

Pemodelan Matematika SEIqInqR pada Penyebaran Covid-19

Masita¹, Darmawati², Fardinah³

Program Studi Matematika, Universitas Sulawesi Barat, Indonesia

e-mail: ¹ masita10101998@gmail.com

Abstrak. Coronavirus merupakan penyakit yang menular pada manusia yang biasanya menyebabkan infeksi saluran pernafasan, flu biasa hingga penyakit yang serius. Saat ini kasus COVID-19 di Indonesia meningkat karena penularan yang signifikan diberbagai daerah dan masuknya varian corona di Indonesia yang menular lebih cepat maka dari itu jumlah kematian akibat COVID-19 juga meningkat dan Indonesia mencatat kematian tertinggi di dunia. Tujuan dari penelitian ini adalah membangun model dan menganalisis model matematika SEIqInqR terdapat dua titik kesetimbangan yaitu bebas penyakit dan endemik. Analisis model dilakukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk mengidentifikasi nilai eigen. Dari hasil analisis diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil jika nilai $R_0 < 1$ yaitu 0,004487 dan titik kesetimbangan endemik akan stabil jika nilai $R_0 > 1$ yaitu 4,303393. Pada akhir penelitian, diberikan simulasi model dengan menggunakan aplikasi Maple. Berdasarkan hasil simulasi $R_0 < 1$ penyakit akan hilang dan $R_0 > 1$ penyakit akan mewabah.

Kata kunci: model matematika, covid-19, karantina

Abstract. Coronavirus is a disease that is transmitted to humans that usually causes respiratory tract infections, the common cold to serious illnesses. Currently, COVID-19 cases in Indonesia are increasing due to significant transmission in various regions and the entry of corona variants in Indonesia which spreads faster, therefore the number of deaths due to COVID-19 is also increasing and Indonesia has the highest death toll in the world. The purpose of this study is to build a model and analyze the SEIqInqR mathematical model there are two equilibrium points, namely disease-free and endemic. Model analysis was performed using the Routh-Hurwitz criteria to identify the eigenvalues. From the results of the analysis obtained that the disease-free equilibrium point will be stable if the value of $R_0 < 1$ of the 0,004487 and the endemic equilibrium point will be stable if the value of $R_0 > 1$ of this 4,303393 at the end of the study, a simulation model was given using the maple application. based on simulation results $R_0 < 1$ the disease will disappear and $R_0 > 1$ the disease will become epidemic

Keywords: Mathematical Model, Covid-19, Quarantin

I. PENDAHULUAN

Model matematika merupakan sekumpulan persamaan atau pertidaksamaan yang mengungkapkan perilaku suatu permasalahan yang nyata. Model matematika yang dihasilkan dapat berupa persamaan, pertidaksamaan atau lainnya [1]. Dengan menggunakan prinsip-prinsip matematika tersebut maka dapat dilihat bahwa model yang dihasilkan sesuai dengan rumusan, sebagai halnya formulasi masalah nyata yang dihadapi. Salah satu permasalahan nyata yang dapat dibawa dalam bentuk matematika yaitu model matematika pada penyebaran COVID-19.

Coronavirus Disease adalah penyakit menular yang disebabkan oleh jenis virus corona yang baru ditemukan di Wuhan, Provinsi Hubei, China pada Desember 2019. Penelitian telah menunjukkan bahwa penyakit ini disebabkan oleh sindrom pernapasan akut parah Severe Acute Respiratory Syndrome (SARS) yang kemudian diberi nama Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) oleh

World Health Organization (WHO), pasien dengan COVID-19 memiliki gejala seperti demam, batuk kering, dan kelelahan pada tahap awal, dan kemudian dapat mengembangkan gangguan pernapasan akut, gagal pernapasan, syok, dan beberapa organ failure, yang mungkin fatal. Pada penelitian ini, akan diperkenalkan model matematika yang baru dengan beberapa pertimbangan epidemiologi yang tidak digunakan pada model-model sebelumnya.

II. LANDASAN TEORI

2.1 Pemodelan Matematika

Coronavirus merupakan keluarga besar virus yang menyebabkan penyakit pada manusia dan hewan. Pada manusia biasanya menyebabkan penyakit infeksi saluran pernapasan, mulai flu biasa hingga penyakit yang serius seperti Middle East Respiratory Syndrome (MERS) dan Sindrom Pernafasan Akut Berat/ Severe Acute Respiratory Syndrome (SARS). Gejala penderita COVID-19 pada

umumnya berupa demam, batuk kering, dan sesak napas. Jika sebelum 14 hari muncul gejala tersebut dan seseorang pernah melakukan perjalanan ke negara terjangkit, atau pernah merawat/kontak erat dengan penderita COVID-19, orang tersebut akan dilakukan pemeriksaan laboratorium lebih lanjut untuk memastikan diagnosis.

Menurut [2] dalam membangun sebuah model diperlukan beberapa tahapan agar dihasilkan model yang reliabel. Secara umum tahapan-tahapan tersebut adalah sebagai berikut:

1. Identifikasi masalah dilakukan untuk memahami masalah yang akan dirumuskan.
2. Membangun asumsi-asumsi. Hal ini diperlukan karena model adalah penyederhanaan realitas yang kompleks. Asumsi disini dibagi dalam dua kategori utama yaitu:
 - a. Klasifikasi variabel. Hal yang mempengaruhi tingkah laku pengamatan pada langkah 1 diidentifikasi sebagai variabel, baik berupa variabel bebas maupun variabel terikat.
 - b. Menentukan interelasi antara variabel yang terseleksi untuk dipelajari sebelum membuat hipotesa tentang relasi antar variabel, secara umum dilihat beberapa penyederhanaan tambahan.
3. Membuat konstruksi model dapat dilakukan baik melalui hubungan fungsional dengan cara membuat diagram alur, persamaan-persamaan matematika maupun dengan bantuan *software* ataupun secara analitis.
4. Menganalisis model. Tahap ini dilakukan untuk mencari solusi yang sesuai untuk menjawab pertanyaan yang dibangun pada tahap identifikasi. Di dalam pemodelan, analisis dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu dengan melakukan optimasi dan simulasi. Optimasi dirancang untuk mencari solusi apa yang seharusnya terjadi dan simulasi dirancang untuk mencari solusi apa yang akan terjadi.
5. Interpretasi penting dilakukan untuk mengetahui apakah hasil model tersebut rasional atau tidak.
6. Validasi. Sebelum menggunakan model untuk menyimpulkan kejadian dunia nyata, model tersebut harus diuji keabsahannya. Model yang valid tidak hanya mengikuti kaidah-kaidah teoritis yang sah tetapi juga memberikan interpretasi atas hasil yang diperoleh mendekati kesesuaian. Jika sebagian besar standar verifikasi tersebut dapat dilalui, model dapat diimplementasikan, sebaliknya jika tidak, maka konstruksi model harus dirancang ulang.
7. Implementasi. Jika hasil validasi memenuhi syarat dan rasional maka hasilnya dapat diterima, baru kemudian dapat dilakukan implementasi dari model yang diperoleh.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Definisi dari persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan/menyertakan turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas [3].

Klasifikasi yang lain dari persamaan yaitu terdapat satu fungsi dan terdapat dua atau lebih fungsi yang tidak diketahui. jika terdapat satu fungsi yang harus ditentukan maka cukup satu persamaan. Namun, jika terdapat dua atau lebih fungsi yang tidak diketahui maka diperlukan suatu sistem persamaan [4].

Definisi sistem persamaan diferensial nonlinear yaitu persamaan diferensial biasa yang tak linear. Persamaan diferensial dikatakan nonlinear jika persamaan diferensial tersebut memenuhi paling sedikit satu dari kriteria berikut.

- (i) Memuat variabel tak bebas dari turunan-turunannya berpangkat selain satu.
- (ii) Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan/atau turunan-turunannya.
- (iii) Terdapat fungsi transedental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya

2.3 Kestabilan Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu. Secara matematis, titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium dari suatu sistem persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$ jika memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ [5].

Linearisasi merupakan proses membawa suatu sistem nonlinear menjadi sistem linear. Linearisasi dilakukan pada sistem nonlinear untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik ekuilibrium sistem tersebut. Linearisasi pada sistem nonlinear dimaksudkan untuk memperoleh aproksimasi yang baik.

Berikut diberikan definisi matriks Jacobian. Diberikan fungsi $f = (f_1, \dots, f_n)$ pada sistem $x^* = f(\bar{x})$ dengan $f_i \in C(E), i = 1, 2, \dots, n$.

$$Jf(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

dinamakan matriks Jacobian dari f di titik \bar{x} [6].

Nilai eigen digunakan untuk mengetahui kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial. Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x dalam \mathbb{R}^n dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x yaitu $Ax = \lambda x$. [7]

Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz adalah suatu metode yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Jika persamaan polinom. [3]

2.3 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*) merupakan suatu ukuran potensi penyebaran penyakit dalam populasi. Bilangan reproduksi dasar adalah salah satu bilangan yang paling sering dikaji dalam bidang epidemiologi. Beberapa kondisi yang akan muncul antara lain,

1. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang.

2. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap

Jika $R_0 > 1$. Maka penyakit akan mengikat menjadi wabah [8].

III. METODE

Pada penelitian ini, metode atau langkah-langkah yang digunakan dalam menganalisis model matematika SEIqInqR pada penyebaran COVID-19 adalah sebagai berikut.

1. Identifikasi masalah, yaitu membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan model matematika SEIqInqR pada penyebaran COVID-19 sehingga dapat menemukan sub-sub populasi yang akan digunakan.
2. Membuat asumsi, dalam pemodelan matematika diperlukan membuat asumsi tentang model yang akan diformulasi.
3. Formulasi model matematika
4. Menganalisis model
5. Mensimulasikan model dengan menggunakan program maple.
6. Membuat kesimpulan

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Model Matematika SEIqInqR pada Penyebaran Penyakit COVID-19

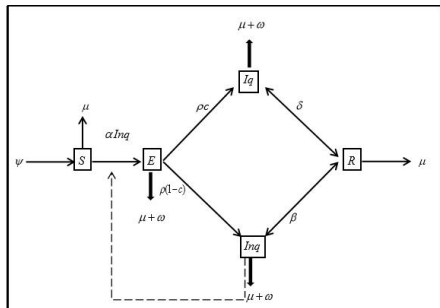
4.2.1 Titik Kesetimbangan

Dalam model matematika penyebaran penyakit COVID-19 yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah pemodelan matematika SEIqInqR pada penyebaran COVID-19. Pada model ini populasi dibagi menjadi 5 (lima) kompartemen atau 5 (lima) subpopulasi.

Asumsi model matematika SEIqInqR adalah sebagai berikut:

- a. Populasi dibagi ke dalam lima subpopulasi yakni, individu rentan (S), individu laten (E), individu terinfeksi yang di karantina (Iq), individu terinfeksi yang tidak dikarantina (Inq), individu sembuh (R).
- b. Populasi di asumsikan tertutup.
- c. Setiap kelahiran masuk ke dalam subpopulasi S.
- d. Populasi homogen tercampur rata artinya penularan berlaku sama untuk setiap orang
- e. Individu yang mengalami gejala covid dibagi ke dalam subpopulasi karantina dan tidak karantina.
- f. Laju kematian subpopulasi SEIqInqR adalah laju kematian alami.
- g. Karantina dilakukan sesuai protokol kesehatan yang berlaku.

Diagram model matematika SEIqInqR diberikan sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram model matematika SEIqInqR

Keterangan:

S : Subpopulasi individu rentan

E : Subpopulasi individu laten

Iq: Subpopulasi individu terinfeksi yang dikarantina

Inq: Subpopulasi individu terinfeksi yang tidak dikarantina

R: Subpopulasi individu yang sembuh

μ : Laju kematian alami

ψ : Kelahiran konstan

ω : Laju kematian karena penyakit

α : Laju individu laten menjadi terinfeksi

ρ : Laju perpindahan individu exposed ke subpopulasi Iq dan Inq

β : Laju perpindahan individu terinfeksi yang tidak dikarantina menjadi sembuh

δ : Laju perpindahan individu terinfeksi yang dikarantina menjadi sembuh

c: Proporsi individu yang dikarantina

---> : Hubungan tidak langsung antara individu terinfeksi yang tidak di karantina dengan individu exposed.

Berdasarkan diagram dan uraian diatas, maka penyebaran penyakit COVID-19 dapat dimodelkan dalam bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \psi - \mu S - \alpha S Inq \\ \frac{dE}{dt} &= \alpha S Inq - (\mu + \omega) E - \rho c E - \rho(1-c) E \\ \frac{dIq}{dt} &= \rho c E - (\mu + \omega) Iq - \delta Iq \\ \frac{dInq}{dt} &= \rho(1-c) E - (\mu + \omega) Inq - \beta Inq \\ \frac{dR}{dt} &= \delta Iq + \beta Inq - \mu R \end{aligned} \tag{1}$$

4.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Persamaan

4.2.1 Bilangan Reproduksi Dasar

Titik kesetimbangan dari persamaan (1) diperoleh berdasarkan definisi [5] yang menghasilkan 2 (dua) titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = (S, E, Iq, Inq, R) = \left(\frac{\psi}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right) \text{ dan titik}$$

kesetimbangan endemik penyakit

$$E_1 = (S, E, Iq, Inq, R) = \left(\frac{\psi(\mu + \omega + \beta)(\mu + \omega + \rho)}{(\rho - \rho c)\alpha\psi}, \frac{-(\mu + \omega + \beta)(\mu + \omega + \rho) - (\rho - \rho c)\alpha\psi}{(\mu + \omega + \beta)(c - 1)\alpha\rho}, \frac{\rho c\psi(\mu(\mu + \omega + \beta)(\mu + \omega + \rho) - (\rho - \rho c)\alpha\psi)}{(\mu + \omega + \rho)(\mu + \omega + \delta)[(\mu\delta(\mu + \omega + \beta)(\mu + \omega + \rho) - (\rho - \rho c)\alpha\psi)]}, \frac{\mu(\mu + \omega + \beta)(\mu + \omega + \rho) - (\rho - \rho c)\alpha\psi}{\alpha(\mu + \omega + \beta)(\mu + \omega + \rho)}, \frac{\delta(\alpha A \rho c \psi (\mu A - (\rho - \rho c)\alpha\psi)) + \beta(\mu A - (\rho - \rho c)\alpha\psi) - d(\mu A + \alpha(\mu A - (\rho - \rho c)\alpha\psi))}{\mu(d(\mu A + \alpha(\mu A - (\rho - \rho c)\alpha\psi))(\alpha A))} \right)$$

4.2.2 Bilangan Reproduksi Dasar

Selanjutnya akan ditentukan Bilangan Reproduksi Dasar. Berdasarkan [5] subpopulasi yang ada, terdapat tiga subpopulasi yang terinfeksi yaitu, E, Iq, dan Inq, diberikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \alpha SInq - (\mu + w)E - \rho cE - \rho(1-c)E \\ \frac{dIq}{dt} &= \rho cE - (\mu + w)Iq - \delta Iq \\ \frac{dInq}{dt} &= \rho(1-c)E - (\mu + w)Inq - \beta Inq\end{aligned}$$

Dari sistem tersebut diperoleh:

$$F = \begin{pmatrix} \alpha SInq \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \mu + w + \rho \\ -\rho cE + (\mu + w + \delta)Iq \\ -\rho(1-c)E + (\mu + w + \beta)Inq \end{pmatrix}$$

Selanjutnya F dan V diturunkan terhadap E, Iq dan Inq kemudian mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit sehingga diperoleh:

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha\psi}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V' = \begin{pmatrix} \mu + w + \rho & 0 & 0 \\ -\rho c & \mu + w + \delta & 0 \\ -\rho(1-c) & 0 & \mu + w + \beta \end{pmatrix}$$

Sebelum menentukan $R_0 : K = F'V^{-1}$ terlebih dahulu dicari matriks $V^{-1} = \frac{1}{\det V} adj V$.

$$V^{-1} = \frac{1}{(\mu + w + \delta)(\mu + w + \beta)(\mu + w + \rho)}$$

$$\begin{vmatrix} (\mu + w + \delta)(\mu + w + \beta) & -\rho c(\mu + w + \beta) & -\rho c(\mu + w + \delta) \\ 0 & (\mu + w + \rho)(\mu + w + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu + w + \rho} & 0 & 0 \\ \frac{\rho c}{(\mu + w + \beta)(\mu + w + \rho)} & \frac{1}{\mu + w + \beta} & 0 \\ \frac{\rho c}{(\mu + w + \beta)(\mu + w + \rho)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = FV^{-1}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha\psi}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu + w + \rho} & 0 & 0 \\ \frac{\rho c}{(\mu + w + \beta)(\mu + w + \rho)} & \frac{1}{\mu + w + \beta} & 0 \\ \frac{\rho c}{(\mu + w + \beta)(\mu + w + \rho)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0+0+0 & \frac{\rho c \left(\alpha \frac{\psi}{\mu} \right)}{(\mu + w + \beta)(\mu + w + \rho)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya ditentukan nilai eigen sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \rho c \alpha \left(\frac{\psi}{\mu} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\rho c \frac{\psi}{\mu}}{(\mu + w + \beta)(\mu + w + \rho)} - \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

Diperoleh:

$$-\lambda_2 = 0, -\lambda_3 = 0 \text{ atau } \lambda_1 = \frac{-\rho c \left(\frac{\psi}{\mu} \right)}{(\mu + w + \beta)(\mu + w + \rho)}$$

Sehingga diperoleh

$$R_0 = \rho(k) = \text{Max} \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \}$$

$$= \text{Max} \left\{ \frac{\rho c \frac{\psi}{\mu}}{(\mu + w + \beta)(\mu + w + \rho)}, 0, 0 \right\}$$

$$R_0 = \frac{\rho c \frac{\psi}{\mu}}{(\mu + w + \beta)(\mu + w + \rho)}$$

Jadi, bilangan reproduksi dasar model SEIQInqR adalah

$$R_0 = \frac{\rho c \frac{\psi}{\mu}}{(\mu + w + \beta)(\mu + w + \rho)}$$

4.2.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Analisis titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh berdasarkan nilai eigen dari matriks jacobian (1) sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} -\mu - \alpha Inq & 0 & 0 & -\alpha S & 0 \\ \alpha Inq & -(\mu + w) - \rho & 0 & \alpha S & 0 \\ 0 & \rho c & -(\mu + w) - \delta & 0 & 0 \\ 0 & \rho(1-c) & 0 & -(\mu + w + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \beta & -\mu \end{pmatrix}$$

Substitusi titik kesetimbangan bebas penyakit ke matriks jacobian

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & -\alpha \frac{\psi}{\mu} & 0 \\ 0 & -(\mu + w) - \rho & 0 & \alpha \frac{\psi}{\mu} & 0 \\ 0 & \rho c & -(\mu + w) - \delta & 0 & 0 \\ 0 & \rho(1-c) & 0 & -(\mu + w + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \beta & -\mu \end{pmatrix}$$

Misalkan:

$$K = \alpha \frac{\psi}{\mu}$$

$$A = (\mu + w + \rho)$$

$$D = -\rho c$$

$$N = (\mu + w + \delta)$$

$$L = \rho(1-c)$$

$$Z = (\mu + w + \beta)$$

Selanjutnya ditentukan nilai eigen matriks jacobian dengan rumus

$$|\lambda I - J(E_0)| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\mu & 0 & 0 & -K & 0 \\ 0 & -A & 0 & K & 0 \\ 0 & D & N & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & -Z & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \beta & -\mu \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \mu)[[(\lambda + A)(\lambda + N)(\lambda + Z)(\lambda + \mu)] + [LK(\lambda + N)(\lambda + \mu)]] = 0$$

$$(\lambda + \mu)^2(\lambda + N)[(\lambda + A)(\lambda + Z) + LK] = 0$$

$$(\lambda + \mu)^2 = 0 \rightarrow \lambda = -\mu$$

$$(\lambda + N) = 0 \rightarrow \lambda = -N$$

dengan menggunakan metode Routh-Hurwitz seperti diperoleh

$$(\lambda + A)(\lambda + Z) + LK = 0$$

$$= \lambda^2 + \lambda Z + A\lambda + AZ + LK = 0$$

$$= \lambda^2 + \lambda(A + Z) + LK = 0$$

Tabel 1. Tabel Routh Hurwitz titik kesetimbangan bebas penyakit

λ^2	1	LK	0
λ^1	A+Z	0	0
λ^0	LK	0	0

Berdasarkan tabel Routh Hourwitz diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik jika $A + Z > 0$ dan $LK > 0$.

4.2.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Analisis titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh berdasarkan nilai eigen dari matiks jacobian (1) sebagai berikut:

$$J = \begin{vmatrix} -\mu - \alpha Inq & 0 & 0 & -\alpha S & 0 \\ \alpha Inq & -(\mu + \omega) - \rho & 0 & \alpha S & 0 \\ 0 & \rho c & -(\mu + \omega) - \delta & 0 & 0 \\ 0 & \rho - (1 - c) & 0 & -(\mu + \omega + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \beta & -\mu \end{vmatrix}$$

Substitusikan titik kesetimbangan endemik diperoleh

$$J = \begin{vmatrix} -\mu - \alpha Inq^* & 0 & 0 & -\alpha S^* & 0 \\ \alpha Inq^* & -(\mu + \omega) - \rho & 0 & \alpha S^* & 0 \\ 0 & \rho c & -(\mu + \omega) - \delta & 0 & 0 \\ 0 & \rho - (1 - c) & 0 & -(\mu + \omega + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \beta & -\mu \end{vmatrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai eigen matriks J dengan rumus

$$|\lambda I - J(E_1)| = 0$$

Sehingga di peroleh:

$$\lambda^3 + ((\mu + \alpha Inq^*)(\mu + \omega + \rho) + (\mu + \omega + \rho))\lambda^2 + (\mu + \alpha Inq^*)(\mu + \omega + \rho) - (\alpha \rho(1 - c))\lambda + (\mu + \omega + \beta)(\mu + \alpha Inq^*)(\mu + \omega + \rho)(\mu + \alpha Inq^*) - \alpha \rho(1 - c)S^*\alpha^2 \rho(1 - c)S^* Inq^* = 0$$

Untuk menentukan karakteristik akar persamaan diatas digunakan Kriteria Routh Hurwitz.

Misalkan:

$$Q_1 = ((\mu + \alpha Inq^*)(\mu + \omega + \rho) + (\mu + \omega + \rho))\lambda^2$$

$$Q_2 = ((\mu + \alpha Inq^*)(\mu + \omega + \rho) + (\mu + \alpha Inq^*)(\mu + \omega + \beta) + (\mu + \omega + \rho)(\mu + \omega + \rho) - (\alpha \rho(1 - c))\lambda$$

$$Q_3 = (\mu + \omega + \beta)(\mu + \alpha Inq^*)(\mu + \omega + \rho) - (\mu + \alpha Inq^*)\alpha \rho(1 - c)S^* - \alpha^2 \rho(1 - c)S^* Inq^* = 0$$

Tabel 2. Tabel Routh Hurwitz titik kesetimbangan endemik

λ^3	1	Q_2	0
λ^2	Q_1	Q_3	0
λ^1	$\frac{Q_1 Q_2 - Q_3}{Q_1}$	0	0
λ^0	Q_3	0	0

Berdasarkan tabel tersebut diperoleh bahwa sistem akan stabil asimtotik dengan syarat $Q_1 \geq 0, \frac{Q_1 Q_2 - Q_3}{Q_1} \geq 0$ dan $Q_3 \geq 0$.

4.3 Simulasi Numerik

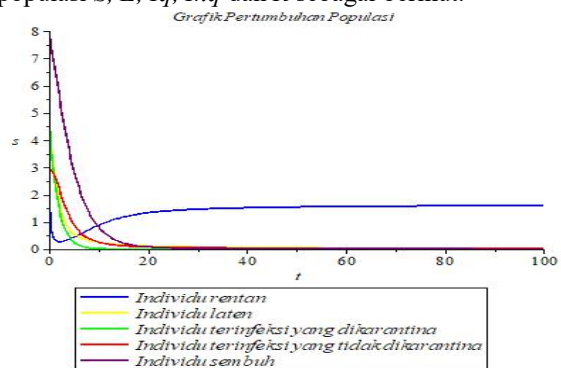
Selanjutnya dilakukan interpretasi model ke dalam bentuk simulasi menggunakan *software maple 18*. Pada bagian simulasi ini, diamati dinamika populasi dalam dua kondisi, yaitu $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$.

Berikut nilai parameter dan variabel yang diperoleh dari beberapa asumsi dan sumber dari beberapa jurnal untuk $R_0 < 1$

Tabel 3. Nilai variabel dan parameter untuk $R_0 < 1$

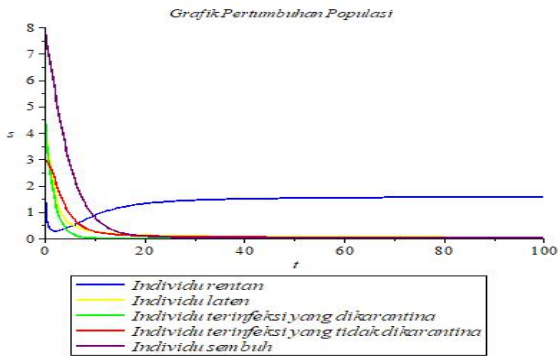
Variabel/Parameter	Nilai	Sumber
S	2	Asumsi
E	4	Asumsi
Iq	5	Asumsi
Inq	3	Asumsi
R	8	Asumsi
μ	0,3	[9]
ψ	0,5	[9]
ω	0,10	[9]
α	0,7	[9]
ρ	0,35	Asumsi
β	0,12	Asumsi
δ	0,20	Asumsi
c	0,03	Asumsi

Interpretasi model untuk $R_0 < 1$ dengan nilai 0,0448 dapat dilihat dari plot perubahan masing-masing subpopulasi S, E, Iq, Inq dan R sebagai berikut.



Gambar 2. Pertumbuhan Subpopulasi S E Iq Inq dan R untuk $R_0 < 1$

Interpretasi model untuk $c=0$ untuk melihat efektivitas dari karantina dipilih nilai $I_q=0$ dapat dilihat dari plot perubahan masing- masing subpopulasi S, E, I_q, I_{nq} dan R sebagai berikut.



Gambar 3. Pertumbuhan Subpopulasi S E Iq Inq dan R untuk $c=0$

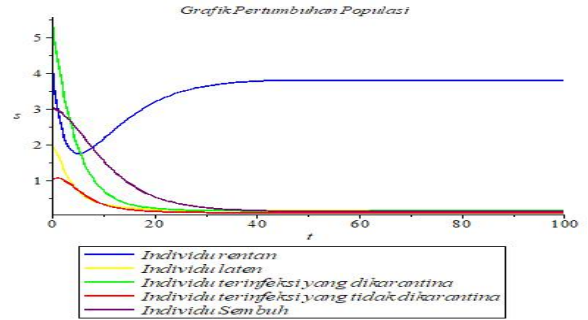
Pada gambar 2 dan gambar.3 terlihat bahwa laju pertumbuhan subpopulasi *susceptible* pada awalnya mengalami penurunan, kemudian seiring berjalannya waktu mengalami peningkatan menuju titik 1,66. Sedangkan pada subpopulasi *exposed*, subpopulasi terinfeksi yang dikarantina, subpopulasi terinfeksi yang tidak dikarantina, dan subpopulasi *recovered* mengalami penurunan menuju titik 0. Jadi pada kedua gambar tersebut diperoleh bahwa individu yang dikarantina tidak berpengaruh pada jumlah proporsi individu yang di karantina, hasil simulasi tersebut sesuai dengan analisis titik kestabilan titik kesetimbangan akan stabil jika $R_0 < 1$ yaitu 0,04487.

Berikut nilai parameter dan variabel yang diperoleh dari beberapa asumsi dan sumber dari beberapa jurnal $R_0 > 1$

Tabel 4. Nilai variabel dan parameter untuk $R_0 > 1$

Variabel/Parameter	Nilai	Sumber
S	4	Asumsi
E	2	Asumsi
Iq	5	Asumsi
Inq	1	Asumsi
R	3	Asumsi
μ	0,15	[9]
ψ	0,7	[9]
ω	0,125	[9]
α	0,35	[9]
ρ	0,56	Asumsi
β	0,125	Asumsi
δ	0,05	Asumsi
c	0,55	Asumsi

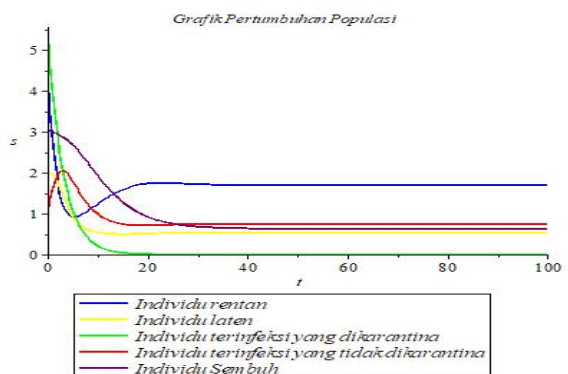
Interpretasi model untuk $R_0 > 1$ dengan nilai 0,55 dapat dilihat dari plot perubahan masing- masing subpopulasi S, E, I_q, I_{nq} dan R sebagai berikut.



Gambar 4. Pertumbuhan Subpopulasi SEIQInq dan R untuk $R_0 > 1$

Pada Gambar 4 jumlah subpopulasi rentan mengalami proses penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian secara alami kemudian pada waktu tertentu mengalami peningkatan karena adanya laju kelahiran konstan dan seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju 3,78. subpopulasi laten mengalami proses penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian secara alami ataupun kematian yang disebabkan oleh penyakit dengan seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju 0,15. Subpopulasi terinfeksi yang dikarantina mengalami proses penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian secara alami ataupun kematian yang disebabkan oleh penyakit laju perpindahan individu terinfeksi yang di karantina menjadi sembuh dan seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju 0,05. Subpopulasi terinfeksi yang tidak dikarantina mengalami peningkatan karena adanya individu yang tidak di karantina dan pada waktu tertentu mengalami proses penurunan karena adanya kematian secara alami dan kematian yang disebabkan oleh penyakit dan seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju 0,99. Subpopulasi sembuh mengalami penurunan karna adanya kematian secara alami dan seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju 0,74. Hal ini sesuai dengan hasil analisis titik kesetimbangan yang telah diperoleh sebelumnya.

Interpretasi model $c=0$ untuk melihat efektivitas dari karantina dipilih nilai $I_q=0$ dapat dilihat dari plot perubahan masing- masing subpopulasi S, E, I_q, I_{nq} dan R sebagai berikut



Gambar 5. Pertumbuhan Subpopulasi SEIQInqR $c=0$

Pada Gambar 5 jumlah subpopulasi rentan mengalami proses penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian secara alami kemudian pada waktu tertentu mengalami peningkatan karena adanya laju kelahiran konstan dan seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju 1,70. Subpopulasi laten mengalami proses penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian secara alami ataupun kematian yang disebabkan oleh penyakit seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju 0,53. Subpopulasi terinfeksi yang dikarantina mengalami proses penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian secara alami ataupun kematian yang disebabkan oleh penyakit laju perpindahan individu terinfeksi yang di karantina menjadi sembuh dan seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju 0. Subpopulasi terinfeksi yang tidak dikarantina mengalami peningkatan yang signifikan karena adanya individu yang tidak di karantina dan pada waktu tertentu mengalami proses penurunan karna adanya kematian secara alami dan kematian yang disebabkan oleh penyakit dan seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju 0,74. Subpopulasi sembuh mengalami penurunan karna adanya kematian secara alami dan seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju 0,62. Jadi perbedaan pada kedua gambar tersebut terletak pada subpopulasi individu terinfeksi yang tidak dikarantina dimana pada gambar 4 mengalami sedikit peningkatan sedangkan pada gambar 5 mengalami peningkatan yang signifikan kemudian menurun seiring berjalannya waktu.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Model epidemi SEIqInqR pada penyebaran COVID-19 diperoleh seperti pada persamaan (1).
2. Model matematika SEIqInqR menghasilkan dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik jika $A + Z > 0$ dan $LK = 0$. titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik dengan syarat $Q_1 \geq 0$, $\frac{Q_1 Q_2 - Q_3}{Q_1} \geq 0$ dan $Q_3 \geq 0$
3. Berdasarkan hasil simulasi yang dilakukan, sesuai dengan aplikasi *maple* diperoleh bahwa penyakit akan

hilang jika $R_0 < 1$ dan penyakit akan mewabah jika $R_0 > 1$.

REFERENSI

- [1] Yulida, Y., & Karim, M. A, "Pemodelan Matematika Penyebaran COVID-19 di Provinsi Kalimantan Selatan," *Media Bina Ilmiah*, 14(10), 3257-3264, 2020.
- [2] Pagalay, Usman, "Mathematical Modeling (Aplikasi Pada Kedokteran Immunologi, Biologi, Ekonomi, Dan Perikanan)," Malang: UIN Malang, 2009.
- [3] Ross, L. Shepley. "*Differential Equations*," New York: New York University Of New Hasphire, 1984.
- [4] Boyce, W. E. Dan R. C. Diprima, "*Elementary Differential Equation And Boundary Value Problem. Ninth Edition*," USA: John Wiley and Sons, Inc, 2009.
- [5] Wiggins, S, "*Introdection to Applied Non Linear Dynamical System And Chaos*," New York: Springer- Verlag, 1990.
- [6] Kocak, H. & J. H. Hole, "*Dynamic and Bifurcation*," New York: Springer – Verlag, , 1991.
- [7] Anton, H, "*Aljabar Linear Elementer, Fifth Edition (Alih Bahasa Pantur Silaban, Ph. D)*," Jakarta : Erlangga, 1997.
- [8] Side, S., Sanusi, W., & Setiawan, N. F, "Analisis dan simulasi model SITR pada penyebaran penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar," *Sainsmat: Jurnal Ilmiah Ilmu Pengetahuan Alam*, 5(2), 191-204, 2016.
- [9] Fauziah, I., & Manaqib, M.(2020), "Pemodelan matematika penyebaran penyakit Middle East Respiratory Syndrome Corona Virus (MERS-CoV) dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi," Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah, Jakarta, 2020.