GRUP AUTOMORFISME GRAF HELM, GRAF HELM TERTUTUP, DAN GRAF BUKU

Antoni Nurhidayat[1], Dr. Agung Lukito, M. S.[2]

[1] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya, 60231

[2] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,

Universitas Negeri Surabaya, 60231

Email: michael_antoni@rocketmail.com[1], gung_lukito@yahoo.co.id[2]

ABSTRAK

Automorfisme graf G adalah isomorfisme dari graf G ke dirinya sendiri. Himpunan semua automorfisme graf G membentuk grup dibawah operasi komposisi fungsi yang disebut grup automorfisme graf G.

Permasalahan yang diangkat dalam skripsi ini adalah bagaimana grup automorfisme graf helm, graf helm tertutup, dan graf buku. Grup automorfisme graf helm dengan 7 titik adalah grup yang isomorfik dengan grup simetri berorder-3, grup automorfisme graf helm dengan 9 titik atau lebih adalah grup dihedral berorder-n. Grup automorfisme graf helm tertutup dengan 7 titik adalah grup yang isomorfik dengan grup simetri berorder-3, grup automorfisme graf helm tertutup dengan 9 titik atau lebih adalah grup dihedral berorder-$2n$. Grup automorfisme graf buku dengan 4 titik adalah grup dihedral berorder-8, grup automorfisme graf buku dengan 6 titik adalah grup abelian berorder-4, grup automorfisme graf buku dengan 8 titik atau lebih adalah grup yang isomorfik dengan subgrup simetri berderajat $2n + 2$.

Kata kunci: grup, automorfisme graf, graf helm, graf helm tertutup, graf buku, grup simetri, grup dihedral, grup abelian.

1. PENDAHULUAN

Teori graf diperkenalkan pertama kali tahun 1736 oleh seorang matematikawan asal Swiss yang bernama Leonard Euler melalui karya tulisnya "*Seven Bridges of Königsberg*

Pada umumnya, graf digunakan untuk memodelkan suatu masalah yang direpresentasikan oleh titik dan garis, sehingga lebih mudah dalam menganalisis dan pengambilan kesimpulan.

Salah satu topik yang menarik untuk dikaji pada teori graf adalah automorfisme graf. Dalam skripsi ini automorfisme graf akan dikembangkan ke dalam bentuk yang lebih khusus yaitu menyelidiki grup automorfisme graf helm, graf helm tertutup, dan graf buku.

2. LANDASAN TEORI

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari obyek-obyek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen-elemen dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik G dan himpunan $E(G)$ disebut sisi G. [1]

2.1.2 Terhubung langsung (*Adjacent*) dan Terkait (*Incident*)

Misalkan u dan v adalah dua titik di G dan $e = (u, v)$ (sering ditulis $e = uv$) adalah sebuah sisi di G. Maka titik u dan titik v disebut terhubung langsung (*adjacent*) di G, sisi e menghubungkan (*joining*) titik u dan titik v di G; u dan v titik-titik akhir sisi e; sisi e terkait (*incident*) dengan titik u dan juga titik v. [1]

2.1.3 Derajat Titik

Derajat titik v di graf G ditulis dengan $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait (*incident)* dengan v.Jika graf yang dibahas hanya satu misalnya graf G, maka $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$.[4]

2.1.4 Permutasi

Diberikan n objek berbeda. Sebuah permutasi-k dari n obyek, $k \leq n$ dan $k, n \in N$ adalah sebuah jajaran dari k obyek yang urutannya diperhatikan.[2] Misalnya diberikan tiga obyek berbeda, misal a, b, dan *c*. Jajaran seperti *ab* adalah permutasi-2 dari tiga obyek tersebut.

2.1.5 Isomorfisme Graf

Dua graf *G* dan *H* dikatakan isomorfik, ditulis $G \cong H$, jika:

1) Terdapat korespondensi satu-satu antara $V(G)$ dan $V(H)$
2) Banyak sisi yang menghubungkan dua titik *u* dan *v* di *G* sama dengan banyak sisi yang menghubungkan dua titik di *H* yang berkorespondensi satu-satu dengan titik *u* dan titik *v*. [1]

2.1.6 Automorfisme Graf

Automorfisme graf G adalah isomorfisme dari graf G ke G sendiri. Dengan kata lain, automorfisme dari G merupakan permutasi himpunan titik-titik $V(G)$, atau sisi graf $G, E(G)$. Jika φ adalah automorfisme graf G dan $v \in V(G)$ maka $deg\ \varphi(v) = deg\ v$.[4]

2.1.7 Operasi Penjumlahan Graf

Jumlah dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1)$ dan $v \in V(G_2)$.[4]

2.1.8 Hasil Kali Kartesius Graf

Hasil kali kartesius graf G dan G' dinotasikan dengan $G \times G'$ dan didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titik $V_G \times V_{G'}$ dan himpunan sisi $(E_G \times E_{G'}) \cup (V_G \times V_{G'})$. Jika sisi $(e, v') \in E_G \times V_{G'}$ dan jika titik akhir sisi e adalah v_1 dan v_2 maka titik akhir (e, v') adalah titik-titik (v_1, v') dan (v_2, v'). Jika $(e, v') \in V_G \times E_{G'}$, dan jika titik akhir sisi e' adalah v_1' dan v_2' maka titik akhir dari sisi (v, e') adalah (v, v_1') dan $(v,\ v_2')$. [9]. Dengan kata lain untuk $u_i,\ u_j \in G$ dan $v_m,\ v_n \in G'$, (u_i, v_m) dan $(u_j,\ v_n)$ terhubung langsung di $G \times G$ jika:

- $v_m = v_n$ dan terdapat sisi yang terkait u_i dan u_j di G. Atau
- $u_i = u_j$ dan terdapat sisi yang terkait v_m dan v_n di G'

2.1.9 Graf Bintang (S_n)

Graf $K_{1,n}$ disebut graf bintang.[4]

2.1.10 Graf Roda (Wheel Graph)

Graf roda W_n adalah graf yang memuat satu sikel yang setiap titik pada sikel terhubung langsung dengan titik pusat.[7]. Graf roda W_n diperoleh dengan operasi penjumlahan graf sikel C_n dengan graf komplit K_1

2.1.11 Graf Helm

Graf helm H_n adalah graf yang didapatkan dari sebuah graf roda W_n dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik pada sikel.[8]

2.1.12 Graf Helm Tertutup

Graf helm tertutup (cH_n) adalah graf yang diperoleh dari sebuah graf helm dengan menghubungkan tiap-tiap titik anting-anting untuk membentuk sikel yang baru.[8]

2.1.13 Graf Lintasan

Graf yang berupa lintasan dengan n titik disebut dengan graf lintasan dan dilambangkan dengan P_n.[5]

2.1.14 Graf Buku

Graf buku yang dinotasikan sebagai *B* adalah suatu graf yang dibentuk dari operasi hasil kali kartesius antara graf lintasan dengan dua titik dan graf bintang dengan $n + 1$ titik yaitu $B_n = P_2 \times S_n$.[8]

2.1.15 Operasi Biner

Operasi biner * pada himpunan S adalah aturan mengawankan setiap pasangan terurut $a, b \in S \times S$ dengan tepat satu elemen di *S*.[8]

2.2 Grup

2.2.1 Definisi Grup

Suatu himpunan tak kosong G dikatakan membentuk *grup* jika di dalam G didefinisikan suatu operasi *biner*, yang disebut produk dengan notasi ∘, sedemikian sehingga:

1. Untuk setiap elemen $a, b \in G$ berlaku $a \circ b \in G$
2. Untuk setiap elemen $a, b, c \in G$ berlaku $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
3. Terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga $a \circ e = e \circ a = a$ untuk setiap $a \in G$
4. Untuk setiap $a \in G$ terdapat elemen $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a \circ a^{-1} = e$.[10]

2.2.2 Order Grup

Diketahui (G, *) grup. Order dari grup (G, *) adalah banyaknya elemen grup (G, *) dinyatakan dengan |G|.[8]

2.2.3 Grup Abelian

Diketahui (G, *) grup. Order dari grup (G, *) adalah banyaknya elemen grup (G, *) dinyatakan dengan |G|.[8]

2.2.4 Grup Simetri

Misalkan Ω adalah sebarang himpunan tak kosong dan S_Ω adalah himpunan semua fungsi bijektif dari Ω ke Ω (memuat permutasi Ω). S_Ω dengan operasi komposisi "∘" atau (S_Ω, ∘) adalah grup. Grup (S_Ω, ∘) disebut sebagai grup simetri pada himpunan Ω.[6]

2.2.5 Grup Dihedral

Diketahui G himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, untuk setiap n adalah bilangan bulat positif $n \geq 3$, dan ∘ operasi komposisi pada G. (G,∘) membentuk grup yang disebut grup dihedral berorder-2n, dinotasikan D_n.[8]

2.2.6 Grup Automorfisme Graf Sederhana

Himpunan semua automorfisme graf G, dinotasikan dengan (G) membentuk grup di bawah operasi komposisi fungsi yang dinotasikan dengan Aut(G).[3]

3. PEMBAHASAN

3.1 Automorfisme Graf Helm

Teorema 3.1.1

Terdapat 6 automorfisme graf helm H_3 dan membentuk grup yang isomorfik dengan grup simetri berorder-6 (S_3).

Bukti:

Graf helm H_3 terdiri dari 7 titik misalnya $V(H_3) = \{u_1, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Banyak permutasi yang mungkin adalah 5040. Tetapi yang merupakan automorfisme adalah 6 fungsi, yaitu:

1. $\varphi_1 = (u_1)(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)(v_5)(v_6)$

Fungsi φ_1 merupakan automorfisme, karena dapat ditunjukkan bahwa *deg* (u_1) = *deg* (u_1), begitu pula untuk pemetaan sisi yang lain. Selain itu dapat ditunjukkan bahwa
$(u_1, v_1) \in E(H_3) \rightarrow (\varphi(u_1), \varphi(v_1)) \in E(H_3)$. Begitu juga untuk sisi yang lain pada H_3.
Hal yang sama juga berlaku untuk fungsi-fungsi dibawah ini:
$\varphi_2 = (u_1)(v_1v_2)(v_3)(v_4v_5)(v_6)$.
$\varphi_3 = (u_1)(v_1v_3)(v_2)(v_4v_6)(v_5)$
$\varphi_4 = (u_1)(v_1)(v_2v_3)(v_4)(v_5v_6)$
$\varphi_5 = (u_1)(v_1v_3v_2)(v_4v_6v_5)$
$\varphi_6 = (u_1)(v_1v_2v_3)(v_4v_5v_6)$

Tabel 3.1.1 : Tabel Cayley (H_3) *dengan operasi* ∘

∘	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
φ_2	φ_2	φ_1	φ_6	φ_5	φ_4	φ_3
φ_3	φ_3	φ_5	φ_1	φ_6	φ_2	φ_4
φ_4	φ_4	φ_6	φ_5	φ_1	φ_2	φ_3
φ_5	φ_5	φ_3	φ_4	φ_2	φ_6	φ_1
φ_6	φ_6	φ_4	φ_2	φ_3	φ_1	φ_5

Berdasarkan tabel 3.1.1 diperoleh (H_3) dengan operasi komposisi fungsi merupakan grup. ((H_3),∘) merupakan grup berorder-6 yang anggotanya merupakan permutasi dari titik-titik $\{v_1, v_2, v_3\}$. S_3 adalah grup berorder-6 dan anggotanya diperoleh dari permutasi $\{1, 2, 3\}$. Sehingga terbukti bahwa terdapat 6 automorfisme graf helm H_3 dan membentuk grup yang isomorfik dengan grup simetri berorder-6 (S_3).

Teorema 3.1.2

Terdapat 2n automorfisme graf helm H_n untuk $n \geq 4$ dan membentuk grup dihedral berorder-2n (D_n).

Bukti:

Misalkan H_n graf helm dengan
$V(H_n) = \{u_1, v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3}, \dots, v_{2n}\}$.
Berdasarkan definisi, graf helm H_n merupakan graf yang diperoleh dari graf roda W_n dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik pada sikelnya. Ini berarti graf helm H_n memuat sikel yang terdiri dari titik-titik $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ dengan setiap dua titik yang berurutan (siklis) saling terhubung langsung. maka automorfisme dari graf helm hanya dapat diperoleh melalui rotasi dan refleksi. Terdapat n automorfisme graf helm melalui proses rotasi dan terdapat juga n automorfisme graf helm melalui proses refleksi. Dengan demikian terdapat $2n$ automorfisme graf helm H_n yang diperoleh dari operasi refleksi dan rotasi yang merupakan anggota grup dihedral karena grup dihedral merupakan grup yang dibangun dari operasi refleksi dan rotasi. Sehingga terbukti bahwa himpunan semua automorfisme graf helm H_n untuk $n \geq 4$ merupakan grup dihedral dengan order- $2n$ (D_{2n}).

3.2 Automorfisme Graf Helm Tertutup

Teorema 3.2.1

Terdapat 6 automorfisme graf helm tertutup cH_3 *dan membentuk grup yang isomorfik dengan grup simetri berorder-6* (S_3) .

Bukti:

Graf helm tertutup cH_3 diperoleh dengan menghubungkan setiap anting-anting pada graf helm H_3 sehingga membentuk sikel baru , maka $V(cH_3) = V(H_3)$. Automorfisme graf helm tertutup cH_3 hampir sama dengan automorfisme graf helm H_3, yang membedakan hanya pemetaan sisi pada sikel baru yang terbentuk dari anting-anting graf helm cH_3

$(v_4, v_5) \in E(H_3) \rightarrow (\varphi(v_4), \varphi(v_5)) \in E(H_3)$
$(v_5, v_6) \in E(H_3) \rightarrow (\varphi(v_5), \varphi(v_6)) \in E(H_3)$
$(v_4, v_6) \in E(H_3) \rightarrow (\varphi(v_4), \varphi(v_6)) \in E(H_3)$

Graf helm tertutup cH_3 memuat graf helm H_3. Pada graf helm H_3 dan graf helm tertutup tertutup cH_3 tidak memuat sikel dan sisi rangkap. Oleh karena itu, automorfismenya didasarkan pada pemetaan titik. Pembuktian teorema ini analog dengan teorema 3.1.1. Sehingga terbukti bahwa himpunan automorfisme graf helm tertutup cH_3 merupakan grup yang isomorfik dengan grup simetri berorder-3 (S_3).

Teorema 3.2.2

Terdapat 2n automorfisme graf helm tertutup cH_n *untuk* $n \geq 4$ *dan membentuk grup dihedral berorder-2n* (D_n).

Bukti:

Misal cH_n merupakan graf helm tertutup dengan $V(cH_n) = \{u_1, v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3}, \dots, v_{2n}\}$.

Berdasarkan definisi, graf helm tertutup cH_n merupakan graf yang diperoleh dari sebuah graf helm dengan menghubungkan tiap-tiap titik anting-anting untuk membentuk sikel yang baru. Ini berarti graf helm tertutup cH_n memuat graf helm H_n. Maka graf helm tertutup cH_n memuat 2 buah sikel yang terdiri dari titik-titik $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan $\{v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3}, \dots, v_{2n}\}$

v_1 terhubung langsung dengan v_{n+1}
v_2 terhubung langsung dengan v_{n+2}
v_3 terhubung langsung dengan v_{n+3}
$\vdots$
v_n terhubung langsung dengan v_{2n}

Graf helm tertutup cH_n memuat graf helm H_n. Pada graf helm H_n dan graf helm tertutup tertutup cH_n tidak memuat sikel dan sisi rangkap. Oleh karena itu, automorfismenya didasarkan pada pemetaan titik. Perbedaan automorfisme graf helm tertutup cH_n dan graf helm H_n hanya pada pemetaan sisi pada sikel yang terbentuk dari sisi anting-antingnya.

$(v_n, v_{n+1}) \in E(cH_3) \rightarrow (\varphi(v_n), \varphi(v_{n+1})) \in E(cH_n)$
$(v_{n+1}, v_{n+2}) \in E(cH_3) \rightarrow (\varphi(v_{n+1}), \varphi(v_{n+2})) \in E(cH_n)$
$(v_{n+2}, v_{n+3}) \in E(cH_3) \rightarrow (\varphi(v_{n+2}), \varphi(v_{n+3})) \in E(cH_n)$
$\vdots$
$(v_{2n-1}, v_{2n}) \in E(cH_3) \rightarrow (\varphi(v_{2n-1}), \varphi(v_{2n})) \in E(cH_n)$

Maka automorfisme dari graf helm tertutup hanya dapat diperoleh melalui operasi rotasi dan refleksi sama halnya dengan automorfisme graf helm tertutup. Maka pembuktian teorema ini analog dengan teorema 3.1.2. Sehingga terbukti bahwa himpunan automorfisme graf helm tertutup cH_n membentuk grup dihedral berorder-$2n$ (D_n).

3.3 Automorfisme Graf Buku

Teorema 3.3.1

Terdapat 8 automorfisme graf buku B_1 *dan membentuk grup dihedral berorder-8* (D_4).

Bukti:

Graf buku B_1 terdiri dari 4 titik misalnya $V(B_1) = \{v_0, w_0, v_1, w_1\}$. Banyak permutasi yang mungkin adalah 24. Tetapi yang merupakan fungsi automorfisme adalah 8 fungsi, yaitu

1. $\varphi_1 = (v_0)(w_0)(v_1)(w_1)$

Fungsi φ_1 merupakan automorfisme, karena dapat ditunjukkan bahwa *deg* (v_0) = *deg* (v_0), begitu pula untuk pemetaan sisi yang lain. Selain itu dapat ditunjukkan bahwa
$(v_1, w_1) \in E(B_1) \rightarrow (\varphi(v_1), \varphi(w_1)) \in E(B_1)$. Begitu juga untuk sisi yang lain pada H_3.
Hal yang sama juga berlaku untuk fungsi-fungsi dibawah ini:

$\varphi_2 = (v_0\ w_0\ w_1\ v_1)$

$\varphi_3 = (v_0\ w_1)(v_1\ w_0)$

$\varphi_4 = (v_0\ w_0\ w_1\ v_1)$

$\varphi_5 = (v_0\ v_1)(w_0\ w_1)$

$\varphi_6 = (v_0\ w_0)(v_1\ w_1)$

$\varphi_7 = (v_0)(w_0\ v_1)(w_1)$

$\varphi_8 = (v_0\ w_1)(w_0)(v_1)$

Tabel 3.3.1 : Tabel Cayley (B_1) dengan operasi ∘

∘	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8
φ_2	φ_2	φ_3	φ_4	φ_1	φ_7	φ_8	φ_6	φ_5
φ_3	φ_3	φ_4	φ_1	φ_2	φ_6	φ_5	φ_8	φ_7
φ_4	φ_4	φ_1	φ_2	φ_3	φ_8	φ_7	φ_5	φ_6
φ_5	φ_5	φ_8	φ_6	φ_7	φ_1	φ_3	φ_4	φ_2
φ_6	φ_6	φ_7	φ_5	φ_8	φ_3	φ_1	φ_2	φ_4
φ_7	φ_7	φ_5	φ_8	φ_6	φ_2	φ_4	φ_1	φ_3
φ_8	φ_8	φ_6	φ_7	φ_5	φ_4	φ_2	φ_3	φ_1

Berdasarkan table Cayley di atas, diperoleh: Berdasarkan tabel 3.1.1 diperoleh (B_1) dengan operasi komposisi fungsi merupakan grup. Karena $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ diproleh dari rotasi dan $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$ diperoleh dari refleksi, maka (B_1) dibawah operasi komposisi membentuk grup dihedral berorder-8 (D_4). Sehingga terbukti bahwa terdapat 8 automorfisme graf buku B_1 dan membentuk grup dihedral berorder-

Teorema 3.3.2

Terdapat 4 automorfisme graf buku B_2 dan membentuk grup abelian berorder-4.

Bukti:

Graf buku B_2 terdiri dari 6 titik misalnya $V(B_3) = \{v_0, w_0, v_1, w_1, v_2, w_2\}$. Banyak permutasi yang mungkin adalah 120. Tetapi yang merupakan fungsi automorfisme adalah 4 fungsi, yaitu :

1. $\varphi_1 = (v_0)(w_0)(v_1)(w_1)$

Fungsi φ_1 merupakan automorfisme, karena dapat ditunjukkan bahwa *deg* (v_0) = *deg* (v_0), begitu pula untuk pemetaan sisi yang lain. Selain itu dapat ditunjukkan bahwa
$(v_1, w_1) \in E(B_2) \to (\varphi(v_1), \varphi(w_1)) \in E(B_2)$. Begitu juga untuk sisi yang lain pada H_3.
Hal yang sama juga berlaku untuk fungsi-fungsi dibawah ini:
$\varphi_2 = (v_0)(w_0)(v_1 v_2)(w_1 w_2)$

$\varphi_3 = (v_0 w_0)(v_1 w_1)(v_2 w_2)$

$\varphi_4 = (v_0 w_0)(v_1 w_2)(v_2 w_1)$

Tabel 3.3.2 : Tabel Cayley (B_2) dengan operasi ∘

∘	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_2	φ_2	φ_1	φ_4	φ_3
φ_3	φ_3	φ_4	φ_1	φ_2
φ_4	φ_4	φ_3	φ_2	φ_1

Berdasarkan tabel 3.3.2 diperoleh

$\forall \varphi_m, \varphi_n \in (\mathrm{B}_2)$ berlaku $\varphi_m \circ \varphi_n = \varphi_n \circ \varphi_m$, atau dapat dilihat entri-entri pada tabel 3.3.2 simetris pada diagonal utama, maka $((B_2), \circ)$ merupakan grup abelian yang memuat 4 elemen..

Teorema 3.3.3

Terdapat 2n! automorfisme graf buku B_n untuk $n \geq 3$ dan membentuk grup yang isomorfik dengan subgrup simetri berderajat-2n+2.

Bukti:

Misal B_n adalah graf buku dengan

$$V(B_n) = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

Karena graf buku B_n tidak terdapat sisi rangkap, maka automorfismenya dapat didasarkan pada pemetaan titik-titiknya saja.

Titik v_0 berhubungan langsung dengan titik w_o, v_1, v_2, ..., dan v_n.

Titik w_0 berhubungan langsung dengan titik v_o, w_1, w_2, ..., dan w_n.

Titik v_1 berhubungan langsung dengan titik v_0 dan w_1

Titik v_1 berhubungan langsung dengan titik v_0 dan w_1

Titik v_2 berhubungan langsung dengan titik v_0 dan w_2

Titik v_3 berhubungan langsung dengan titik v_0 dan w_3

⋮

Titik v_n berhubungan langsung dengan titik v_0 dan w_n

dan

Titik w_1 berhubungan langsung dengan titik w_0 dan v_1

Titik w_2 berhubungan langsung dengan titik w_0 dan v_2

Titik w_3 berhubungan langsung dengan titik w_0 dan v_3

⋮

Titik w_n berhubungan langsung dengan titik w_0 dan v_n

$deg\ v_0 = deg\ w_0 = 2n + 1$
$deg\ v_i = deg\ w_i = 2, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$

Automorfisme graf buku B_n dapat diperoleh sebagai berikut:

1. Saat $(v_0)(w_0)$
   Automorfisme graf buku diperoleh dari permutasi $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ atau $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$. Sehingga terdapat $n!$ automorfisme graf buku B_n.
2. Saat $(v_0\ w_0)$
   Terdapat fungsi $\varphi : \{ v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \} \rightarrow \{ w_1, w_2, w_3, \dots, w_n \}$, dimana φ adalah automorfisme. Karena automorfisme merupakan pemetaan bijektif maka banyaknya automorfisme adalah $n!$.

Berdasarkan 1 dan 2 diperoleh banyaknya automorfisme graf buku B_n untuk $n \geq 3$ adalah $n! + n!$. Maka terdapat $2n!$ automorfisme graf buku B_n untuk $n \geq 3$.

Karena himpunan automorfisme suatu graf dengan operasi komposisi fungsi selalu membentuk grup, maka himpunan automorfisme graf buku B_n untuk $n \geq 3$ membentuk grup berorder-$2n!$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa grup automorfisme graf buku B_n untuk $n \geq 3$ isomorfik dengan subgrup simetri berderajat $2n + 2$.

(i) Misal : α merupakan permutasi dari $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$

$\beta = (v_0)(w_0)\alpha_1$
$\varphi(\beta) = (v_0)(w_0)\alpha_1$
$\gamma = (v_0\ w_0)\alpha_2$
$\varphi(\gamma) = (v_0\ w_0)\alpha_2$

Maka : (1) $\beta \circ \alpha = (v_0)(w_0)\alpha_1 \circ (v_0\ w_0)\alpha_2$
$= (v_0\ w_0)\alpha_1 \circ \alpha_2$
$\varphi(\alpha \circ \beta) = (v_0\ w_0)\ \alpha_1 \circ \alpha_2$
(2) $\varphi(\alpha) \circ \varphi(\beta)$
$= (v_0)(w_0)\alpha_1$
$\circ (v_0\ w_0)\alpha_2$
$= (v_0\ w_0)\alpha_1 \circ \alpha_2$

Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh
$\varphi(\alpha \circ \beta) = \varphi(\alpha) \circ \varphi(\beta)$
Maka φ merupakan homomorfisme.

(ii) akan ditujukkan bahwa ada korespondensi satu-satu dari anggota simetri S_{2n} dengan automorfisme graf buku B_n untuk $n \geq 3$.

Misal: $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}\} \in S_{2n}$
$\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{2n}\} \in B_n$

Dapat ditunjukkan bahwa f bersifat bijektif.
Jika $x, y \in S_n$ dan $f(x), f(y) \in \mathcal{A}(B_n)$
Maka $x \rightarrow f(x)$
$y \rightarrow f(y)$

Jika $x \neq y$ maka $(x) \neq f(y)$, $\forall\, x, y \in Sn$

$\forall\, a \in E(B_n)$ ada $b \in S_n \ni \varphi(a) = b$

Jadi terbukti bahwa terdapat 2n! automorfisme graf buku B_n untuk $n \geq 3$ dan membentuk grup yang isomorfik dengan subset grup simetri berderajat-$2n + 2$ (S_{2n+2}).

4. PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan, diperoleh kesimpuan sebagai berikut:

- Grup automorfisme graf helm dengan 7 titik sama dengan grup automorfisme graf helm tertutup dengan 7 titik yaitu grup yang isomorfik dengan grup simetri berorder-6 (S_3).
- Grup automorfisme graf helm dengan 8 titik atau lebih sama dengan grup automorfisme graf helm tertutup dengan 8 titik atau lebih yaitu grup dihedral berorder-$2n$ (D_n).
- Grup automorfisme graf buku dengan 4 titik adalah grup dihedral berorder-8 (D_4).
- Grup automorfisme graf buku dengan 6 titik adalah grup abelian berorder-4.
- Grup automorfisme graf buku dengan 8 titik atau lebih adalah grup abelian yang isomorfik dengan subgrup simetri berorder-$2n + 2$.

4.2 Saran

Dalam skripsi ini hanya dicari grup automorfisme graf helm, graf helm tertutup, dan graf buku. Penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini untuk mengembangkan dengan mencari grup automorfisme graf-graf yang lain.

5. DAFTAR PUSTAKA

1. Budayasa, Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press Surabaya.
2. Budayasa, Ketut. 2008. *Matematika Diskrit.* Surabaya : Unesa University Press Surabaya.
3. Cameron, Peter J. 2001. *Automorphisms of Graphs.* Draft. Queen Mary : University of London. (Online) : (http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.109.1920&rep=rep1&type=pdf. Diakses tanggal 3 Maret 2013).
4. Chartrand, G. Dan Lesniak, L. 1996. *Graph and Digraph Third Edition.* California : Wadsworth,Inc.

5. Damayanti, Reni Tri. 2011. *Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan.* Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) maulana Malik Ibrahim Malang. (Online) : (*http://lib.uin-malang.ac.id/theses/chapter_iii/07610029-reni-tri-damayanti.ps*. Diakses tanggal 1 Maret 2013.
6. Dummit, David Steven and Foote, Richard M. 1999. *Abstract Algebra Second Edition.* India: Replika Press.
7. Fajariyah,Susantin. 2009. *Graf Dual (Dual Graph) dari Graf Roda (Wn) dan Graf Helm Tertutup (cHn).* Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) maulana Malik Ibrahim Malang. (Online) http://lib.uin-malang.ac.id/thesis/fullchapter/03510044-susantin-fajariyah.pdf. Diakses tanggal 1 Maret 2013.
8. Gallian, J. A. 2007.”*dynamic Survey DS6: Graph Labeling” Electronic J. Combinatorics.* DS6. (Online) : *http://mathword.wolfram.com/www.combinatorics.org/Surveys/ds6.pdf*. Diakses tanggal 4 Maret 2013.
9. Gross, J. L and T. W. Tucker.1987. “*Topological Graph Theory”.* New York: John Wiley & Sons. Inc.
10. Kusrini dan Sukahar, 2001.*Struktur Abstrak 1*. Surabaya: Usaha Jurusan Matematika Unesa Surabaya.