POLINOMIAL KARAKTERISTIK BEBERAPA KELAS GRAF BERARAH

Nuri Wardani[1], I Ketut Budayasa[2]
[1]Jurusan Matematika, Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Surabaya, 60931
[2]Jurusan Matematika, Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Surabaya, 60931
email :nurijubex@gmail.com[1], ketutbudayasa@yahoo.com[2]

ABSTRAK

Persamaan figuratif adalah metode untuk mengkontruksi polynomial karakteristik graf berarah D dengan n titik $(X(D))$ tanpa menggunakan matrik berhubungan langsung. Pada skripsi ini akan dipelajari bagaimana persamaan figuratif digunakan dalam mengkaji formula untuk menghitung setiap koefisien t_i dengan $1 \leq i \leq n$ dari suatu$X(D) = x^n + t_1x^{n-1} + t_2x^{n-2} + \cdots + t_{n-1}x + t_n$. Graf linier, graf siklik dan graf tangga adalah tiga graf komplek yang akan dikaji polinomial karakteristiknya. Akan dibuktikan bahwa setiap koefisien t_i untuk i ganjil pada graf linier dengan n titik adalah sama dengan nol, dan $t_i = (-1)^{\frac{i}{2}}\binom{n-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}}$ untuk i genap. Pada graf siklik dengan n titik juga akan dibuktikan bahwa koefisien $t_i = 0$ jika i ganjil dan $i < n$, sedangkan koefisien t_i untuk i genap dan $i < n$ adalah $(-1)^{\frac{i}{2}}\frac{n}{n-\frac{i}{2}}\binom{n-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}}$. Koefisien ganjil pada graf tangga dengan n titik adalah nol sedangkan untuk setiap l_i dengan $i$genap, $l_i = (-1)^{\frac{i}{2}}\binom{n+1-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}}$.

Kata kunci : *graf linier, graf siklik, graftangga, polinomialkarakteristik, persamaanfiguratif*

PENDAHULUAN

Graf berarah (*digraph*) adalah salah satu kajian dalam teori graf yang merupakan pasangan berurutan dari dua himpunan V(D) yaitu himpunan berhingga tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik dan$\tau(D)$yaitu himpunan berhingga (boleh kosong) yang anggota-anggotanya disebut busur,sedemikianhinggasetiapbusurmerupakanpasanganberurutandariduatitik di $V(D)$. Setiap graf berarah dengan jumlah titik berhingga dapat direpresentasikan dalam bentuk gambar (diagram) dan dalam bentuk matrik, salah satunya adalah matrik berhubungan langsung (*adjacency matrix*) yang merupakan matrik persegi berordo nxn.

Polinomial karakteristik adalah suatu persamaan polinom (suku banyak) yang didapat dari suatu matrik persegi dengan mencari nilai eigen dari matrik tersebut. Jika diberikan suatu matrik persegi berordo nxn dapat dikontruksi polinomial karakteristiknya dengan pangkat tertinggi n.

Polinomial karakteristik dari suatu graf berarah dengan jumlah titik berhingga dapat dikontruksi dengan mencari nilai eigen matrik berhubungan langsungnya. Persamaanfiguratif (*FigureEquation*) adalah metode yang dapat digunakan untuk mengkontruksi polinomial karakteristik suatu graf tanpa menggunakan matrik berhubungan langsung (*adjacency matrix*) tetapi dengan menghitung setiap koefisien dari polinomial karakteristik secara umum.

Polinomial karakteristik dari sebarang graf berarah D dengan n titik adalah $X(D) = x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$, setiap koefisien c_i untuk $1 \leq i \leq n$ dapat dihitung dengan memeriksa $\mathcal{L}_i$ yaitu himpunan subgraf berarah dengan panjang i. Untuk beberapa kelas graf berarah yang lebih komplek dan memiliki banyak titik, kontruksi polinomial karakteristik dengan menggunakan definisi persamaan figuratif cukup sulit dilakukan. Oleh karena itu dapat diturunkan suatu formula untuk menghitung koefisien dari beberapa kelas graf berarah dengan menggunakan dasar definisi persamaan figuratif.

KAJIAN TEORI

2.1 Graf

Definisi 2.1

Sebuah graf *G* berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong *V*(*G*) dari obyek-obyek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) *E*(*G*) yang elemen-elemennyadisebut sisi sedemikian hingga setiap elemen *e* dalam *E*(*G*) merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di *V*(*G*). Himpunan*V*(*G*) disebut himpunan titik G dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi G.

Definisi 2.2

Graf berarah D adalah suatu pasangan berurutan dari dua himpunan V(D) yaitu himpunan berhingga tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik dan $\tau(D)$ yaitu himpunan berhingga (boleh kosong) yang anggota-anggotanya disebut busur sedemikian hingga setiap busur merupakan pasangan berurutan dari dua titik di V(D). Jika v_1 dan v_2 adalah dua titik pada graf berarah D dan $e = (v_1, v_2)$sebuah busur D, maka e disebut busur-keluar (*outdegree*) darititikv_1 dan e disebut busur – menuju (*indegree*) titikv_2.

Definisi 2.3

Matrik berhubungan langsung dari sebuah graf berarah D adalah A(D) yaitu sebuah matrik bilangan bulat berordo nxn dimana banyaknya baris dan kolom sama dengan banyaknya titik dari graf berarah D, matrik e-uv sama dengan 1 jika terdapat busur dari titik u ke v dan 0 jika tidak terdapat busur dari titik u ke v.

Definisi 2.4

Sebuah graf H dikatakan sub graf berarah dari graf berarah D dinotasikan dengan$H \subseteq D$ jika $V(H) \subseteq V(D)$dan $\tau(H) \subseteq \tau(D)$ **.**

Definisi 2.5

Sub graf berarah linier dari suatu graf berarah D adalah suatu graf baru K dengan $V(K) \subseteq V(G)$ dan $\tau(K) \subseteq \tau(G)$ sedemikian hingga setiap titik pada graf berarah K memiliki *indegree* dan *outdegree* sama dengan 1.

Sub graf berarah linier dengan panjang$i$ terdiri dari i titik dan i sisi sedemikian hingga setiap titik memiliki *indegree* dan *outdegree* sama dengan 1.

2.2 Grup

Definisi 2.7

Diketahuihimpunantakkosong B denganoperasi *.Himpunan B disebutgrupterhadapoperasi * jikamemenuhiaksioma-aksiomaberikut :

- Memenuhisifatketertutupan ($\forall\, a, b \in B$ berlaku $a * b \in B$)
- Asosiatif ($\forall\, a, b, c \in B$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$)
- Memuatelemenidentitas ($\exists e \epsilon B$,$\forall\, a \epsilon B$ berlaku $e * a = a * e = a$)
- Setiapelemen B Memiliki Invers ($\forall\, a \epsilon B, \exists a^{-1} \epsilon B$ sedemikian hingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$)

Definisi 2.8

Suatu grup (B,*) disebut grup siklik jika terdapat $b \epsilon B$ sedemikian hingga untuk setiap $a \epsilon B$ dapat dinyatakan sebagai $a = b^n$ untuk suatu $n \epsilon Z$. b disebut elemen pembangun atau generator dari B dan B merupakan grup siklik yang dibangun oleh b, dapatdinotasikan$B = \langle b \rangle$, dapat juga dinyatakan sebagai $\langle b \rangle = \{b^n | n \epsilon Z\}$.

Definisi 2.9

Sebuah subset (S,*) darisuatugrup (B,*) disebut himpunan generator (*generating set*) jika hanya jika setiap elemen di B dapat dinyatakan sebagai hasil operasi elemen-elemen S dan inversnya.

2.3 Graf Cayley

Definisi 2.10 :

Missal $(B,*)$ adalah grup berhingga dan S adalah himpunan generator maka graf cayley dari $(B,*)$ dengan himpunan generator S dapat ditulis $C(B, S)$adalah graf sedemikian hingga :

- Setiapelemen di $(B,*)$ merupakan titik di graf cayley $C(B, S)$ sehingga order dari grup B (banyaknya elemen B) sama dengan banyaknya titik pada graf cayley $C(B, S)$.
- (a, b)merupakan busur graf cayley jika dan hanya jika $a * s = b$, dari a ke b untuk $s \in S$.

2.4 PolinomialKarakteristik

Definisi 2.11

Misalkan diketahui sebuah matrik persegi A berordo nxn, nilai eigen dari matrik A adalah sebuah skalar x dimana terdapat matrik tak nol W berordo $nx1$ sedemikian hingga $AW = xW$...(1). Matrik kolom W disebut vector eigen yang bersesuaian dengan x. Nilai eigen juga disebut sebagai nilai asli atau karakteristik.

Untuk mendapatkan nilai eigen x dari matrik A persamaan (1) dapat dituliskan kembali menjadi :

$$xW - AW = 0$$
$$(x - A)W = 0$$
$$(xI - A)W = 0$$

I adalah matrik identitas berordo nxn. W adalah vektor tak nol, agar x menjadi nilai eigen harus terdapat solusi tak nol dari persamaan $(xI - A)W = 0$.Solusi tak nol diperoleh jika $det(xI - A) = 0$, persamaan tersebut berupa suatu persamaan polinom dengan pangkat tertinggi n dan disebut **polynomial karakteristik** dari matrik A.

2.5 PolinomialKarakteristik Graf Berarah

Definisi 2.12

Suatu graf berarah D dengan n titik dapat direpresentasikan ke dalam suatu matrik berhubungan langsung $A(D)$ yang merupakan matrik persegi berordo nxn. Berdasarkan Definisi 2.11 nilai eigen x dari matrik $A(D)$ diperoleh dari persamaann karakteristik sebagai berikut :

$$(xI - A(D))W = 0$$

W adalah suatu vektor tak nol, agar x menjadi nilai eigen maka :

$$det(xI - A(D)) = 0$$

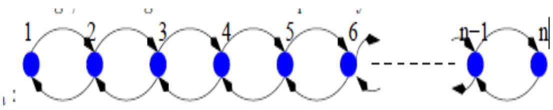
Ruas kiri dari persamaan diatas merupakan polinomial karakteristik berderajat n dari suatu graf berarah D dengan n titik. Secara umum direpresentasikan sebagai berikut :

$$X(D) = x^n + t_1 x^{n-1} + t_2 x^{n-2} + \cdots + t_{n-1} x + t_n$$

2.6 Graf Komplek

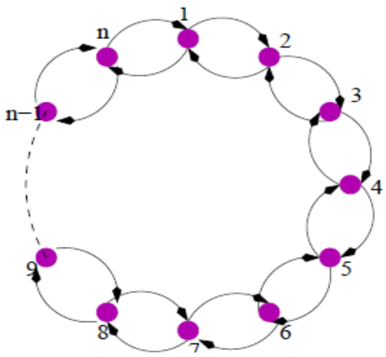
Definisi 2.13

Graf linier (T_n) adalah graf berarah dengan n titik sehingga setiap titik $v_i \epsilon$ adalah sumber *(source)* dari busur dengan tujuan v_{i-1} dan v_{i+1} sedangkan v_1 dan v_n adalah sumber *(source)* dari sebuah busur secara berturut-turut dengan target v_2 dan v_{n-1}.



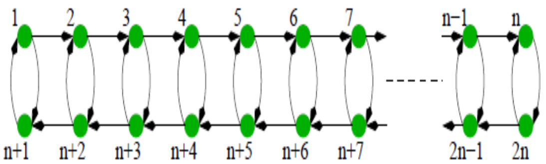
Definisi 2.14

Graf Siklik adalah graf cayley dari sebuah grup siklik dengan order n dan himpunan generator $\{1, -1\}$ atau dapat ditulis $C(Z_n, \{1, -1\})$. Graf siklik juga dapat di bentuk dari sebuah graf linier dengan n titik dengan menghubungkan titik v_1 dan v_n. Pelabelan titik pada graf siklik adalah dengan mengkorespondensikan $Z_n = \{0,1,2, \ldots, n-1\}$ dengan $\{v_{1,} v_2, \ldots, v_n\}$.



Definisi 2.15

Graf tangga(R_{2n}) adalah graf berarah dengan himpunan titik $\{v_1, v_2, \ldots, v_{2n}\}$, untuk setiap $v_i \epsilon \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ adalah sumber (*source*) dari Sebuah busur dengan tujuan v_{i+1}, dan untuk setiap $v_j \epsilon \{v_{n+2}, v_{n+3}, \ldots, v_{2n}\}$ adalah sumber dari sebuah busur dengan tujuan v_{j-1}.



2.7 PersamaanFiguratif (*Figure Equation*)

Teorema 2.1

Polinomialkarakteristiksebaranggrafberarah D dengan$n$ titik secara umum adalah :

$$X(D) = x^n + t_1 x^{n-1} + t_2 x^{n-2} + \cdots + t_{n-1} x + t_n$$

Koefisientt_i untuk $1 \le i \le n$ dapat dihitung dengan menggunakan persamaan figuratif sebagai berikut :

$$t_i = \sum_{L \in \mathcal{L}_i} (-1)^{p(L)}$$

$\mathcal{L}_i$ adalah himpunan semua sugraf berarah linier L dari graf berarah D dengan tepat i titik, sedangkan $P(L)$adalahbanyaknyakomponendari$L$ (banyaknya sikel berarah linier).

PEMBAHASAN

3.1 PolinomialKarakteristik Graf Linier

Lemma 3.1

Jika$X(T_n) = x^n + t_1 x^{n-1} + t_2 x^{n-2} + \cdots + t_{n-1} x + t_n$adalahpolinomialkarakteristikdarigraf linier dengan$n$ titik maka koefisien $t_i = 0$ untuk i ganjil dan $i \le n$.

Bukti :

Langkah pertama untuk membuktikan Lemma diatas adalah dengan menunjukkan bahwa, setiap $L\epsilon\mathcal{L}_i$ terdiri dari $\frac{i}{2}$ sikel berbeda dengan panjang dua.

Diketahui sebuah graf T_n dengan $V(T_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, misal diambil sebarang titik v_k dimana k adalah indek titik terkecil pada $L\epsilon\mathcal{L}_i$ untuk $1 \le k \le n$, artinya jika $v_k \epsilon L$ maka $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\} \notin L$, karena L subgraf berarah linier maka berdasarkan Definisi 2.5 dan Definisi 2.13, Diperoleh :

$$v_k \epsilon\, L \to\ v_{k+1} \in L$$

Titik v_{k+1} memiliki sebuah busur yang berasal dan menuju titik v_k sehingga titik v_k dan v_{k+1} membentuk subgraf berarah linier denganpanjangdua, akibatnya v_{k+1} tidak terhubung dengan v_{k+2} pada L.

Dengan langkah yang sama, dapat diambil sebarang titik terdekat dengan v_{k+1} misal titik $v_s \epsilon\, L\epsilon\mathcal{L}_i$ untuk setiap $k+1 \le s \le n$. Karena L subgraf berarah linier maka berdasarkan Definisi 2.5 dan Definisi 2.13, diperoleh :

$$v_s \epsilon\, L \to\ v_{s+1} \epsilon L$$

Titik v_{s+1} memiliki sebuah busur yang berasal danmenujutitik v_s, akibatnya v_{s+1} tidak terhubung dengan titik v_{s+2} pada L, sehingga v_s dan v_{s+1} membentuk subgraf berarah linier dengan panjang dua. Hal ini menunjukkan bahwa, setiap titik $v_i \epsilon L$ hanya memiliki sebuah busur yang berasal dan menuju ke tepat satu titik yang terhubung langsung, yaitu $v_{i+1} \epsilon L$ sehingga membentuk subgraf berarah linier dengan panjang 2 atau dengan kata lain setiap $L\epsilon\mathcal{L}_i$ terdiri dari $\frac{i}{2}$ sikel berbeda dengan panjang dua.

Langkah selanjutnya adalah menghitung koefisien t_{2j+1} untuk setiap $0 \le j \le \frac{n-1}{2}$ dengan memeriksa $\mathcal{L}_{2j+1}$. Berdasarkan langkah pembuktian diatas, diperoleh bahwa setiap $L\epsilon\mathcal{L}_{2j+1}$ terdiri dari $\frac{2j+1}{2}$ sikel berbeda dengan panjang dua. Karena $\frac{2j+1}{2}$ bukan bilangan bulat maka $\mathcal{L}_{2j+1} = \emptyset$. Sehingga berdasarkan Teorema 2.1, $t_{2j+1} = \sum_{L\in\mathcal{L}_{2j+1}} (-1)^{p(L)} = 0$ untuksetiap $0 \le j \le \frac{n-1}{2}$. ■

Lemma 3.2 :

Jika $X(T_n) = x^n + t_1 x^{n-1} + t_2 x^{n-2} + \cdots + t_{n-1} x + t_n$ adalah polinomial karakteristik dari graf linier dengan n titik maka koefisien t_i adalah :

$t_i = t_{2m} = (-1)^m \binom{n-m}{m}$ untuk i genap dan $i \le n$.

Bukti :

Untuk menghitung setiap koefisien t_i dengan i genap dapat dilakukan dengan mencari kardinalitas $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{2m} (|\mathcal{L}_{2m}|)$ untuk $1 \le m \le \frac{n}{2}$ terlebih dahulu .Langkah pertama adalah melabel subgrafberarah dengan panjang dua dengan indektitik terendahnya. Setiap $L\epsilon\mathcal{L}_{2m}$ dengan $2m$ titik, terdiri dari $\frac{2m}{2}$ sikel berbeda dengan panjang dua, sehinggan $|\mathcal{L}_{2m}| =$ banyaknya cara menempatkan m pias yang tidak berurutan dari sebanyak $n-1$ pias yang tersedia. $|\mathcal{L}_{2m}|$ ekivalen dengan banyaknya cara memilih m bilangan dari $\{1,2, \dots, n-1\}$ sedemikian hingga tidak ada dua bilangan yang berurutan.

Misal bilangan-bilangan tersebut adalah $\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ Sedemikian hingga $1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_m \le m-1$.

Misal :

$x_1 = n_1 \ge 1$, $x_2 = n_2 - n_1 > 2$ karena n_1 tidak berdekatan dengan n_2. $x_3 = n_3 - n_2 > 2$ karena n_3 tidak berdekatan dengan n_2, terdapat sebanyak m, sehingga $x_m = n_{m+1} - n_m > 2$ karena n_m tidak berdekatan dengan n_{m+1} dan $x_{m+1} = n - 1 - n_m \ge 0$ ....(*)

Karenater dapat sebanyak $n-1$ bilangan, maka berakibat :

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} = n - 1$...........................(**)

Penjelasan diatas ekivalen dengan permasalahan mencari banyaknya solusi bulat dari persamaan (**) dengan syarat-syarat yang diberikan pada persamaan (*), dengan fungsi pembangkit sebagai berikut :

$$P(x) = (x + x^2 + \cdots)(x^2 + x^3 + \cdots)^{m-1}(1 + x + x^2 + \cdots)$$

$$P(x) = x^{2m-1} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{m+1}$$

$$P(x) = x^{2m-1} \sum_{t=0}^{\sim} \binom{m+1+t-1}{t} x^t$$

$$P(x) = \sum_{t=0}^{\sim} \binom{m+t}{t} x^{t+2m-1}$$

Misal $t + 2m - 1 = k$, maka :

$$P(x) = \sum_{k-2m-1}^{\sim} \binom{m+k-2m+1}{k-2m+1} x^k$$

Kofisiendari x^{n-1} adalah a_{n-1} dimana $k = n-1$, maka :

$$a_{n-1} = \binom{m + (n-1) - 2m + 1}{(n-m) - 2m + 1} = \binom{n-m}{n-2m}$$

$$a_{n-1} = \binom{n-m}{m}$$

Sehingga $|\mathcal{L}_{2m}| = a_{n-1} = \binom{n-m}{m}$.

Setiap $L\epsilon\mathcal{L}_{2m}$ dibentuk oleh m sikel berarah dengan panjang dua, sehingga $P(L) = 2$.

Berdasarkan Teorema 2.1 didapat koefisien t_i untuk $i = 2m$ sebagai berikut.

$$t_i = t_{2m} = \sum_{L\epsilon\mathcal{L}_{2m}} (-1)^{P(L)} = (-1)^m |\mathcal{L}_{2m}|$$
$$= (-1)^m \binom{n-m}{m}. \blacksquare$$

Teorema 3.1

Misaldiberikangraf linier dengan$n$ titik dengan polinomial karakteristik,

$$X(T_n) = x^n + t_1x^{n-1} + t_2x^{n-2} + \cdots + t_{n-1}x + t_n$$

makakoefisient_i dari graf linier dengan n titik adalah sebagai berikut :

$t_i = 0$ untuk i ganjil dan $i \leq n$

$t_i = (-1)^{\frac{i}{2}}\binom{n-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}}$ untuk i genap dan $i \leq n$

3.2 PolinomialKarakteristik Graf Siklik

Lemma 3.3

Jika$X(C(Z_n,\{1,-1\})) = x^n + t_1x^{n-1} + t_2x^{n-2} + \cdots + t_{n-1}x + t_n$ adalahpolinomialkarakteristikgrafsiklikdengan order n, maka koefisien $t_i = 0$ untuk i ganjil dan $i \leq n$.

Bukti :

BerdasarkanDefinisi 2.14 yang merupakandefinisidarigrafsiklik, sertadenganmembandingkanstrukturgraf linier dengangrafsiklikdapatdiketahuibahwauntuk$i$ ganjil dan $i < n$, $\mathcal{L}_i = \emptyset$. DenganmenggunakanTeorema 2.1, diperoleh, $t_i = \sum_{L\epsilon\mathcal{L}_i}(-1)^{P(L)} = 0$.$\blacksquare$

Lemma 3.4

Jika$X(C(Z_n,\{1,-1\})) = x^n + t_1x^{n-1} + t_2x^{n-2} + \cdots + t_{n-1}x + t_n$ adalahpolinomialkarakteristikgrafsiklikdengan order n, maka koefisien

$t_i = t_{2m} = (-1)^m \frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m}$ untuk i genap dan $i < n$.

Bukti :

Menghitungkoefisient_{2m} untuk $2 \leq 2m < n$ dapat dilakukan dengan mencari $|\mathcal{L}_{2m}|$. Pada graf siklik $\mathcal{L}_{2m}$ dapat dibagi menjadi dua himpunan bagian yaitu himpunan A dan B. A adalah himpunan bagian dari $\mathcal{L}_{2m}$tanpamenggunakansikeldenganpanjangduamisal$(v_1,(v_1,v_2),v_2,(v_2,v_1),v_1)$ atau dapat ditulis $(1 \leftrightarrow 2)$. Badalah himpunan bagian dari $\mathcal{L}_{2m}$ yang memuat sikel $(1 \leftrightarrow 2)$.$\mathcal{L}_{2m} = A \cup B$sehingga$|\mathcal{L}_{2m}| = |A| + |B|$............(*)

$C(Z_n,\{1,-1\})$ dengan menghapus busur dari sikel $(1 \leftrightarrow 2)$ merupakan graf linier dengan n titik (T_n) sehingga,

$|A| = |\mathcal{L}_{2m}|$ pada graf $T_n = \binom{n-m}{m}$...............(**)

B adalah himpunan bagian dari $\mathcal{L}_{2m}$ yang memuat sikel $(1 \leftrightarrow 2)$ maka $|B|$ adalah banyaknya cara memilih $m-1$ sikel denganpanjangduapadagraf$C(Z_n,\{1,-1\}) - (1 \leftrightarrow 2))$ dengan menghapus titik-titik pada sikel tersebut, dengan kata lain $|B|$ adalah banyaknya cara memilih $m-1$ sikel berbeda dengan panjang dua pada graf T_{n-2}. Analog denganpembuktian Lemma 3.2,

$$|B| = \binom{n-2-(m-1)}{m-1}$$

$|B| = \binom{n-m-1}{m-1}$............(***)

Berdasarkanpersamaan (*),(**) dan (***) didapat :

$$|\mathcal{L}_{2m}| = |A| + |B|$$
$$|\mathcal{L}_{2m}| = \binom{n-m}{m} + \binom{n-m-1}{m-1}$$
$$|\mathcal{L}_{2m}| = \frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m}$$

Selanjutnyauntuksetiap$L\epsilon\mathcal{L}_{2m}\, P(L) = m$ untuk $2 \leq 2m < n$, sehingga berdasarkan Teorema 2.1, didapat :

$$t_i = t_{2m} = \sum_{L\epsilon\mathcal{L}_{2m}} (-1)^{P(L)} = (-1)^m |\mathcal{L}_{2m}|$$
$$= (-1)^m \frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m}$$

untuk$i < n$.$\blacksquare$

Lemma 3.5 :

Jika$X(C(Z_n,\{1,-1\}))$ adalah polinomial karakteristik graf siklik dengan order n maka koefisien t_i untuk $i = n$ adalah :

$t_i = -2$ untuk n ganjil dan $t_n = -2 + 2(-1)^{\frac{n}{2}}$ untuk n genap.

Bukti :

Padagraf$C(Z_n,\{1,-1\})$ terdapat dua sikel dengan panjang n, yaitu sikel dengan arah positif dan sikeldenganarahnegatif.SehinggaberdasarkanTeorema 2.1, untuk n ganjil didapat :

$$t_n = \sum_{L\epsilon\mathcal{L}_n} (-1)^{P(L)} = (-1)^1 + (-1)^1 = -2$$

Untuk$n$genap, BerdasarkanTeorema 2.1, didapat :

$$t_n = \sum_{L\epsilon\mathcal{L}_n} (-1)^{P(L)} = (-1)^1 + (-1)^1 + (-1)^{\frac{n}{2}}$$

$t_n = -2 + (-1)^{\frac{n}{2}}$.$\blacksquare$

Berdasarkan Lemma 3.3 dan Lemma 3.4 didapatTeoremasebagaiberikut :

Teorema 3.2

Jika$C(Z_n,\{1,-1\})$ adalah sebuah graf siklik yang memiliki order n dengan polinomial karakteristik,

$$X(C(Z_n,\{1,-1\}) = x^n + t_1x^{n-1} + t_2x^{n-2} + \cdots + t_{n-1}x + t_n$$

Makakoefisient_i adalah sebagai berikut :

$t_i = 0$ untuk i ganjil dan $i < n$

$t_i = -2$ untuk $i$ganjil dan $i = n$

$t_i = (-1)^{\frac{i}{2}} \frac{n}{n-\frac{i}{2}} \binom{n-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}}$untuk $i$genap dan $i < n$

$t_i = -2 + 2(-1)^{\frac{n}{2}}$ untuk i genap dan $i = n$

3.4 PolinomialKarakteristik Graf Tangga

Definisi 3.4

Secaraumumpolinomialkarakteristikdarigr aftanggadengan2n titik adalah :

$$X(R_{2n}) = x^{2n} + l_1x^{2n-1} + l_2x^{2n-2} + \cdots l_{2n-1}x + l_{2n}$$

Lemma 3.6

Misaldiberikangraftanggadengan2n titik, dengan polinomial karakteristik , $X(R_{2n}) = x^{2n} + l_1x^{2n-1} + l_2x^{2n-2} + \cdots + l_{2n-1}x + l_{2n} = 0$ maka koefisien $l_{2j+1} = 0$ untuk setiap $j \le \frac{2n-1}{2}$.

Bukti :

Untukmembuktikan Lemma diatas, terlebihdahuluharusditunjukkanbahwauntuksetiap $L\epsilon\mathcal{L}_j$ dari graf R_{2n}, dan C_k adalah sebarang sikel berarah linier dengan panjang k sedemikian hingga $C_k \subseteq L$ maka k selalu genap.

Misaldiambiltitik$v_a\ \epsilon C_k \subseteq L\epsilon\mathcal{L}_j$ sebagai titik dengan indek terkecil dari $2n$ dan termasuk titik dalam C_k, sehingga $1 \le a \le n$ dan $v_{a-1} \notin C_k$. Sebuah busur dengan sumber titik v_a hanya memiliki sebuahtititktujuanyaituv_{n-a}, tapi hal ini kontradiksi dengan v_a sebagai titik dengan indek terkecil, Begitu juga dengan v_b untuk $n+1 \le b \le 2n$.

Setiaptitikdalam$C_k$pastimemiliki*indegree*d an*outdegree*samadengansatu, karena$v_{a-1} \notin C_k$, sebuah busur yang menujutitikv_a hanya memiliki sebuah titik sumber yaitu v_{n+a} Sehingga :

$$v_a\epsilon C_k \Leftrightarrow v_{n+a}\ \epsilon C_k$$

Sebuahbusur yang menujutitikv_{n+a} hanya memiliki sebuah titik sumber yaitu v_a. Akibatnya C_k adalah sebuah sikel berarah yang memiliki panjang dua.

Sejalandenganlangkahdiatas, sebuahbusurdengantitiksumberv_a memiliki titik tujuan $v_{a+1}\epsilon C_k$ dan busur dengan tujuan v_{n+a} harus memiliki titik sumber v_{n+a+1} , maka

$$v_{a+1}\epsilon C_k \Leftrightarrow v_{n+a+1}\ \epsilon C_k$$

Sehingga$\{v_a, v_{a+1}, v_{n+a}, v_{n+a+1}\} \subseteq C_k$, jika sebuah busur dengan titik sumber v_{a+1} dan tiik tujuan v_{n+a+1}, akan membentuk sikel dengan panjang empat (C_4).

Begitujugadenganbusur yang memilikitititktujuan$v_{a+2}\epsilon C_k$ dan sebuah busur dengan titik tujuan v_{n+a+1}memilikitititksumberv_{n+a+2}. Sehingga,

$$v_{a+2}\ \epsilon C_k \Leftrightarrow v_{n+a+2}\ \epsilon C_k$$

Analog denganlangkahdiatasdapatditunjukkanbahwa

$$v_c\epsilon C_k \Leftrightarrow v_{n+c}\epsilon C_k$$

Sikeltersebutakanberhenti di titikv_b, sebuah busur dengan sumber titik v_b hanya memiliki sebuah titik target yaitu titik v_{b-n}, dimana v_b adalah titik dengan indek terbesar pada sikel tersebut. Sehingga C_k terdiri dari himpunan pasangan berurutan titik (v_c, v_{n+c}) sehingga k genap.

Karenasetiap C_k pada graf R_{2n} merupakan sikel dengan panjang genap maka $L\epsilon\mathcal{L}_{2j+1}$ merupakan penjumlahan sikel-sikel dengan panjang genap. Sehingga $\mathcal{L}_{2j+1} = \emptyset$, berdasarkan Teorema 2.1, $l_{2j+1} = 0$ untuk setiap $j \le \frac{2n-1}{2}$.■

Koefisienl_{2m} diperoleh dengan memeriksa himpunan $\mathcal{L}_{2m}$.dengan memperhatikan Å $\subseteq \mathcal{L}_{2m}$dimana,

Å $= \{L\epsilon\mathcal{L}_{2m} | L$ terdiri dari m sikel berbeda dengan panjang dua$\}$

Untuksetiap$0 \le c \le m$, $L_c\epsilon$ Å $\subseteq \mathcal{L}_{2m}$ terdiri dari sebuah rantai dari sikel dengan panjang dua yang berhubungan langsung dan $m-c$ sikel dengan panjangdua yang tidakberhubunganlangsung. Dapatdidefinisikansikeldenganpanjangdua$(v_i \leftrightarrow v_{n+i})$ berhubungan langsung dengan sikel yang memiliki panjang dua yaitu $(v_{i-1} \leftrightarrow v_{n+i-1})$ dan $(v_{i+1} \leftrightarrow v_{n+i+1})$. Sebuah rantai dari c sikel berbeda dengan panjangdua yang berhubunganlangsugadalah :$\{(v_i \leftrightarrow v_{n+i}), (v_{i+1} \leftrightarrow v_{n+i+1}), \ldots, (v_{i+c-1} \leftrightarrow v_{n+i+c-1})\}$

Selanjutnyaadalahmemeriksahimpunan $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}_{2m}$ dimana,

$\mathcal{B} = \{L\epsilon\mathcal{L}_{2m} | L$ menggunakan $2m$ titik yang sama dengan $L_c\}$

Lemma 3.7

$\mathcal{B} = \{L\epsilon\mathcal{L}_{2m} | L$ menggunakan $2m$ titik yang sama dengan $L_c\}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}_{2m}$ maka, $\sum_{L\epsilon\mathcal{B}} (-1)^{P(L)} = 0$

Untukmembuktikan Lemma diatas, yang harusdiperhatikanadalah$P(L)$ untuk setiap $L\epsilon\mathcal{B}$. Sebagai contoh misal $c = 2$, maka $\mathcal{B}$ memiliki dua elemen, yang pertama adalah terdiri dari $m$pias, menggunakan$m$ sikel sikel berbeda dengan panjang dua, dan yang kedua adalah $m-1$ pias menggunakan $m-2$ sikel berbeda dengan panjang dua serta sebuah sikel dengan panjang empat.

Untuksetiap$L\epsilon\mathcal{B}$, $m-c$ yang merupakan sikel dengan panjang dua yang tidak berhubungan langsung dan selalu menghasilkan $m-c$ pias. Dengan memperhatikan himpunan $C \subseteq L$ yang merupakan rantai dari pasangan titik yang berdekatan dimana $1 \leq P(C) \leq c$. Misal diandaikan terdapat $\binom{c-1}{k-1}$caraberbedauntukmenggambar$C$ dalam k pias. Pengandaian tersebut akan dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan induksi matematika.

- Untuk$P(C)=1$, hanya terdapat sebuah pilihan yaitu sikel dengan panjang $2c$. $1=\binom{c-1}{0}$.
- Untuk$P(C)=2$, dapat dilakukan dengan menetapkan sebuah pilihan untuk menjadi sikel yang pertama dan menjadikan sisa titik menjadi sikel yang kedua. Sehingga terdapat $\binom{c-1}{1}$ pilihan.
- Untuk$P(C)=k-1$, diasumsikan terdapat $\binom{c-1}{k-2}$ cara utuk membentuk $2c$ titik menjadi $k-1$ sikel berbeda.
- Makauntuk$P(C)=k$, dapat dipilih sikel yang pertama dan menjumlahkan setiap cara untuk membentuk titik-titik yang tersisa menjadi $k-2$ sikel berbeda. Jumlahdarikemungkinan-kemungkinantersebutadalahsebagaiberikut :

$$\binom{c-1-1}{k-2}+\binom{c-1-2}{k-2}+\binom{c-1-3}{k-2}+\cdots+\binom{c-1-(c-k+1)}{k-2}=\binom{c-1}{k-1}$$

Berdasarkanpembuktiandiatasdapatdisimpulkanbahwaterdapat$\binom{c-1}{k-1}$cara berbeda untuk menggambar C dalam k pias. Sehingga untuk $L\epsilon\mathcal{L}_B$,
$P(L)=k+(m+c)$, dan

$$\sum_{L\epsilon B}(-1)^{P(L)}=(-1)^{m-c}\sum_{k=1}^{c}(-1)^k\binom{c-1}{k-1}$$

$\sum_{L\epsilon B}(-1)^{P(L)}=0$.■

Pada Lemma diatas$L_c$memiliki sebuah rantai dari sikel dengan panjang dua yang berhubungan langsung, tetapi Å memuat elemen-elemen dengan rantai yang lebih dari satu. Dengan mempertimbangkan $L_{\{c\}}\epsilon$Å dengan $\{c\}=\{c_1,c_2,\dots,c_i\}$ yang merupakanhimpunanrantaidenganpanjang$i$, dan $m-\{c\}$ adalah sikel dengan panjang dua yang tidak berhubungan langsung.
$C=\{L\epsilon\mathcal{L}_{2m}|L$menggunakan$2m$ titik yang sama dengan $L_{\{c\}}\}$, C dapat dipartisi menjadi penjumlahandarijumlahmasing-masingrantainya, sebagaiberikut :

$$\sum_{L\epsilon C}(-1)^{P(L)}=(-1)^{m-c}\sum(-1)^{P(C_1)}\sum\dots\sum(-1)^{P(C_i)}$$

Berdasarkan Lemma 3.7 setiappiaspadaruaskanandaripersamaandiatassamadengannol, sehinggahasilpenjumlahannyajugasamadengan nol. Olehkarenaelemen-elemendari$\mathcal{L}_{2m}$hanyadibangunolehsikeldenganpanjangdua yang tidakberhubunganlangsung.

Misal$\mathcal{R}\subseteq\mathcal{L}_{2m}$ adalah himpunan semua sikel dengan panjang dua yang tidak berhubungan langsung, $l_{2m}=\sum_{L\epsilon\mathcal{R}_{2m}}(-1)^{P(L)}$, $P(L)=m$ sehingga $l_{2m}=(-1)^m|\mathcal{R}_{2m}|$.

Lemma 3.8

Misaldiberikangraftanggadengan$2n$ titik, dengan polinomial karakteristik , $X(R_{2n})=x^{2n}+l_1x^{2n-1}+l_2x^{2n-2}+\cdots+l_{2n-1}x+l_{2n}$ maka koefisien $l_{2m}=(-1)^m\binom{n+1-m}{m}$utuk$1\leq m\leq n$.

Bukti :

Untukmembuktikan Lemma diatas, langkah yang harusdilakukanadalahmencarikardinalitasdari$\mathcal{R}_{2m}$. Setiap sikel dengan panjang dua pada $\mathcal{R}_{2m}$ dapat dilabel dengan indek titik terendahnya misal sebuah sikel $(v_i,(v_i,v_{n+i}),v_{n+i})$ atau dapat ditulis $(v_i\leftrightarrow v_{n+i})$ dilabel dengan i. $|\mathcal{R}_{2m}|$merupakanbanyaknyacaramenempatkan$m$ sikel berbeda dengan panjang dua yang tidak berhubungan langsung hal ini ekivalen dengan banyaknyacaramemilih$m$ bilangan dari $\{1,2,\dots,n\}$ sedemikian hingga tidak ada dua bilangan yang berurutan. Analog dengan langkah pembuktian pada Lemma 3.2 didapat$|\mathcal{R}_{2m}|=\binom{n+1-m}{m}$.

Setiap$L\epsilon\mathcal{R}_{2m}$ terdiri dari m sikel berbeda dengan panjang dua sehingga $P(L)=m$, berdasarkan Teorema 3.2 diperoleh :

$$l_{2m}=\sum_{L\epsilon\mathcal{R}_{2m}}(-1)^{P(L)}=(-1)^m$$

$$|\mathcal{R}_{2m}|=(-1)^m\binom{n+1-m}{m}$$

utuk$1\leq m\leq n$.■

Berdasarkan Lemma 3.7 dan Lemma 3.8 diperoleh teorema berikut,

Teorema 3.3

Misal diberikan graf tangga dengan $2n$ titik, jika polinomial karakteristik graf R_{2n} adalah $X(R_{2n}) = x^{2n} + l_1 x^{2n-1} + l_2 x^{2n-2} + \cdots + l_{2n-1}x + l_{2n}$ maka koefisien l_i adalah sebagai berikut:

$l_i = 0$ untuk i ganjil dan $i \leq n$

$l_i = (-1)^{\frac{i}{2}} \binom{n+1-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}}$untuk i ganjil dan $i \leq n$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada BAB III dan sejalan dengan rumusan masalah pada BAB I dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

- Dengan menggunakan persamaan figuratif, setiap koefisien dari graf linier adalah :

  $t_i = 0$ untuk i ganjil dan $i \leq n$

  $t_i = (-1)^{\frac{i}{2}} \binom{n-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}}$ untuk i ganjil dan $i \leq n$

- Dengan menggunakan persamaan figuratif, setiap koefisien dari graf siklik adalah :

  $t_i = 0$untuk i ganjil dan $i < n$
  $t_i = -2$untuk i ganjil dan $i = n$

  $t_i = (-1)^{\frac{i}{2}} \frac{n}{n-\frac{i}{2}} \binom{n-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}}$untuk i genap dan $i < n$
  $t_i = -2 + 2(-1)^{\frac{n}{2}}$untuk $i$genap dan $i = n$

- Dengan menggunakan persamaan figuratif, setiap koefisien dari graf tangga adalah :

  $l_i = 0$ untuk i ganjil dan $i \leq n$
  $l_i = (-1)^{\frac{i}{2}} \binom{n+1-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}}$ untuk i genap dan $i \leq n$

f

DAFTAR PUSTAKA

[1] Budayasa, I Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya:University Press UNESA.

[2] Chartrand, G dan Lesniak, L. 1996. *Graphs and Digraphs* [third editions]. USA: Chapman & Hall/CRC.

[3] Cvetkovic, M Dragos, Doob Michael dan Sachs,Horst. 1979. Spectra of graphs. New York : Academic Press,Inc.

[4] Diestel,Reinhard. 2000. *Graph Teory Electronic Edition 2000.* New York : Springer-Verlag,inc.

[5] Godsil,Chris dan Royle,Gordon.2001.*Algebraic Graph Theory*. New York : Springer-Verlag,inc.

[6] Gross, L. Jonathan dan Tucker, W. Thomas.1987. *Topological Graph Theory*. United States of America.

[7] Gallian, A, Joseph. 2010. *Contemporary Abstact Algebra Seventh Edition*. United States of America : Brooks/Cole, Cengage Learning.

[8] Coon, E. Taylor.2006.*Combinatoric of The Figure Equation on Directed Graph*.