = (b^{n_2})^{mn_1}$. Karena $a^{n_1} = i$ dan $j = b^{n_2}$. Maka $i^{mn_2} = j^{mn_1}$. Karena $i, j \in E\,(S)$, maka $i = j$. Sehingga $i = a^{mn_1n_2} = b^{mn_1n_2} = j$. Jadi $a^{m_1} = b^{m_2} = i \in E\,(S)$ untuk $m_1 = m_2 = mn_1n_2$.
2. (⇦) Misalkan $a, b \in S$ sedemikian hingga
   $a^{m_1} = b^{m_2} = i$,$m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ dan $i \in E\,(S)$.
   Maka berdasarkan relasi biner yang didefinisikan oleh (3.1) $a^m = b^m$, di mana $m = m_1m_2$, Sehingga $a\rho b$.
   Karena terbukti dari dua sisi, maka terbukti bahwa misalkan S semigrup hingga dan ρ adalah relasi biner pada S yang didefinisikan oleh (3.1) maka untuk setiap $a, b \in S$, berlaku $a\rho b$ jika dan hanya jika $a^{m_1} = b^{m_2} = i$ untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $i \in E\,(S)$. Type equation here.

Teorema 3.1.3
Misalkan S semigrup hingga dan $a, b \in S$ sedemikian hingga $a \neq b$. Dua elemen a dan b terhubung oleh sebuah lintasan di graf pangkat $P(S)$ jika dan hanya jika $a\rho b$.

Bukti:
1. (⇨) Misalkan $a, b \in S$ dihubungkan oleh sebuah lintasan, katakanlah $(a, c_1, c_2, \ldots c_k, b)$ di graf pangkat $P(S)$. Karena $(a, c_1, c_2, \ldots c_k, b)$ merupakan sebuah lintasan, maka a berhubungan langsung dengan c_1, c_1 berhubungan langsung dengan c_2, c_2 berhubungan langsung dengan c_3 dan seterusnya. Karena a berhubungan langsung dengan c_1 di graf pangkat $P(S)$, maka berdasarkan Definisi 3.1.1 $a^m = c_1$ atau $c_1^m = a$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$. Karena $c_1 \in S$ dan S hingga, maka berdasarkan Proposisi 3.1.1 terdapat $m_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $c_1^{m_1} = i$ dengan $i \in E(S)$. Karena $c_1 = a^m$, maka $c_1^{m_1} = (a^m)^{m_1} = i$. Sehingga $c_1^{m_1} = a^{mm_1} = a^{m_2} = i$, dengan $m_2 = mm_1$. Jadi berdasarkan Lemma 3.1.2, diperoleh $a\rho c_1$.
   Berdasarkan definisi lintasan, karena a berhubungan langsung ke c_1, c_1 berhubungan langsung dengan c_2, c_2 berhubungan langsung dengan c_3 dan seterusnya. Sehingga dengan induksi dapat diketahui $c_i\rho c_{i+1}$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Karena $(a\rho c_1)$ $(c_1\rho c_2)$ $(c_2\rho c_3)$ ... $(c_{k-1}\rho c_k)$ $(c_k\rho b)$. Maka berdasarkan sifat transitif pada ρ diperoleh $a\rho b$.
2. (⇦) Misalkan $a\rho b$ maka berdasarkan definisi biner yang didefinisikan oleh (3.1) $a^m = b^m$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$. Maka berdasarkan Lemma 3.1.2 $a^n = i = b^n$ untuk $n \in \mathbb{N}$ yang berarti baik a dan b berhubungan langsung dengan e. Maka a dan b terhubung oleh sebuah lintasan.

Karena terbukti dari dua sisi, maka terbukti bahwa misalkan S semigrup hingga dan $a, b \in S$ sedemikian hingga $a \neq b$. Dua elemen a dan b terhubung oleh sebuah lintasan di graf pangkat $P(S)$ jika dan hanya jika $a\rho b$. ■

Berdasarkan Teorema 3.1.3 di atas, jelas bahwa setiap titik di graf pangkat $P(S)$ berhubungan langsung dengan satu dan hanya satu elemen idempoten di semigrup S dan tidak ada dua idempoten yang terhubung oleh sebuah lintasan yaitu setiap komponen di graf pangkat $P(S)$ memuat idempoten tunggal untuk setiap titik pada komponen yang berhubungan langsung.

Definisi 3.1.5
Misalkan klas ekivalensi $i \in E(S)$ di bawah relasi ρ oleh C_i dinotasikan sebagai berikut
$C_i = \{a \in S | a\rho i\} = \{a \in S | a^m = i,$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}\}$ (3.2)
(Chakrabarty, 2009: 413)

Akibat 3.1.4
Komponen pada graf pangkat $P(S)$ tepat $\{C_i | i \in E(S)\}$. Setiap komponen C_i memuat idempoten tunggal $\boldsymbol{i}$. Jika S komutatif, maka C_i adalah subsemigrup pada S untuk setiap $i \in E(S)$.

Bukti:

Misalkan $x, y \in C_i$. Berdasarkan (3.2), diperoleh $x\rho i$ dan $y\rho i$. Berdasarkan relasi biner yang didefinisikan oleh (3.1) $x^m = i$ dan $y^n = i$, untuk suatu $m, n \in \mathbb{N}$. Karena S komutatif, maka $x^m . y^n = i.i = i$. Sedangkan untuk membuktikan C_i adalah subsemigrup pada S maka akan dicek sifat ketertutupan pada S, yakni $xy\rho i$. Misalkan $(xy)^{mn}$, maka

$$\begin{aligned}(xy)^{mn} &= x^{mn} . y^{mn} \\ &= (x^m)^n (y^n)^m \\ &= i^n i^m = i.i = i\end{aligned}$$

Sehingga $xy\rho i$ dan terbukti bahwa jika S komutatif, maka C_i adalah subsemigrup pada S untuk setiap $i \in E(S)$. ■

Akibat 3.1.5

Misalkan S semigrup hingga, maka graf pangkat $P(S)$ terhubung jika dan hanya jika S memuat idempoten tunggal.

Bukti:

1. (⇨) Misalkan S memiliki dua idempoten yaitu i dan j. Karena graf pangkat $P(S)$ terhubung, maka terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan i dan j. Berdasarkan Teorema 3.1.3 $i\rho j$. Karena $i\rho j$ maka berdasarkan relasi biner yang didefinisikan oleh (3.1) $i^m = j^m$, $m \in \mathbb{N}$. Sehingga dapat diperoleh $i = j$, kontradiksi dengan S memiliki dua idempoten. Pemisalan salah, seharusnya S memiliki satu idempoten/ memuat idempoten tunggal.
2. (⇦) Misalkan $a, b \in S$ sedemikian hingga $a^{m_1} = i$, $i \in E(S)$ dan $m_1 \in \mathbb{N}$. Karena S memuat idempoten tunggal maka $b^{m_2} = i, i \in E(S)$ dan $m_2 \in \mathbb{N}$. Sehingga $a^{m_1} = i = b^{m_2}$. Sehinggga berdasarkan Lemma 3.1.2 $a\rho b$, dan berdasarkan Teorema 3.1.3 a dan b terhubung oleh sebuah lintasan di graf pangkat $P(S)$.

Karena terbukti dari dua sisi, maka terbukti bahwa misalkan S semigrup hingga, maka graf pangkat $P(S)$ terhubung jika dan hanya jika S memuat idempoten tunggal . ■

Proposisi 3.1.6

Misalkan S semigrup sedemikian hingga graf pangkat $P(S)$ terhubung. Maka S memuat paling banyak satu idempoten.

Bukti :

Misalkan $i \neq j$ di $E(S)$ dan $(i, a_1, a_2, \ldots, a_n, j)$ adalah sebuah lintasan antara i dan j. Maka $a_1^m = i$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$ (karena $i^n = i \neq a_1$ untuk $n \in \mathbb{N}$). Misalkan $a_2^{n_1} = a_1$ $(n_1 \in \mathbb{N})$, sehingga $a_2^{mn_1} = \left(a_2^{n_1}\right)^m = a_1^m = i$. Jika $a_1^{n_2} = a_2$ $(n_2 \in \mathbb{N})$ maka $a_2^m = (a_1^m)^{n_2} = i^{n_2} = i$. Dengan induksi, diperoleh $a_n^k = i$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$. Sehingga dengan cara yang sama, diperoleh $a_n^t = j$ untuk suatu $t \in \mathbb{N}$. Jadi $i = a_n^{kt} = j$ yang bertentangan dengan pemisalan $i \neq j$. Sehingga S memuat paling banyak satu idempoten. ■

Definisi 3.1.6

Sebuah semigrup S disebut regular jika untuk setiap $a \in S$, terdapat $x \in S$ sedemikian hingga $axa = a$. (Howie, 1976: 44)

Misalkan $a \in S$ dan $x \in S$ sedemikian hingga $axa = a$. Perhatikan bahwa $(ax)^2 = (ax)(ax) = (axa)x = ax$. Sehingga $ax \in E(S)$. Mudah dilihat bahwa xa juga merupakan idempoten. Jadi, semigrup regular S selalu memuat idempoten.

Lemma 3.1.7

Sebuah semigrup regular S adalah grup jika dan hanya jika S memuat idempoten tunggal.

Bukti:

1) (⇨) Ambil $a \in S$. Karena S regular maka terdapat $x \in S$ sedemikian hingga $axa = a$. S adalah grup, maka S pasti memuat idempoten tunggal. Karena satu-satunya idempoten yang termuat di grup adalah elemen identitas.
2) (⇦) Ambil $a \in S$. Karena S regular maka terdapat $x \in S$ sedemikian hingga $axa = a$. Karena S memuat idempoten tunggal maka $ax = xa = i$, ax, xa dan $i \in E(S)$. Jika i dioperasikan dengan a, maka dapat diperoleh $ia = (ax)a = axa = a$ dan $ai = a(xa) = axa = a$. Sehingga dari dua sisi dapat diketahui bahwa i merupakan elemen identitas dan $x = a^{-1}$ merupakan invers dari a karena $a^{-1} = a^{-1}aa^{-1}$ dan $a = aa^{-1}a$. Jadi S juga memiliki identitas dan invers. Sehingga S adalah grup.

Karena terbukti dari dua sisi, maka terbukti bahwa sebuah semigrup regular S adalah grup jika dan hanya jika S memuat idempoten tunggal. ■

Akibat 3.1.8

Misalkan S semigrup regular. Jika graf pangkat $P(S)$ terhubung, maka S adalah grup.

Bukti:

Misalkan $a \in S$, terdapat $x \in S$ sedemikian hingga $axa = a$. Karena graf pangkat $P(S)$ terhubung maka berdasarkan Proposisi 3.1.6, S memuat paling banyak satu idempoten atau idempotennya tunggal. Karena S memuat idempoten tunggal, maka berdasarkan Lemma 3.1.7 S adalah grup. Jadi terbukti bahwa misalkan S semigrup regular. Jika graf pangkat $P(S)$ terhubung, maka S adalah grup. ■

Proposisi 3.1.9

Misalkan S semigrup. Graf pangkat $P(S)$ lengkap jika dan hanya jika koleksi subsemigrup siklik S terurut linier terhadap relasi himpunan bagian (yaitu, untuk setiap dua subsemigrup siklik S_1, S_2 di S, $S_1 \subseteq S_2$, atau $S_2 \subseteq S_1$).

Bukti:

1. (⇨) Misalkan graf pangkat $P(S)$ lengkap untuk sebuah semigrup S. Misalkan $S_1 = < a >$ dan $S_2 = < b >$ merupakan dua subsemigrup siklik dari S untuk suatu $a \neq b$ di S. Karena graf pangkat $P(S)$ lengkap maka a dan b berhubungan langsung. Karena

berhubungan langsung, maka berdasarkan Definisi 3.1.1 $a = b^m$, atau $b = a^m$ $m \in \mathbb{N}$. Sehingga generator pada S_1 termuat di S_2. Karena setiap elemen di S_1 dibangun oleh a, maka setiap elemen di S_1 termuat di S_2. Sehingga $< a > \subseteq < b >$ atau $< b > \subseteq < a >$ dan $S_1 \subseteq S_2$ atau $S_2 \subseteq S_1$.

2. (⇦) Misalkan S semigrup sedemikian hingga subsemigrup siklik S terurut linier terhadap relasi himpunan bagian $a \neq b$ di S. Maka $< a > \subseteq < b >$ atau $< b > \subseteq < a >$ yang mengimplikasikan a berhubungan langsung dengan b di graf pangkat $P(S)$. Sehingga setiap titik pada graf pangkat $P(S)$ berhubungan langsung. Oleh karena itu graf pangkat $P(S)$ lengkap.

Karena terbukti dari dua sisi, maka terbukti bahwa misalkan S semigrup. Graf pangkat $P(S)$ lengkap jika dan hanya jika koleksi subsemigrup siklik S terurut linier terhadap relasi himpunan bagian (yaitu, untuk setiap dua subsemigrup siklik S_1, S_2 pada $S, S_1 \subseteq S_2$, atau $S_2 \subseteq S_1$). ■

3.2 Graf Pangkat Pada Grup

Definisi 3.2.1
Graf pangkat $P(G)$ pada grup G adalah graf yang himpunan titiknya adalah grup, dua elemen berhubungan langsung jika salah satunya merupakan perpangkatan dari yang lain. (Cameron, 2009:1)

Contoh 3.2.1
Pada Contoh 3.1.1 $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ merupakan semigrup.
Namun $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ juga merupakan grup.
Sehingga bentuk graf pangkat pada semigrup dan grup $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ adalah sama.

Teorema 3.2.1
Jika G grup hingga, maka graf pangkat $P(G)$ selalu terhubung

Bukti:
Misalkan G grup hingga. Berdasarkan definisi grup yakni bersifat tertutup, asosiatif, memiliki identitas dan invers, maka G juga merupakan semigrup S. Sehingga berdasarkan Akibat 3.1.5, graf pangkat $P(G)$ juga terhubung. Karena satu-satunya idempoten di grup yakni elemen identitas. ■

Teorema 3.2.2
Misalkan G grup. Graf pangkat $P(G)$ terhubung jika dan hanya jika setiap elemen di G berorder hingga.

Bukti :

1. (⇨) Misalkan graf pangkat $P(G)$ terhubung. Misalkan $a \neq e$ adalah elemen di G. Sehingga terdapat sebuah lintasan $(e = a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k = a)$ di graf pangkat $P(G)$ untuk suatu $a_i \in G, i = 1, 2, \ldots, k$, $k \in \mathbb{N}$. Karena $a_1 \neq e$, maka diperoleh $a_1^n = e$ untuk suatu $n > 1, n \in \mathbb{N}$. Karena a_1 dan a_2 berhubungan langsung di graf pangkat $P(G)$, maka berdasarkan Definisi 3.2.1 diperoleh $a_1^m = a_2$ atau $a_2^m = a_1$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}, m > 1$. Jika $a_1^m = a_2$, maka $a_2^n = a_1^{mn} = e$. Sebaliknya, jika $a_2^{mn} = a_1^n = e$. Jadi dalam kedua kasus $|a|$ adalah hingga. Dengan induksi dapat ditunjukkan bahwa $|a|$ adalah hingga.
2. (⇦) Misalkan G grup. Karena setiap titik berorder hingga, maka $a^n = e$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Sehingga setiap elemen berhubungan langsung dengan e. Jadi selalu terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik di graf pangkat $P(G)$. Oleh karena itu, graf pangkat $P(G)$ terhubung.

Karena terbukti dari dua sisi, maka terbukti bahwa misalkan G grup. Graf pangkat $P(G)$ terhubung jika dan hanya jika setiap elemen di G berorder hingga.■

Teorema 3.2.3
Jika G grup siklik tak hingga, maka graf pangkat $P(G)$ tidak terhubung.

Bukti:
Misalkan G grup siklik tak hingga, maka terdapat sebuah pembangkit di G yang berorder tak hingga. Berdasarkan Teorema 2.2.2 jika setiap elemen di G berorder hingga maka graf pangkat $P(G)$ terhubung. Namun karena terdapat sebuah pembangkit di G yang berorder tak hingga, maka graf pangkat $P(G)$ tidak terhubung. ■

Teorema 2.2.4
Misalkan G grup hingga. Graf pangkat $P(G)$ lengkap jika dan hanya jika G grup siklik berorder 1 atau p^m, untuk suatu bilangan prima p dan untuk suatu $m \in \mathbb{N}$.

Bukti:

1. (⇨) Misalkan graf pangkat $P(G)$ lengkap, maka diklaim bahwa G adalah siklik. Jika tidak, maka G setidaknya memiliki dua elemen a, b sedemikian hingga $a \notin < b >$ dan $b \notin < a >$. Karena $a \notin < b >$ dan $b \notin < a >$, maka a dan b tidak berhubungan langsung di graf pangkat $P(G)$ bertentangan dengan graf pangkat $P(G)$ lengkap. Sehingga G siklik.

   Untuk graf pangkat $P(G)$ lengkap misalkan dengan 1 titik, jelas bahwa G grup siklik berorder 1.

   Untuk $|G| > 1$. Misalkan p dan q dua faktor prima yang berbeda pada $|G|$. Maka G memiliki unsur-unsur a, b berorder berturut-turut p dan q. Karena berbeda akibatnya, $< a > \nsubseteq < b >$ atau $< b > \nsubseteq < a >$. Karena jika $< a > \subseteq < b >$ atau $< b > \subseteq < a >$, maka $p|q$ dan $q|p$. Sehingga tidak ada sisi antara a dan b di graf pangkat $P(G)$ dan karenanya graf pangkat $P(G)$ tidak lengkap, kontradiksi dengan pemisalan. Sehingga $|G| = p^m$ untuk suatu bilangan prima p dan $m \in \mathbb{N}$.
2. (⇦) Jika G siklik berorder 1, maka graf pangkat $P(G)$ merupakan graf lengkap dengan 1 titik.

   Misalkan G grup siklik dengan pembangkit g, secara simbolik ditulis $G = < g >$. Misalkan $|G| = p^m$ dengan p bilangan prima dan m bilangan bulat positif. Misalkan $x, y \in G$. Berdasarkan Teorema 2.6.1 maka $|x| = p^i$ dan $|y| = p^j$, untuk suatu bilangan bulat i, j. diasumsikan $i \leq j$.

Misalkan dibentuk himpunan bagian

$$H = \{a \in G | a^{p^j} = e\}.$$

Karena G siklik maka G abelian. Karena G abelian maka di bawah operasi di G, H membentuk subgrup. Berdasarkan Teorema 2.6.2 S merupakan subgrup siklik. Dapat dibuktikan bahwa pembangkit dari S yaitu $< y >$ karena $|y| = p^j$.

Sedangkan untuk elemen $x \in H$ memenuhi syarat keanggotaan H yaitu $x^{p^j} = e$. Dengan definisi H, terdapat $k \geq 1 \ni x = y^k$. Karena $x = y^k$, berdasarkan Definisi 3.2 maka x berhubungan langsung dengan y. Sehingga setiap 2 titik berhubungan langsung dan graf pangkat $P(G)$ lengkap.

Karena terbukti dari dua sisi, maka terbukti bahwa misalkan G grup hingga. Graf pangkat $P(G)$ lengkap jika dan hanya jika G merupakan grup siklik berorder 1 atau p^m, untuk suatu bilangan prima p dan untuk suatu $m \in \mathbb{N}$. ■

Contoh 3.2.4
Grup $(\mathbb{Z}_8, +_8)$ merupakan grup siklik berorder perpangkatan prima yang membentuk graf lengkap.

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan pada BAB III dan sejalan dengan rumusan masalah pada BAB I dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

Sifat-sifat graf pangkat pada semigrup adalah

1. Dua elemen a dan b terhubung oleh sebuah lintasan di graf pangkat $P(S)$ dengan $a \neq b$ jika dan hanya jika $a\rho b$.
2. Graf pangkat $P(S)$ terhubung jika dan hanya jika semigrup S memuat idempoten tunggal.
3. Jika graf pangkat $P(S)$ terhubung maka semigrup S memuat paling banyak satu idempoten.
4. Untuk semigrup regular S adalah grup jika dan hanya jika S memuat idempoten tunggal.

Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya mengkaji mengenai graf pangkat pada semigrup secara umum. Bagi pembaca yang ingin meanjutkan penelitian pada skripsi ini, penulis menyarankan untuk mengkaji graf pangkat pada semigrup secara khusus misalkan pada semigrup $\mathbb{Z}_n$ dan semigrup $(U(n))$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Blaha, Michael. 2010. *Patterns of Data Modelling* . USA: CRC Press.

[2] Budayasa, Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press Surabaya.

[3] Cameron, Peter J. dan Shamik Ghosh. 2009. *The Power Graph of finite Group*. Preprint (diakses tanggal 03 Februari 2013). http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/preprints/power4.pdf

[4] Chakrabarty, Ivy. Shamik Ghosh dan M.K Sen. 2009. *Undirected Power Graphs of Semigroups.* Semigroup Forum 78.

[5] Gallian, Joseph A. 2008. *Contemporary Abstract Algebra Seventh Edition*. United State of America : University of Minnesota Duluth.

[6] Harju, Tero. 1996. *Lecture Notes on Semigroups.* Finland: University of Turku.

[7] Herstein, I.N. 1996. *Abstract Algebra Third Edition.* USA: Prentice hall Inc.

[8] Howie, J.M. 1976. *An Introduction to Semigroups Theory*. London: Academic Press.

[9] Leon, Stephen. 1986. *Cyclic Subsemigroups Of Symmetric Inverse Semigroups.* Semigroup Forum 34.(diakses tanggal 05 Oktober 2013) http://link.springer.com/static-content/lookinside/428/art%253A10.1007%252FBF02573166/000.png