OPERASI PADA GRAF FUZZY

Budi Setiawan, Prof. Dr. Dwi Juniati, M.Si.
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Surabaya
Jalan Ketintang Surabaya 60231
Email: b_diset@yahoo.com, dwi_juniati@yahoo.com.

ABSTRAK

Pada operasi graf fuzzy, dipelajari empat operasi pada graf fuzzy diantaranya operasi gabungan, join, hasil kali silang dan komposisi. Pada tulisan ini, dibahas mengenai subgraf fuzzy parsial. Misal $G_1 = (V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1})$ dan $G_2 = (V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2})$ adalah graf fuzzy, dengan σ_i adalah fungsi keanggotaan dari V_i, dan μ_i adalah fungsi keanggotaan dari $V_i \times V_i, \forall i = 1,2$. Maka $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, \sigma_{G_1 \cup G_2}, \mu_{G_1 \cup G_2})$ dengan $\sigma_{G_1 \cup G_2} = \sigma_{G_1} \cup \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G_1 \cup G_2} = \mu_{G_1} \cup \mu_{G_2}$ merupakan graf fuzzygabungan,$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, \sigma_{G_1+G_2}, \mu_{G_1+G_2})$ dengan $\sigma_{G_1+G_2} = \sigma_{G_1} + \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G_1+G_2} = \mu_{G_1} + \mu_{G_2}$ merupakan graf fuzzy join, $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, \sigma_{G_1 \times G_2}, \mu_{G_1 \times G_2})$ dengan $\sigma_{G_1 \times G_2} = \sigma_{G_1} \times \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G_1 \times G_2} = \mu_{G_1} \times \mu_{G_2}$ merupakan graf fuzzy hasil kali silang dan $G_1 \circ G_2 = (V_1 \times V_2, \sigma_{G_1 \circ G_2}, \mu_{G_1 \circ G_2})$dengan $\sigma_{G_1 \circ G_2} = \sigma_{G_1} \circ \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G_1 \circ G_2} = \mu_{G_1} \circ \mu_{G_2}$ merupakan graf fuzzy komposisi.

Kata kunci : graf fuzzy, operasi graf fuzzy, subgraf fuzzy parsial.

PENDAHULUAN

Teori graf fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Azriel Rosenfeld pada tahun 1975 yang merupakan suatu perluasan dari teori graf dan himpunan fuzzy. Telah dipelajari sebelumnya pada skripsi Rika Juwita Sari mengenai graf fuzzy M-strong dan membahas tentang bagaimana sifat graf fuzzy M-strong ketika dioperasikan. Pada tulisan ini akan membahas mengenai pengertian graf fuzzy secara umum, dilanjutkan dengan operasi gabungan, join, hasil kali silang dan komposisi pada graf fuzzy.

KAJIAN TEORI

2.1 Himpunan

2.1.1 Himpunan Tegas

Definisi 2.1.1.1 [3]

Himpunan tegas adalah himpunan yang terdefinisi secara tegas, artinya bahwa untuk setiap elemen dalam semestanya selalu dapat ditentukan secara tegas apakah elemen tersebut merupakan anggota dari himpunan tersebut atau tidak.

Definisi 2.1.1.2 [3]

Jika setiap anggota himpunan A merupakan anggota himpunan B maka A dikatakan sebagai himpunan bagian (*subset*) dari B dan dinotasikan $A \subseteq B$.

Definisi 2.1.1.3

Gabungan dua himpunan A dan B (ditulis $A \cup B$) adalah himpunan semua anggota A atau B, yaitu $A \cup B = \{x | x \in A \; atau \; x \in B\}$ atau $A \cup B = \{x | x \in A \;\vee\; x \in B\}$.

Definisi 2.1.1.4

Irisan dua himpunan A dan B (ditulis $A \cap B$) adalah himpunan semua anggota A yang juga menjadi anggota B, yaitu $A \cap B = \{x | x \in A \; dan \; x \in B\}$ atau $A \cap B = \{x | x \in A \;\wedge\; x \in B\}$.

Definisi 2.1.1.5

Selisih himpunan A dari himpunan B (ditulis $A - B$) adalah himpunan yang anggota-anggotanya adalah semua anggota A yang bukan anggota B, yaitu $A - B = \{x | x \in A \; dan \; x \notin B\}$ atau $A - B = \{x | x \in A \;\wedge\; x \notin B\}$.

Definisi 2.1.1.6

Jumlah dua himpunan A dan B (ditulis $A + B$) adalah himpunan semua anggota $(A \cup B)$ tetapi bukan anggota $(A \cap B)$, yaitu $A + B = \{x | x \in (A \cup B) \; dan \; x \notin (A \cap B)\}$.

Definisi 2.1.1.7

Misalkan A dan B merupakan himpunan tidak kosong, maka hasil kali silang dari A dan B yang dinotasikan dengan $A \, x \, B$, didefinisikan oleh:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

2.1.2 Himpunan Fuzzy (*Fuzzy Set*)

Definisi 2.1.2.1

Himpunan fuzzy A pada X dikatakan subset dari himpunan fuzzy B pada X, jika dan hanya jika μ_A(x) $\leq \mu_B$(x), ∀x ∈ X.

Catatan : Bisa juga $\mu_A(x)$ ditulis $A(x)$ dan $\mu_B(x)$ ditulis $B(x)$.

Definisi 2.1.2.2

Diberikan dua himpunan fuzzy A dan B pada semesta X, $A \cup B$ dan $A \cap B$ adalah himpunan-himpunan fuzzy pada X yang derajat keanggotaannya didefinisikan untuk semua x ∈ X oleh persamaan :

$\mu_{(A\cup B)}(\mathrm{x}) = \mu_A(\mathrm{x}) \vee \mu_B(\mathrm{x})$

$= \max[\mu_A(\mathrm{x}), \mu_B(\mathrm{x})]$, ∀x ∈ X dan

$\mu_{(A\cap B)}(\mathrm{x}) = \mu_A(\mathrm{x}) \wedge \mu_B(\mathrm{x})$

$= \min[\mu_A(\mathrm{x}), \mu_B(\mathrm{x})]$, ∀x ∈ X.

2.2 Graf

Definisi 2.2.1 [4]

Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tidak kosong $V(G)$ dari obyek-obyek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tidak terurut dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan titik dari graf G dinotasikan dengan $V(G)$, dan himpunan sisi dari graf G dinotasikan $E(G)$.

Definisi 2.2.2 [4]

Dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama disebut sisi rangkap (*multiple edges*) dan sebuah sisi yang menghubungkan sebuah titik ke dirinya sendiri disebut gelung (loop). Graf tanpa loop dan tanpa sisi rangkap disebut graf sederhana *(simple graphs).*

Definisi 2.2.3 [4]

Misalkan *u* dan *v* adalah dua titik di G dan e $= (u, v)$ adalah sebuah sisi di G, bisa ditulis e $= (uv)$. Kita katakan : titik *u* dan *v* berhubungan langsung (adjacent) di G ; sisi e menghubungkan (joining) titik *u* dan *v* di G ; *u* dan *v* titik-titik akhir sisi e ; sisi e terkait (incident) dengan titik v dan juga titik u.

Definisi 2.2.4 [4]

Sebuah graf H disebut graf bagian dari graf G, ditulis $H \subset G$, jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$.

Definisi 2.2.5 [4]

Misalkan G adalah graf, dan misalkan *v* adalah suatu titik dari G. Derajat titik *v* adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik *v* (dengan catatan setiap loop dihitung dua kali), dan dinotasikan oleh $d(v)$.

Definisi 2.2.6 [2]

Diberikan graf G dan graf H, dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan titik $V(H)$ saling asing. Gabungan graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \cup H$ dan didefinisikan oleh :

i. $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$.
ii. $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.

Definisi 2.2.7 [2]

Misalkan diberikan graf G dan graf H, dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan titik $V(H)$ saling asing. Join graf G dan graf H yang dinotasikan dengan $G + H$ didefinisikan oleh :

i. $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$.
ii. $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{(g, h) | g \in G, h \in H\}$.

Definisi 2.2.8 [2]

Hasil kali silang graf G_1 dan graf G_2 adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$ dan mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2)dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika

$u_1 = v_1$ dan $u_2v_2 \in E(G_2)$ atau

$u_2 = v_2$ dan $u_1v_1 \in E(G_1)$.

Definisi 2.2.9 [2]

Komposisi graf G_1 dan graf G_2 adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \circ G_2$ dan mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung apabila :

u_1 dan v_1 terhubung langsung atau

$u_1 = v_1$ dan u_2 terhubung langsung dengan v_2.

PEMBAHASAN

3.1 Pengertian Graf Fuzzy

Graf fuzzy diperoleh dengan memberi bobot atau derajat keanggotaan pada titik-titik *(vertex)* dan pada sisi-sisi *(edge)* dari suatu graf.

Definisi 3.1.1

Graf fuzzy $G = (V, \sigma_G, \mu_G)$ adalah himpunan berhingga titik tak kosong V dengan σ_G adalah himpunan fuzzy pada V dengan fungsi keanggotaan σ dan μ_G adalah himpunan fuzzy pada $V \times V$ dengan fungsi keanggotaan μ, sedemikian sehingga :

$\mu(x, y) = \mu(xy) \leq \sigma(x) \wedge \sigma(y)$,∀ $x, y \in V$,

dengan ∧ menyatakan minimum dari $\sigma(x)$ dan $\sigma(y)$.

σ_G disebut himpunan titik fuzzy graf G, dan

μ_G disebut himpunan sisi fuzzy graf G.

Definisi 3.1.2

Graf fuzzy $H = (V, v_H, t_H)$ disebut subgraf fuzzy parsial dari graf fuzzy $G = (V, \sigma_G, \mu_G)$ jika :

i. $v(\mathrm{x}) \leq \sigma(\mathrm{x}), \forall \mathrm{x} \in V(G)$.
ii. $t(\mathrm{xy}) \leq \mu(\mathrm{xy}), \forall \mathrm{xy} \in V \times V$.

3.2 Operasi Pada Graf Fuzzy

3.2.1 Gabungan dan Join Pada Graf Fuzzy

Definisi 3.2.1.1

Misalkan $G_1 = (V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1})$ dan $G_2 = (V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2})$ adalah graf fuzzy,
dengan σ_i adalah fungsi keanggotaan V_i, dan
μ_i adalah fungsi keanggotaan $V_i \times V_i, \forall i = 1,2$.
Didefinisikan gabungan fungsi keanggotaan G_1 dan G_2 sebagai berikut :

i. $(\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) = \sigma_1(u)$ jika $u \in V_1 \backslash V_2$,
$(\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) = \sigma_2(u)$ jika $u \in V_2 \backslash V_1$, dan
$(\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) = \sigma_1(u) \vee \sigma_2(u) = \max(\sigma_1(u), \sigma_2(u))$ jika $u \in V_1 \cap V_2$,
ii. $(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) = \mu_1(uv)$ jika $uv \in E_1 \backslash E_2$,
$(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) = \mu_2(uv)$ jika $uv \in E_2 \backslash E_1$, dan
$(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) = \mu_1(uv) \vee \mu_2(uv) = \max(\mu_1(uv), \mu_2(uv))$ jika $uv \in E_1 \cap E_2$,

dengan E_i adalah himpunan sisi graf $G_i, i = 1,2$.

Proposisi 3.2.1.2

Misalkan $G_1 = (V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1})$ dan $G_2 = (V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2})$ adalah graf fuzzy,
dengan σ_i adalah fungsi keanggotaan V_i, dan
μ_i adalah fungsi keanggotaan $V_i \times V_i, \forall i = 1,2$.
Maka $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, \sigma_{G_1 \cup G_2}, \mu_{G_1 \cup G_2})$ dengan $\sigma_{G_1 \cup G_2} = \sigma_{G_1} \cup \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G_1 \cup G_2} = \mu_{G_1} \cup \mu_{G_2}$ merupakan graf fuzzy dan disebut graf fuzzy gabungan.
Bukti :

Misalkan $uv \in E_1 \backslash E_2$,

i. Jika $u, v \in V_1 \backslash V_2$; maka
$$\begin{aligned}(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) &= \mu_1(uv).\\ &\leq \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v).\\ &\leq (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v).\end{aligned}$$
ii. Jika $u \in V_1 \backslash V_2$ dan $v \in V_1 \cap V_2$; maka
$$\begin{aligned}(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) &= \mu_1(uv)\\ &\leq \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v)\\ &\leq \sigma_1(u) \wedge (\sigma_1(v) \vee \sigma_2(v)).\\ &\leq (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v).\end{aligned}$$
iii. Jika $u, v \in V_1 \cap V_2$; maka
$$\begin{aligned}(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) &= \mu_1(uv)\\ &\leq \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v)\\ &\leq (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v).\end{aligned}$$

Misalkan $uv \in E_2 \backslash E_1$,

i. Jika $u, v \in V_2 \backslash V_1$; maka
$$\begin{aligned}(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) &= \mu_2(uv)\\ &\leq \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v).\\ &\leq (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v).\end{aligned}$$
ii. Jika $u \in V_2 \backslash V_1$ dan $v \in V_1 \cap V_2$; maka
$$\begin{aligned}(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) &= \mu_2(uv)\\ &\leq \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v)\\ &\leq \sigma_2(u) \wedge (\sigma_1(v) \vee \sigma_2(v)).\\ &\leq (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v).\end{aligned}$$
iii. Jika $u, v \in V_1 \cap V_2$; maka
$$\begin{aligned}(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) &= \mu_2(uv)\\ &\leq \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v)\\ &\leq (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v).\end{aligned}$$

Misalkan $uv \in E_1 \cap E_2$; maka

$$\begin{aligned}(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) &= \mu_1(uv) \vee \mu_2(uv)\\ &\leq (\sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v)) \vee (\sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v))\\ &\leq (\sigma_1(u) \vee \sigma_2(u)) \wedge (\sigma_1(v) \vee \sigma_2(v))\\ &\leq (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v).\end{aligned}$$

Maka $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, \sigma_{G_1 \cup G_2}, \mu_{G_1 \cup G_2})$ dengan $\sigma_{G_1 \cup G_2} = \sigma_{G_1} \cup \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G_1 \cup G_2} = \mu_{G_1} \cup \mu_{G_2}$ merupakan graf fuzzy dan disebut graf fuzzy gabungan. ■

Teorema 3.2.1.3

Jika G merupakan graf gabungan dari dua graf G_1 dan graf G_2, maka setiap subgraf fuzzy parsial dari G adalah gabungan dari subgraf fuzzy parsial dari G_1 dan subgraf fuzzy parsial dari G_2.

Definisi 3.2.1.4

Misalkan $G_1 = (V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1})$ dan $G_2 = (V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2})$ adalah graf fuzzy, diasumsikan $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, dengan

σ_i adalah fungsi keanggotaan dari V_i, dan

μ_i adalah fungsi keanggotaan dari $V_i \times V_i, \forall i = 1,2$.
Didefinisikan join fungsi keanggotaan G_1 dan G_2 sebagai berikut :
$(\sigma_1 + \sigma_2)(u) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \forall u \in V_1 \cup V_2$;
$(\mu_1 + \mu_2)(uv) = (\mu_1 \cup \mu_2)(uv)$ jika $uv \in E_1 \cup E_2$, dan
$(\mu_1 + \mu_2)(uv) \quad = \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v)$

$$= \min(\sigma_1(u), \sigma_2(v)) \text{jika} uv \in E'.$$

dengan E' adalah himpunan semua garis yang menggabungkan titik-titik dari V_1 dengan titik-titik dari V_2.

Proposisi 3.2.1.5

Misal $G_1 = (V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1})$ dan $G_2 = (V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2})$ adalah graf fuzzy, diasumsikan $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, dengan

σ_i adalah fungsi keanggotaan dari V_i, dan

μ_i adalah fungsi keanggotaan dari $V_i \times V_i, \forall i = 1{,}2$. Maka $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, \sigma_{G_1+G_2}, \mu_{G_1+G_2})$ dengan $\sigma_{G_1+G_2} = \sigma_{G_1} + \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G_1+G_2} = \mu_{G_1} + \mu_{G_2}$ merupakan graf fuzzy dan disebut graf fuzzy join.

Teorema 3.2.1.6

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah graf. Misal $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, dan $\sigma_{G_1}, \sigma_{G_2}, \mu_{G_1}, \mu_{G_2}$ berturut-turut merupakan subset fuzzy V_1, V_2, E_1, E_2. Maka $(V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1}) \cup (V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2}) = (V_1 \cup V_2, \sigma_{G_1 \cup G_2}, \mu_{G_1 \cup G_2})$ adalah subgraf fuzzy parsial dari $G_1 \cup G_2$ jika dan hanya jika $(V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1})$ dan $(V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2})$ berturut-turut adalah subgraf fuzzy parsial dari G_1 dan G_2.

Teorema 3.2.1.7

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah graf. Misal $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, dan $\sigma_{G_1}, \sigma_{G_2}, \mu_{G_1}, \mu_{G_2}$ berturut-turut merupakan subset fuzzy V_1, V_2, E_1, E_2. Maka $(V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1}) + (V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2}) = (V_1 \cup V_2, \sigma_{G_1 + G_2}, \mu_{G_1 + G_2})$ adalah subgraf fuzzy parsial dari $G_1 + G_2$ jika dan hanya jika $(V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1})$ dan $(V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2})$ berturut-turut adalah subgraf fuzzy parsial dari G_1 dan G_2.

3.2.2 Hasil kali silang dan Komposisi Pada Graf Fuzzy

Definisi 3.2.2.1

Misal $G_1 = (V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1})$ dan $G_2 = (V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2})$ adalah graf fuzzy,
dengan σ_i adalah fungsi keanggotaan dari V_i, dan
μ_i adalah fungsi keanggotaan dari $V_i \times V_i, \forall i = 1{,}2$.
Didefinisikan hasil kali silang fungsi keanggotaan G_1 dan G_2 sebagai berikut :

$\forall\, (u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$,

$(\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1, u_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) = \min(\sigma_1(u_1), \sigma_2(u_2))$;

$\forall\, u \in V_1, \forall\, u_2 v_2 \in E_2$,

$(\mu_1 \times \mu_2)((u, u_2)(u, v_2)) = \sigma_1(u) \wedge \mu_2(u_2 v_2) = \min(\sigma_1(u), \mu_2(u_2 v_2))$;

$\forall\, w \in V_2, \forall\, u_1 v_1 \in E_1$,

$$(\mu_1 \times \mu_2)((u_1, w)(v_1, w)) = \sigma_2(w) \wedge \mu_1(u_1 v_1) = \min(\sigma_2(w), \mu_1(u_1 v_1)).$$

Proposisi 3.2.2.2

Misal $G_1 = (V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1})$ dan $G_2 = (V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2})$ adalah graf fuzzy,
dengan σ_i adalah fungsi keanggotaan dari V_i, dan
μ_i adalah fungsi keanggotaan dari $V_i \times V_i, \forall i = 1{,}2$.
Maka $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, \sigma_{G_1 \times G_2}, \mu_{G_1 \times G_2})$ dengan $\sigma_{G_1 \times G_2} = \sigma_{G_1} \times \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G_1 \times G_2} = \mu_{G_1} \times \mu_{G_2}$ merupakan graf fuzzy dan disebut graf fuzzy hasil kali silang.

Teorema 3.2.2.3

Misalkan G adalah hasil kali silang graf G_1 dan graf G_2. Misal $(V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1}) \times (V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2}) = (V_1 \times V_2, \sigma_{G_1 \times G_2}, \mu_{G_1 \times G_2})$ adalah subgraf fuzzy parsial dari G. Maka $(V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1})$ dan $(V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2})$ adalah subgraf fuzzy parsial dari G_1 dan G_2 jika dan hanya jika memenuhi tiga persamaan yang mempunyai solusi untuk x_i, y_j, z_{jk}, dan w_{ih} dengan $V_1 = \{v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n}\}$ dan $V_2 = \{v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2m}\}$:

1) $x_i \wedge y_j = \sigma(v_{1i}, v_{2j})$, i = 1, . . . , n: j = 1, . . . , m;
2) $x_i \wedge z_{jk} = \mu((v_{1i}, v_{2j})(v_{1i}, v_{2k}))$, i = 1, . . . , n; j, k sedemikian sehingga $v_{2j} v_{2k} \in E_2$;
3) $y_j \wedge w_{ih} = \mu((v_{1i}, v_{2j})(v_{1h}, v_{2j}))$, j = 1, . . . , m; i, h sedemikian sehingga $v_{1i}, v_{1h} \in E_1$.

Definisi 3.2.2.4

Misal $G_1 = (V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1})$ dan $G_2 = (V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2})$ adalah graf fuzzy,
dengan σ_i adalah fungsi keanggotaan dari V_i, dan
μ_i adalah fungsi keanggotaan dari $V_i \times V_i, \forall i = 1{,}2$.
Didefinisikan komposisi fungsi keanggotaan G_1 dan G_2 sebagai berikut :

$\forall (u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$,

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2)(u_1, u_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) = \min(\sigma_1(u_1), \sigma_2(u_2));$$

$\forall u \in V_1, \forall u_2 v_2 \in E_2$,

$$(\mu_1 \circ \mu_2)((u, u_2)(u, v_2)) = \sigma_1(u) \wedge \mu_2(u_2 v_2) = \min(\sigma_1(u), \mu_2(u_2 v_2));$$

$\forall w \in V_2, \forall u_1 v_1 \in E_1$,

$$(\mu_1 \circ \mu_2)\big((u_1, w)(v_1, w)\big) = \sigma_2(w) \wedge \mu_1(u_1v_1) = \min\big(\sigma_2(w), \mu_1(u_1v_1)\big);$$

$\forall (u_1, u_2)(v_1, v_2) \in E^* \backslash E,$

$(\mu_1 \circ \mu_2)\big((u_1, u_2)(v_1, v_2)\big) = \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) \wedge \mu_1(u_1v_1) = \min\big(\sigma_2(u_2), \sigma_2(v_2), \mu_1(u_1v_1)\big).$

Dengan

$E^* = \{(u, u_2)(u, v_2) | u \in V_1, u_2v_2 \in E_2\} \cup \{(u_1, w)(v_1, w) | w \in V_2, u_1v_1 \in E_1\} \cup \{(u_1, u_2)(v_1, v_2) | u_1v_1 \in E_1, u_2 \neq v_2\}$ dan

$E = \{(u, u_2)(u, v_2) | u \in V_1, u_2v_2 \in E_2\} \cup \{(u_1, w)(v_1, w) | w \in V_2, u_1v_1 \in E_1\}.$

Proposisi 3.2.2.5

Misalkan $G_1 = \big(V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1}\big)$ dan $G_2 = \big(V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2}\big)$ adalah graf fuzzy, dengan σ_i adalah fungsi keanggotaan dari V_i, dan μ_i adalah fungsi keanggotaan dari $V_i \times V_i, \forall i = 1,2$. Maka $G_1 \circ G_2 = \big(V_1 \times V_2, \sigma_{G_1 \circ G_2}, \mu_{G_1 \circ G_2}\big)$ dengan $\sigma_{G_1 \circ G_2} = \sigma_{G_1} \circ \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G_1 \circ G_2} = \mu_{G_1} \circ \mu_{G_2}$ merupakan graf fuzzy dan disebut graf fuzzy komposisi.

SIMPULAN

4.1 Simpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Misalkan $G_1 = \big(V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1}\big)$ dan $G_2 = \big(V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2}\big)$ adalah graf fuzzy, dengan σ_i adalah fungsi keanggotaan dari V_i, dan μ_i adalah fungsi keanggotaan dari $V_i \times V_i, \forall i = 1,2$. Maka :
   a. $G_1 \cup G_2 = \big(V_1 \cup V_2, \sigma_{G_1 \cup G_2}, \mu_{G_1 \cup G_2}\big)$ dengan $\sigma_{G_1 \cup G_2} = \sigma_{G_1} \cup \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G_1 \cup G_2} = \mu_{G_1} \cup \mu_{G_2}$ merupakan graf fuzzy dan disebut graf fuzzy gabungan.
   b. $G_1 + G_2 = \big(V_1 \cup V_2, \sigma_{G_1 + G_2}, \mu_{G_1 + G_2}\big)$ dengan $\sigma_{G_1 + G_2} = \sigma_{G_1} + \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G_1 + G_2} = \mu_{G_1} + \mu_{G_2}$ merupakan graf fuzzy dan disebut graf fuzzy join.
   c. $G_1 \times G_2 = \big(V_1 \times V_2, \sigma_{G_1 \times G_2}, \mu_{G_1 \times G_2}\big)$ dengan $\sigma_{G_1 \times G_2} = \sigma_{G_1} \times \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G_1 \times G_2} = \mu_{G_1} \times \mu_{G_2}$ merupakan graf fuzzy dan disebut graf fuzzy hasil kali silang.
   d. $G_1 \circ G_2 = \big(V_1 \times V_2, \sigma_{G_1 \circ G_2}, \mu_{G_1 \circ G_2}\big)$ dengan $\sigma_{G_1 \circ G_2} = \sigma_{G_1} \circ \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G_1 \circ G_2} = \mu_{G_1} \circ \mu_{G_2}$ merupakan graf fuzzy dan disebut graf fuzzy komposisi.
2. Jika G merupakan graf gabungan dari graf G_1 dan graf G_2, maka setiap subgraf fuzzy parsial dari G adalah gabungan dari subgraf fuzzy parsial dari G_1 dan subgraf fuzzy parsial dari G_2.
3. Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah graf. Misal $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, dan $\sigma_{G_1}, \sigma_{G_2}, \mu_{G_1}, \mu_{G_2}$ berturut-turut merupakan subset fuzzy V_1, V_2, E_1, E_2. Maka:
   a. $\big(V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1}\big) \cup \big(V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2}\big) = \big(V_1 \cup V_2, \sigma_{G_1 \cup G_2}, \mu_{G_1 \cup G_2}\big)$ adalah subgraf fuzzy parsial dari $G_1 \cup G_2$ jika dan hanya jika $\big(V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1}\big)$ dan $\big(V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2}\big)$ berturut-turut adalah subgraf fuzzy parsial dari G_1 dan G_2.
   b. $\big(V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1}\big) + \big(V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2}\big) = \big(V_1 \cup V_2, \sigma_{G_1 + G_2}, \mu_{G_1 + G_2}\big)$ adalah subgraf fuzzy parsial dari $G_1 + G_2$ jika dan hanya jika $\big(V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1}\big)$ dan $\big(V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2}\big)$ berturut-turut adalah subgraf fuzzy parsial dari G_1 dan G_2.
4. Misalkan G adalah hasil kali silang graf G_1 dan graf G_2. Misal $\big(V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1}\big) \times \big(V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2}\big) = \big(V_1 \times V_2, \sigma_{G_1 \times G_2}, \mu_{G_1 \times G_2}\big)$ adalah subgraf fuzzy parsial dari G. Maka $\big(V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1}\big)$ dan $\big(V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2}\big)$ adalah subgraf fuzzy parsial dari G_1 dan G_2 jika dan hanya jika memenuhi tiga persamaan yang mempunyai solusi untuk x_i, y_j, z_{jk}, dan w_{ih} dimana $V_1 = \{v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n}\}$ dan $V_2 = \{v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2m}\}$:
   i. $x_i \wedge y_j = \sigma(v_{1i}, v_{2j})$, i = 1, . . . , n: j = 1, . . . , m;
   ii. $x_i \wedge z_{jk} = \mu\Big(\big(v_{1i}, v_{2j}\big)\big(v_{1i}, v_{2k}\big)\Big)$, i = 1, . . . , n; j, k sedemikian sehingga $v_{2j}v_{2k} \in E_2$;
   iii. $y_j \wedge w_{ih} = \mu\Big(\big(v_{1i}, v_{2j}\big)\big(v_{1h}, v_{2j}\big)\Big)$, j = 1, . . . , m; i, h sedemikian sehingga $v_{1i}, v_{1h} \in E_1$.

4.2 Saran

Dalam mempelajari lebih mendalam mengenai graf fuzzy, pembahasan mengenai graf fuzzy M-strong dan komplemennya dapat dijadikan bahan tambahan untuk mempelajari lebih lagi mengenai graf fuzzy.

DAFTAR PUSTAKA

(Reference from book)

[1] Mordeson J.N, dan Nair P.S, 2000, *Fuzzy graphs and Fuzzy hypergraphs*. Physica-Verlag : New York.

(Reference from book)

[2] Harary F, 1969, *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Mas-sachussets :USA.

(Reference from book)

[3] Klir G.J, Yuan B, 1995, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic; theory and applications.* A Simon & Schuster : New York.

(Reference from book)

[4] Budayasa, I Ketut, 2007, *Teori Graph dan Aplikasinya*, Unesa University Press : Surabaya.