DEKOMPOSISI DAN SIFAT MATRIKS STRUKTUR PADA ALJABAR LIE FROBENIUS BERDIMENSI 4

Edi Kurniadi [1]*

[1]Departemen Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran, Bandung, Jawa barat, Indonesia

*Email: edi.kurniadi@unpad.ac.id

Abstrak

Dalam artikel ini, dipelajari matriks struktur dari suatu aljabar Lie Frobenius berdimensi 4. Di sisi lain, setiap aljabar Lie dapat didekomposisi dalam bentuk dekomposisi Levi yang terdiri dari aljabar Lie bagian dan *radical*-nya . Berkaitan dengan hal tersebut, tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan dekomposisi matriks struktur berkorespondensi dengan dekomposisi Levi khususnya pada aljabar Lie Frobenius berdimensi 4. Selanjutnya, metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur khususnya tentang dekomposisi Levi dan matriks struktur suatu aljabar Lie Frobenius. Hasil utama dalam penelitian ini adalah bentuk dekomposisi matriks struktur untuk kelas pertama isomorfisma aljabar Lie Frobenius berdimensi 4 dengan setiap determinannya tidak sama dengan nol. Untuk penelitian lebih lanjut, dekomposisi matriks struktur untuk aljabar Lie Frobenius berdimensi $>$ 4 masih terbuka untuk dipelajari.

Kata kunci: Aljabar Lie Frobenius; Dekomposisi Levi; Matriks Struktur; *Radical*.

PENDAHULUAN

Penelitian tentang aljabar Lie Frobenius telah banyak dilakukan oleh penelitian lain. Dalam hasil (Alvarez & et al, 2018), mereka membahas tentang struktur aljabar Lie kontak dan Frobenius dengan asumsi bahwa ke dua aljabar Lie tersebut mempunyai *nilradical* yang komutatif. Aljabar Lie Frobenius berdimensi $2n$ (Pham, 2016) sedangkan aljabar Lie kontak berdimensi $2n+1$ (Alvarez & et al, 2018). Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie dan $\mathfrak{g}^*$ ruang dualnya. Secara garis besar, suatu aljabar Lie $\mathfrak{g}$ berdimensi $2n$ dikatakan Frobenius jika terdapat $\psi \in \mathfrak{g}^*$ sedemikian sehingga derivatif $(d\psi)^n \neq 0$ (Alvarez & et al, 2018). Di sisi lain, setiap aljabar Lie dapat dinyatakan dalam dekomposisi Levi yaitu sebagai *semi-direct sum* antara aljabar Lie bagian $\mathfrak{h}$ dengan *radical*-nya (Humphreys, 1972). Dengan kata lain,

$$\mathfrak{g} = \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \rtimes \mathfrak{h}. \tag{1}$$

dengan $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ adalah *radical* dari $\mathfrak{g}$ yaitu ideal maksimal *solvable* dari $\mathfrak{g}$. Di sisi lain, karena $\mathfrak{g}$ adalah aljabar Lie maka $\mathfrak{g}$ adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan *bracket* Lie yang memenuhi $[x,x] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$ dan identitas Jacobi. Misalkan $M(\mathfrak{g})$ matriks yang entri-entrinya adalah *brackets* Lie dari $\mathfrak{g}$, yaitu

$$M(\mathfrak{g}) = \left(\left[x_i, x_j\right]\right)^{\mathfrak{g}} \tag{2}$$

dengan $1 \leq i, j \leq 2n$ (A. I Ooms, 2009). Matriks *brackets* Lie tersebut lebih jauh dinamakan matriks struktur untuk aljabar Lie $\mathfrak{g}$ (Alvarez & et al, 2018).

Di sisi lain, aljabar Lie Frobenius untuk dimensi yang kurang dari atau sama dengan 6 sudah diklasifikasikan oleh (Csikós & Verhóczki, 2007). Khusunya untuk aljabar Lie Frobenius berdimensi 4 atas lapangan real $\mathbb{R}$ terdapat 3 kelas isomorfisma. Beberapa sifat tentang elemen utama aljabar Lie Frobenius juga sudah dibahas oleh peneliti lain (Diatta & Manga, 2014) dan (Gerstenhaber & Giaquinto, 2009). Berbeda dengan penelitian sebelumnya, tujuan penelitian ini adalah untuk menggambarkan sifat matriks struktur pada aljabar Lie Frobenius berdimensi 4 atas lapangan real. Lebih lanjut, matriks struktur yang diperoleh berkorespondensi dengan dekomposisi Levi-nya dan dapat dinyatakan sebagai matriks-matriks blok. Selanjutnya, karena $\mathfrak{g}$ adalah aljabar Lie Frobenius maka senantiasa terdapat fungsional linear $\psi \in \mathfrak{g}^*$. Matriks struktur (2), dapat ditulis ulang menjadi

$$M(\mathfrak{g}, \psi) = \left(\langle \psi, \left[x_i, x_j\right] \rangle\right)^{\mathfrak{g}} \tag{3}$$

dengan $\langle \psi, \left[x_i, x_j\right] \rangle$ adalah nilai fungsional linear pada $\left[x_i, x_j\right]$. Tentu saja karena $\mathfrak{g}$ adalah aljabar Lie Frobenius maka determinan matriks (3) tidak sama dengan nol.

Sistematika penulisan paper ini sebagai berikut : Bagian 1 pendahuluan, menjelakan tentang latar belakang penelitian dan motivasi penelitian serta landasan teori yang digunakan. Selanjutnya bagian 2 tentang metode penelitian. Dalam bagian 3, dibahas tentang hasil yang diperoleh dalam penelitian yaitu sifat matriks struktur melalui dekomposisi dalam matriks blok. Dibuktikan pula bahwa determinan matriks struktur tersebut tidak sama dengan nol.

Untuk semua pembahasan dalam penelitian ini, semua aljabar Lie $\mathfrak{g}$ adalah ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$. Sebelum masuk ke dalam pembahasan, kita perkenalkan terlebih dahulu landasan teori yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut :

Definisi 1 (Alvarez & et al, 2018)**.** Misalkan $\mathfrak{g}$ adalah aljabar Lie berdimensi $2n$ dengan $\mathfrak{g}^*$ adalah ruang vektor dualnya. $\mathfrak{g}$ dikatakan Frobenius jika terdapat fungsional linear $\psi \in \mathfrak{g}$ sedemikian sehingga derivatif $(d\psi)^n \neq 0$.

Misalkan $\tau \in \mathfrak{g}^*$, *alternating bilinear form* pada $\mathfrak{g}$ berkorespondensi dengan fungsional linear τ dapat ditulis sebagai berikut

$$f_\tau : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (\alpha, \beta) \mapsto f_\tau(\alpha, \beta) = \langle \tau, [\alpha, \beta] \rangle \in \mathbb{R} \tag{4}$$

dengan $\langle\ ,\ \rangle$ menyatakan nilai dari $\tau \in \mathfrak{g}^*$ pada $\mathfrak{g}$. Kernel dari *alternating bilinear form* pada (4) tiada lain adalah stabilizer $\mathfrak{g}$ pada titik $\tau \in \mathfrak{g}^*$. Dengan kata lain, kita peroleh bahwa

$$\text{Ker } f_\tau = \mathfrak{g}^\tau = \{\alpha \in \mathfrak{g} \quad ; \langle \tau, [\alpha, \beta] \rangle = 0, \forall\, \beta \in \mathfrak{g}\ \} \tag{5}$$

Dari penjelasan sebelumnya, kita peroleh fakta tentang aljabar Lie Frobenius sebagai berikut :

Teorema 2 (Alfons I. Ooms, 1980)**.** *Aljabar Lie* $\mathfrak{g}$ *adalah aljabar Lie Frobenius jika dua pernyataan berikut ini ekuivalen.*

1. *Alternating bilinear form* (4) *bersifat non-degenerate yaitu jika untuk setiap* $\alpha \in \mathfrak{g}$ *yang memenuhi* $\tau(\alpha, \beta) = 0$ *untuk setiap* $\beta \in \mathfrak{g}$, *maka* $\alpha = 0$.
2. *Stabilizer* (5) *sama dengan* $\{0\}$.

Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie dengan basis $S = \{\delta_i\}_{i=1}^n$. Kita definisikan matriks *brackets* dari $\mathfrak{g}$ yang dinyatakan dalam (2) dan matriks tersebut kita namakan matriks struktur. Khususnya untuk aljabar Lie Frobenius, bilangan n senantiasa genap. Selanjutnya, matriks pada (3) tiada lain adalah matriks representasi untuk *alternating bilinear form* pada $\mathfrak{g}$ berkorespondensi dengan fungsional linear ψ. Faktanya, untuk kasus $\mathfrak{g}$ adalah aljabar Lie Frobenius maka determinan (3) tidak sama dengan nol. Tentu saja, kondisi ini merupakan syarat perlu dan cukur agar determinan matriks (2) tidak sama dengan nol. Kita peroleh hasil sebagai berikut.

Teorema 3 (Alfons I. Ooms, 1980)**.** *Aljabar Lie* $\mathfrak{g}$ *adalah aljabar Lie Frobenius jika dua pernyataan berikut ini ekuivalen.*

1. *Determinan matriks struktur* (2) *tidak sama dengan nol.*
2. *Determinan matriks struktur* (3) *tidak sama dengan nol untuk suatu* $\psi \in \mathfrak{g}^*$.

Contoh 3. Misalkan $\mathfrak{g}$ adalah aljabar Lie dengan basis $S = \{\delta_1, \delta_2\}$ dan *bracket* Lie-nya diberikan oleh $[\delta_1, \delta_2] = \delta_2$. Matriks struktur dari $\mathfrak{g}$ diberikan oleh

$$M(\mathfrak{g}) = \left([\delta_i, \delta_j]\right)^{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} [\delta_1, \delta_1] & [\delta_1, \delta_2] \\ [\delta_2, \delta_1] & [\delta_2, \delta_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_2 \\ -\delta_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Dengan memilih $\psi = \pm\delta_2^* \in \mathfrak{g}^*$ dan menggunakan (3) maka (6) menjadi matriks struktur sebagai berikut :

$$M(\mathfrak{g},\psi) = \left(\langle\psi,[\delta_i,\delta_j]\rangle\right)^{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} \langle\psi,0\rangle & \langle\psi,\delta_2\rangle \\ -\langle\psi,\delta_2\rangle & \langle\psi,0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

dengan $\langle\delta_i^*,\delta_j\rangle = 1$ jika $i = j$ dan nol selainnya.

Perhatikan bahwa determinan ke dua matriks pada (6) dan (7) nilainya tidak sama dengan nol. Oleh karena itu, aljabar Lie $\mathfrak{g}$ adalah aljabar Lie Frobenius. Dengan kata lain, kita juga peroleh bahwa derivatif $d\psi \neq 0$, stabilizer $\mathfrak{g}^{\psi} \neq \{0\}$, dan *alternating bilinear form* f_ψ pada $\mathfrak{g}$ bersifat *non-degenerate.*

Di sisi lain, sembarang aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dapat ditulis dalam dekomposisi Levi seperti pada (1). Oleh karena itu, basis $S = \{\delta_i\}_{i=1}^{n}$ untuk $\mathfrak{g}$ dapat diatur sedemikian sehingga $S_{\mathfrak{h}} = \{\delta_i\}_{i=1}^{k}$ basis untuk $\mathfrak{h}$ dan $S_{Rad(\mathfrak{g})} = \{\delta_j\}_{j=k+1}^{k+l}$ basis untuk ideal maksimal solvable $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$. Oleh karena itu, matriks (2) dapat ditulis ulang dalam bentuk sebagai berikut (Alvarez & et al, 2018) :

$$M(\mathfrak{g}) = \left([\delta_i,\delta_j]\right)^{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} P & Q \\ -Q^T & R \end{pmatrix} \quad (8)$$

dengan matriks-matriks P, Q, dan R adalah sebagai berikut :

$$P = \left([\delta_i,\delta_j]\right)_{\mathfrak{h}}, \qquad 1 \le i,j \le k$$

$$Q = \zeta(\delta_i)(\delta_{k+j}), \qquad 1 \le i \le k, 1 \le j \le l$$

$$R = \left([\delta_{k+i},\delta_{l+j}]\right), \qquad 1 \le i,j \le l$$

dengan $\zeta : \mathfrak{h} \ni x \mapsto \zeta(x) = \mathrm{ad}(x)_{\mathfrak{g}}|\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \in \mathfrak{gl}(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))$ adalah representasi linear dan Q^T adalah transpos matriks Q. Lebih jauh, untuk $\psi \in \mathfrak{g}^*$, matriks (3) dan (8) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$M(\mathfrak{g},\psi) = \left(\langle\psi,[\delta_i,\delta_j]\rangle\right)^{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} \langle\psi,P\rangle & \langle\psi,Q\rangle \\ -\langle\psi,Q^T\rangle & \langle\psi,R\rangle \end{pmatrix}. \quad (9)$$

METODE

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur khususnya mempelajari tentang aljabar Lie Frobenius dan matriks struktur yang entri-entrinya memuat semua *brackets* Lie. Objek penelitian ini adalah aljabar Lie Frobenius berdimensi 4 dan matriks strukturnya. Selanjutnya ditentukan pula bahwa aljabar Lie Frobenius tersebut dapat didekomposisi dalam dekomposisi Levi menjadi subaljabar Lie dan *radical*-nya. Oleh karena itu, penulisan aljabar Lie dalam bentuk dekomposisi Levi berpengaruh pada penulisan matriks strukturnya. Secara garis besar, matriks-matriks tersebut dinyatakan dalam (8) dan (9). Tentu saja, dengan menghitung langsung determinan ke dua matriks tersebut tidak sama dengan nol.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas tentang dekomposisi Levi untuk aljabar Lie Frobenius berdimensi 4. Selanujtnya dengan memilih basis yang bersesuaian ditentukan pula matriks strukturnya seperti matriks dalam (8). Konstruksi matriks (9) diperoleh dengan memilih fungsional linear yang mengakibatkan determinan matrik (9) tidak sama dengan nol.

Aljabar Lie Frobenius berdimensi 4 atas lapangan real dikelompokkan menjadi 3 kelas isomorfima (Csikós & Verhóczki, 2007). Untuk kelas pertama kita notasikan dengan $\mathfrak{g}^I$ dengan basis $S = \{\delta_1, \dots, \delta_4\}$ dengan *brackets* Lie tak nolnya dinyatakan sebagai berikut :

$$[\delta_1, \delta_4] = [\delta_3, \delta_2] = \delta_4, \quad [\delta_1, \delta_3] = \frac{1}{2}\delta_3, \; [\delta_1, \delta_2] = \frac{1}{2}\delta_2. \tag{10}$$

Dalam bagain pembahasan ini, dibuktikan proposisi sebagai berikut :

Proposisi 1. *Aljabar Lie Frobenius* $\mathfrak{g}^I$ *dengan brackets Lie-nya diberikan oleh* (10) *dapat dinyatakan dalam dekomposisi Levi* (1) *yaitu* $\mathfrak{g}^I = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}^I) \rtimes \mathfrak{h}$ *dengan* $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}\{\delta_1\}$ *dan radical* $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}^I) = \mathrm{Span}\{\delta_2, \delta_3, \delta_4\}$. *Matrik struktur untuk aljabar Lie Frobenius* $\mathfrak{g}^I$ *tersebut dapat dinyatakan dalam* (8) *dan* (9) *yang ke dua determinannya tidak sama dengan nol.*

Bukti.

Misalkan $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}\{\delta_1\}$ dan $\mathfrak{h}' = \mathrm{Span}\{\delta_2, \delta_3, \delta_4\}$. Dapat diobservasi bahwa $\mathfrak{h}$ dan $\mathfrak{h}'$ ke duanya adalah subaljabar dari $\mathfrak{g}^I$. Lebih jauh, $\mathfrak{h}'$ ideal *solvable* yang bersifat maksimal dari $\mathfrak{g}^I$. Dengan kata lain $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}^I) = \mathfrak{h}'$. Selanjutnya, karena $\mathfrak{h}$ beraksi ke $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}^I)$ maka kita peroleh bahwa aljabar Lie $\mathfrak{g}^I$ dapat dinyatakan dalam dekomposisi Levi dengan subaljabar Lie $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}\{\delta_1\}$ dan *radical* $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}^I) = \mathrm{Span}\{\delta_2, \delta_3, \delta_4\}$. Dalam hal ini, kita tuliskan dalam bentuk

$$\mathfrak{g}^I = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}^I) \rtimes \mathfrak{h} = \mathrm{Span}\{\delta_2, \delta_3, \delta_4\} \rtimes \mathrm{Span}\{\delta_1\}. \tag{11}$$

Matriks struktur dari (11) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$M(\mathfrak{g}) = \left([\delta_i, \delta_j]\right)^{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} [\delta_1,\delta_1] & [\delta_1,\delta_2] & [\delta_1,\delta_3] & [\delta_1,\delta_4] \\ [\delta_2,\delta_1] & [\delta_2,\delta_2] & [\delta_2,\delta_3] & [\delta_2,\delta_4] \\ [\delta_3,\delta_1] & [\delta_3,\delta_2] & [\delta_3,\delta_3] & [\delta_3,\delta_4] \\ [\delta_4,\delta_1] & [\delta_4,\delta_2] & [\delta_4,\delta_3] & [\delta_4,\delta_4] \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Dalam bentuk yang lebih sederhana (12) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$M(\mathfrak{g}) = \left([\delta_i, \delta_j]\right)^{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\delta_2 & \frac{1}{2}\delta_3 & \delta_4 \\ -\frac{1}{2}\delta_2 & 0 & -\delta_4 & 0 \\ -\frac{1}{2}\delta_3 & \delta_4 & 0 & 0 \\ -\delta_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Matriks dalam (13) dapat didekomposisi dalam matriks blok (8) sebagai berikut :

$P = O,$ berukuran 1×1.

$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta_2 & \frac{1}{2}\delta_3 & \delta_4 \end{pmatrix}$ berukuran 1×3.

$R = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_4 & 0 \\ \delta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ berukuran 3×3.

Dengan menghitung langsung determinan matriks (13), kita peroleh $\det M(\mathfrak{g}) = \delta_4^4 \neq 0$. Untuk memperoleh bentuk matriks (9), kita pilih fungsional linear $f = \delta_4^* \in (\mathfrak{g}^I)^*$ sehingga matriks (9) menjadi.

$$M(\mathfrak{g},\psi) = \left(\langle\psi,[\delta_i,\delta_j]\rangle\right)^{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} \langle f,[\delta_1,\delta_1]\rangle & \langle f,[\delta_1,\delta_2]\rangle & \langle f,[\delta_1,\delta_3]\rangle & \langle f,[\delta_1,\delta_4]\rangle \\ \langle f,[\delta_2,\delta_1]\rangle & \langle f,[\delta_2,\delta_2]\rangle & \langle f,[\delta_2,\delta_3]\rangle & \langle f,[\delta_2,\delta_4]\rangle \\ \langle f,[\delta_3,\delta_1]\rangle & \langle f,[\delta_3,\delta_2]\rangle & \langle f,[\delta_3,\delta_3]\rangle & \langle f,[\delta_3,\delta_4]\rangle \\ \langle f,[\delta_4,\delta_1]\rangle & \langle f,[\delta_4,\delta_2]\rangle & \langle f,[\delta_4,\delta_3]\rangle & \langle f,[\delta_4,\delta_4]\rangle \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Dalam hal ini,

$$f(P) = O, f(Q) = (0 \quad 0 \quad 1), f(R) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Dengan menghitung determinan matriks (14), diperoleh $\det M(\mathfrak{g},\psi) = 1$.

■

Untuk 2 sisa kasus kelas isomorfisma aljabar Lie Frobenius berdimensi 4, dekomposisi Levi dan bentuk dekomposisi matriks strukturnya dapat dilakukan dengan cara yang sama untuk kasus kelas pertamanya. Kita peroleh untuk kelas ke duanya dalam bentuk sama dengan kelas pertamanya walaupun *barckets* Lie-nya berbeda yaitu $\mathfrak{g}^{II} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}^{I}) \rtimes \mathfrak{h}$ dan kelas ke tiganya dapat dinyatakan dalam bentuk $\mathfrak{g}^{III} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}^{III}) \rtimes \mathfrak{h}''$ dengan $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}^{III}) = \mathrm{Span}\{\delta_1,\delta_2\}$ dan $\mathfrak{h}'' = \{\delta_3,\delta_4\}$.

Untuk penelitian lebih lanjut, dekomposisi matriks struktur untuk aljabar Lie Frobenius berdimensi $>$ 4 masih terbuka untuk dipelajari.

KESIMPULAN

Telah dibuktikan bahwa aljabar Lie Frobenius berdimensi 4 dapat didekomposisi dalam subaljabar dan *radical*-nya. Selanjutya, dikonstruksi juga matriks strukturnya dan didekomposisi dalam matriks blok menurut basis subaljabar dan *radical*-nya. Lebih jauh, matriks struktur ini senantiasa mempunyai determinan tidak sama dengan nol.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Departemen Matematika FMIPA Unpad yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk melakukan penelitian mandiri ini. Tidak lupa penulis mengucapkan terima kasih kepada *reviewers* atas masukan dan sarannya untuk perbaikan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Alvarez, M. A., & et al. (2018). Contact and Frobenius solvable Lie algebras with abelian nilradical. *Comm. Algebra*, *46*, 4344–4354.

Csikós, B., & Verhóczki, L. (2007). Classification of frobenius Lie algebras of dimension ≤ 6. *Publicationes Mathematicae*, *70*(3–4), 427–451.

Diatta, A., & Manga, B. (2014). On properties of principal elements of frobenius lie algebras. *J. Lie Theory*, *24*(3), 849–864.

Gerstenhaber, M., & Giaquinto, A. (2009). The principal element of a frobenius Lie algebra. *Letters in Mathematical Physics*, *88*(1–3), 333–341. https://doi.org/10.1007/s11005-009-0321-8

Humphreys, J. . (1972). *Introduction to Lie ALgebra and its Representation.pdf* (Third Prin). New York Heidelberg Berlin: Springer-Verlag.

Ooms, A. I. (2009). Computing invariants and semi-invariants by means of Frobenius Lie algebras. *J. Algebra*, *321*, 1293--1312. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.10.026

Ooms, Alfons I. (1980). On frobenius lie algebras. *Communications in Algebra* (Vol. 8). https://doi.org/10.1080/00927878008822445

Pham, D. N. (2016). G-Quasi-Frobenius Lie Algebras. *Archivum Mathematicum*, *52*(4), 233–262. https://doi.org/10.5817/AM2016-4-233