ITERASI TIGA LANGKAH PADA PEMETAAN ASIMTOTIK NON-EKSPANSIF

Agung Anggoro, Siti Fatimah[1], Encum Sumiaty[2]

Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI

*Surel: agung.anggoro@student.upi.edu

ABSTRAK. Misalkan D adalah subhimpunan tak kosong yang tutup, konveks, dan terbatas dari sebuah ruang Banach X yang konveks seragam. Selanjutnya, sebuah pemetaan asimtotik non-ekspansif $T : D \rightarrow D$ memiliki sebuah titik tetap. Dengan penambahan kondisi tertentu, dapat dikonstruksi sebuah barisan $\{x_n\}$ dari sebuah iterasi sedemikian sehingga $\{x_n\}$ konvergen menuju suatu titik tetap dari T.

Kata kunci: pemetaan asimtotik non-ekspansif, titik tetap, iterasi tiga langkah, konvergen.

ABSTRACT. Let D is a non-empty, closed, convex, and bounded subset of a uniformly convex Banach space X. Then, an asymptotically non-expansive mapping $T : D \rightarrow D$ has a fixed point. By adding certain conditions, we can construct sequence $\{x_n\}$ which is obtained from an iteration such that $\{x_n\}$ converges to a fixed point of T.

Key words: asymptotically non-expansive mapping, fixed point, three steps iteration, convergent.

1. PENDAHULUAN

Pemetaan $T : D \rightarrow D$, dengan D merupakan subhimpunan tak kosong dari ruang Banach X, disebut sebagai pemetaan asimtotik non-ekspansif jika terdapat barisan bilangan real $\{k_n\}$ dengan $k_{n+1} \leq k_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dan $\lim \{k_n\} = 1$, sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli n berlaku $\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|$, $\forall x, y \in D$ [6]. Selanjutnya, T disebut pemetaan yang asimtotik non-ekspansif dengan barisan $\{k_n\}$ [18].

---

[1] Penulis Penanggung Jawab

[2] Penulis Penanggung Jawab

Pada tahun 1972, Goebel dan Kirk mengemukakan bahwa terdapat $x \in D$ sedemikian sehingga memenuhi persamaan $x = T$, dimana $T: D \to D$ adalah pemetaan asimtotik non-ekspansif, dengan D adalah subhimpunan tak kosong yang tutup, konveks, dan terbatas dari sebuah ruang Banach X yang konveks seragam [6]. $x \in D$ yang demikian disebut sebagai titik tetap dari T. Adapun definisi ruang Banach konveks seragam dijelaskan oleh Clarkson [5].

Publikasi-publikasi selanjutnya yang berkaitan dengan pemetaan asimtotik non-ekspansif mengemukakan tentang iterasi yang konvergen menuju titik tetap pada pemetaan asimtotik non-ekspansif, diantaranya oleh Schu pada tahun 1991 yang menjelaskan tentang proses iterasi satu langkah yang disebut sebagai modifikasi dari iterasi Mann [18]. Adapun, Tan dan Xu [20] pada tahun 1994 dan Osilike dan Aniagbosor [14] pada tahun 1999 masing-masing menjelaskan tentang iterasi Ishikawa dan modifikasinya. Selanjutnya, pada tahun 2002, Xu dan Noor memperkenalkan iterasi tiga langkah untuk mengkontruksi barisan yang konvergen menuju titik tetap dari suatu pemetaan asimtotik non-ekspansif yang kontinu lengkap dan sekaligus menjelaskan kekonvergenan iterasi dua langkah maupun satu langkah sebagai kasus khusus dari iterasi tiga langkah [21].

Dalam tulisan ini, penulis mencoba mengemukakan mengenai sifat-sifat dan kekonvergenan iterasi tiga langkah pada pemetaan asimtotik non-ekspansif. Penulis juga mencoba menambahkan sebuah kasus khusus, yaitu pada ruang Banach X yang konveks seragam dan berdimensi hingga, dimana syarat kontinu lengkap cukup ditulis dengan kontinu saja.

2. EKSISTENSI TITIK TETAP PADA PEMETAAN ASIMTOTIK NON-EKSPANSIF

Ruang Banach X konveks seragam, maka X merupakan ruang yang refleksif [4]. Oleh karena itu, berlaku teorema tentang rantai dari subhimpunan yang tak kosong, tutup, dan konveks dari X yang dijelaskan oleh Kirk [12]. Selanjutnya, berlaku teorema eksistensi titik tetap dari pemetaan asimtotik non-ekspansif $T: D \to D$. Dengan D adalah subhimpunan tak kosong yang tutup, konveks, dan terbatas dari X.

Teorema 2.1[6] *Jika D adalah subhimpunan tak kosong yang tutup, konveks, dan terbatas dari sebuah ruang Banach X yang konveks seragam, dan $F: D \to D$ adalah pemetaan asimtotik non-ekspansif, maka F memiliki titik tetap di D.*

Sebagai contoh adalah $F: D \to D$ dengan $D = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ dan $F(x) = \frac{1}{2}x$. Faktanya, D merupakan himpunan konveks, tutup, dan terbatas dari

$\mathbb{R}^2$ yang merupakan ruang Banach yang konveks seragam, dan F memiliki titik tetap, yaitu $x = (0,0) \in D$.

3. ITERASI TIGA LANGKAH PADA PEMETAAN ASIMTOTIK NON-EKSPANSIF

Iterasi tiga langkah dijelaskan oleh Xu dan Noor [21] dengan $n \geq 0$ dan dilakukan penyesuaian yaitu dengan $n \geq 1$ sehingga menjadi sebagai berikut : Misalkan D adalah subhimpunan tak kosong dari sebuah ruang bernorm X dan $T : D \rightarrow D$ adalah sebuah pemetaan. Untuk setiap $x_1 \in D$, dapat dikonstruksi barisan $\{x_n\}, \{y_n\}$, dan $\{z_n\}$ sedemikian sehingga

$$z_n = \gamma_n T^n x_n + (1 - \gamma_n) x_n$$
$$y_n = \beta_n T^n z_n + (1 - \beta_n) x_n$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1 - \alpha_n) x_n,$$
$$n \geq 1$$

dengan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$, dan $\{\gamma_n\}$ adalah barisan di $[0, 1]$.

Teorema berikut ini mendasari sifat pertama dari iterasi tiga langkah pada pemetaan asimtotik non-ekspansif, disebut juga sebagai ketaksamaan Xu.

Teorema 3.1[22] *Misalkan $p > 1, r > 0$ sebarang bilangan real yang tetap. X sebuah ruang Banach yang konveks seragam jika dan hanya jika terdapat sebuah fungsi $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ yang kontinu, naik keras, konveks, dan $g(0) = 0$ sedemikian sehingga*

$$\|\lambda \quad + (1 - \lambda) y\|^p \leq \lambda \|x\|^p + (1 - \lambda) \|y\|^p - w_p(\lambda) g(\|x - y\|)$$

untuk semua $x, y \in B_r = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$, $\lambda \in [0,1]$, dengan $w_p(\lambda) = \lambda(1 - \lambda)^p + \lambda^p(1 - \lambda)$.

Teorema berikut ini mengenai ketaksamaan yang berlaku dalam iterasi tiga langkah pada pemetaan asimtotik non-ekspansif. Teorema ini memanfaatkan eksistensi titik tetap dan ketaksamaan Xu.

Teorema 3.2 *Jika X ruang Banach yang konveks seragam, $D \subseteq X$ tak kosong, tutup, terbatas, dan konveks, $T : D \rightarrow D$ asimtotik non-ekspansif, dan $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ adalah barisan yang didefinisikan oleh*

$$x_1 \in D \textit{ sebarang}$$
$$z_n = \gamma_n T^n x_n + (1 - \gamma_n) x_n$$
$$y_n = \beta_n T^n z_n + (1 - \beta_n) x_n$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1 - \alpha_n) x_n,$$
$$n \geq 1,$$

dengan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$, *dan* $\{\gamma_n\}$ *adalah barisan di* $[0,1]$, *maka terdapat* $M > 0$ *dan fungsi* $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *yang kontinu, naik tegas, dan konveks, dengan* $g(0) = 0$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *berlaku*

$$\alpha_n(1-\alpha_n)g(\|T^n y_n - x_n\|) \le \|x_n - s\|^2 - \|x_{n+1} - s\|^2 + M(k_n^2 - 1)$$

dan

$$\alpha_n\beta_n(1-\beta_n)g(\|T^n z_n - x_n\|) \le \|x_n - s\|^2 - \|x_{n+1} - s\|^2 + M(k_n^2 - 1),$$

dengan s *adalah titik tetap dari* T *dan* $\{k_n\}$ *barisan dengan* $li\ (k_n) = 1$ *dan* $k_n \ge k_{n+1}$.

Selanjutnya, teorema 3.2 ini mendasari lemma-lemma penting berikut ini.

Lemma 3.3 *Misalkan* X *ruang Banach yang konveks seragam,* $D \subseteq X$ *tak kosong, tutup, terbatas, dan konveks,* $T : D \to D$ *asimtotik non-ekspansif dengan barisan* $\{k_n\}$ *dimana* $li\ (k_n) = 1$, $k_n \ge k_{n+1}$, *dan* $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, *dan* $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ *adalah barisan yang didefinisikan oleh*

$$x_1 \in D \text{ sebarang}$$
$$z_n = \gamma_n T^n x_n + (1-\gamma_n)x_n$$
$$y_n = \beta_n T^n z_n + (1-\beta_n)x_n$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1-\alpha_n)x_n,$$
$$n \ge 1,$$

dengan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$, *dan* $\{\gamma_n\}$ *adalah barisan di* $[0,1]$.

Jika terdapat $a, b \in (0,1)$ *dan* $N_0 \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga* $a \le \alpha_n \le b$, *u s* $n \ge N_0$, *maka* $li\ (\|T^n y_n - x_n\|) = 0$

<u>Bukti</u> :

Berdasarkan teorema 3.2 dan untuk setiap $n \ge N_0$ berlaku

$$a(1-b)g(\|T^n y_n - x_n\|) \le \|x_n - s\|^2 - \|x_{n+1} - s\|^2 + M(k_n^2 - 1).$$

Dengan demikian, untuk $m > N_0$ diperoleh

$$\begin{aligned} a(1-b)\sum_{n=N_0}^{m} g(\|T^n y_n - x_n\|) &\le \sum_{n=N_0}^{m}\left(\|x_n - s\|^2 - \|x_{n+1} - s\|^2 + M(k_n^2 - 1)\right) \\ &\le \left|x_{N_0} - s\right|^2 - \|x_m - s\|^2 + M\sum_{n=N_0}^{m}(k_n^2 - 1) \\ &\le \left|x_{N_0} - s\right|^2 + M\sum_{n=N_0}^{m}(k_n^2 - 1). \end{aligned}$$

Diketahui $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, dengan menerapkan teorema nilai rata-rata [2] pada fungsi $f(x) = x^2 - 1$ pada interval $[0, k_n]$, untuk setiap bilangan asli n, maka berlaku juga $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n^2 - 1) < \infty$.

Jadi, untuk $m \to \infty$ berlaku

$$a(1-b)\sum_{n=N_0}^{\infty} g(\|T^n y_n - x_n\|) \leq \left\|x_{N_0} - s\right\|^2 + M\sum_{n=N_0}^{\infty}(k_n^2 - 1) < \infty .$$

Karena $a(1-b)\sum_{n=N_0}^{\infty} g(\|T^n y_n - x_n\|)$ konvergen, maka $\lim\left(g(\|T^n y_n - x_n\|)\right) = 0$.

Karena g naik keras, kontinu, dan $g(0) = 0$, maka $\lim(\|T^n y_n - x_n\|) = 0$.

■

Dengan cara serupa juga diperoleh lemma 3.4 sebagai berikut.

Lemma 3.4 *Misalkan X ruang Banach yang konveks seragam, $D \subset X$ tak kosong, tutup, terbatas, dan konveks, $T: D \to D$ asimtotik non-ekspansif dengan barisan $\{k_n\}$ dimana $\lim(k_n) = 1$, $k_n \geq k_{n+1}$, dan $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, dan $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ adalah barisan yang didefinisikan oleh*

$$x_1 \in D \text{ sebarang}$$
$$z_n = \gamma_n T^n x_n + (1-\gamma_n)x_n$$
$$y_n = \beta_n T^n z_n + (1-\beta_n)x_n$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1-\alpha_n)x_n,$$
$$n \geq 1 ,$$

dengan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$, dan $\{\gamma_n\}$ adalah barisan di $[0,1]$.

Jika terdapat $a, b, p \in (0,1)$ dan $N_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $a \leq \beta_n \leq b$ dan $\alpha_n > p$, untuk setiap $n \geq N_0$, maka $\lim(\|T^n z_n - x_n\|) = 0$

Selanjutnya, eksistensi dari limit barisan bilangan real $\{\|x_n - s\|\}$ ditunjukkan oleh sebuah lemma berikut ini.

Lemma 3.5 *Jika X ruang Banach yang konveks seragam, $D \subset X$ tak kosong, tutup, terbatas, dan konveks, $T: D \to D$ asimtotik non-ekspansif dengan barisan $\{k_n\}$ dimana $\lim(k_n) = 1$, $k_n \geq k_{n+1}$, dan $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, dan $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ adalah barisan yang didefinisikan oleh*

$x_1 \in D$ sebarang

$$z_n = \gamma_n T^n x_n + (1-\gamma_n)x_n$$
$$y_n = \beta_n T^n z_n + (1-\beta_n)x_n$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1-\alpha_n)x_n,$$
$$n \geq 1 ,$$

dengan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$, dan $\{\gamma_n\}$ adalah barisan di $[0,1]$, maka $\lim(\|x_n - s\|)$ ada.

Bukti :

Dari teorema 3.2, untuk semua $n \in \mathbb{N}$ berlaku ketaksamaan

$$\alpha_n(1-\alpha_n)g(\|T^n y_n - x_n\|) \leq \|x_n - s\|^2 - \|x_{n+1} - s\|^2 + M(k_n^2 - 1)$$
$$\Leftrightarrow \|x_{n+1} - s\|^2 + \alpha_n(1-\alpha_n)g(\|T^n y_n - x_n\|) \leq \|x_n - s\|^2 + M(k_n^2 - 1)$$

Karena $\alpha_n(1-\alpha_n)g(\|T^n y_n - x_n\|) \geq 0$ maka

$$\|x_{n+1} - s\|^2 \leq \|x_n - s\|^2 + M(k_n^2 - 1)$$

Sebelumnya, telah diketahui bahwa $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n^2 - 1) < \infty$.

Oleh karena itu, berdasarkan lemma 1 pada [19], diperoleh bahwa $\lim(\|x_n - s\|)$ ada.

■

Dengan ditambahkan lagi syarat, yaitu T kontinu lengkap sebagaimana definisi kontinu lengkap yang dijelaskan dalam [1,16], mengakibatkan barisan $\{x_n\}, \{y_n\}$, dan $\{z_n\}$ konvergen ke suatu titik tetap dari T.

Teorema 3.6 *Misalkan X ruang Banach yang konveks seragam, $D \subset X$ tak kosong, tutup, terbatas, dan konveks, $T : D \to D$ kontinu lengkap dan asimtotik non-ekspansif dengan barisan $\{k_n\}$ dimana $\lim(k_n) = 1$, $k_n \geq k_{n+1}$, dan $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, dan $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ adalah barisan yang didefinisikan oleh*

$$x_1 \in D \text{ sebarang}$$
$$z_n = \gamma_n T^n x_n + (1-\gamma_n)x_n$$
$$y_n = \beta_n T^n z_n + (1-\beta_n)x_n$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1-\alpha_n)x_n,$$
$$n \geq 1,$$

dengan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$, dan $\{\gamma_n\}$ adalah barisan di $[0,1]$. Jika terdapat $a, b, p, q \in (0,1)$ dan $N_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $a \leq \alpha_n \leq b$ dan $p \leq \beta_n \leq q$ untuk setiap $n \geq N_0$ maka $\{x_n\}, \{y_n\}$, dan $\{z_n\}$ konvergen ke suatu titik tetap dari T.

<u>Bukti</u> :

Dari lemma 3.3 dan 3.4, maka diketahui bahwa :

$$\lim(\|T^n y_n - x_n\|) = 0, \text{ dan}$$
$$\lim(\|T^n z_n - x_n\|) = 0$$

Diambil $\epsilon > 0$ sebarang maka terdapat $L_1 = L_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $\|T^n y_n - x_n\| < \epsilon$, untuk semua $n \geq L_1$, dan terdapat $L_2 = L_2(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $\|T^n z_n - x_n\| < \epsilon$, untuk semua $n \geq L_2$.

Kemudian dapat dipilih $L = \max\{L_1, L_2, N_0\}$ sehingga untuk semua $n \geq L$ berlaku

$$\begin{aligned}
\|T^n x_n - x_n\| &= \|T^n x_n - T^n y_n + T^n y_n - x_n\| \\
&\leq \|T^n x_n - T^n y_n\| + \|T^n y_n - x_n\| \\
&\leq k_n\|x_n - y_n\| + \|T^n y_n - x_n\| \\
&\leq k_n\|x_n - (\beta_n T^n z_n + (1-\beta_n)x_n\| + \|T^n y_n - x_n\| \\
&= k_n\|\beta_n x_n - \beta_n T^n z_n\| + \|T^n y_n - x_n\|
\end{aligned}$$

$$= k_n\beta_n\|x_n - T^n z_n\| + \|T^n y_n - x_n\|$$
$$\leq k_1\|x_n - T^n z_n\| + \|T^n y_n - x_n\|$$
$$< (1 + k_1)\epsilon\,.$$

Dengan demikian diperoleh $\lim\,(\|T^n x_n - x_n\|) = 0$.

Selanjutnya, untuk $n \geq L$ juga berlaku

$$\begin{aligned}
\|T^n x_{n+1} - x_{n+1}\| &= \|x_{n+1} - x_n + T^n x_n - T^n x_n + x_n - T^n x_{n+1}\| \\
&\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|T^n x_n - T^n x_{n+1}\| + \|x_n - T^n x_n\| \\
&\leq \|\alpha_n T^n y_n + (1 - \alpha_n)x_n - x_n\| + k_n\|x_{n+1} - x_n\| \\
&\quad + \|x_n - T^n x_n\| \\
&= \alpha_n\|T^n y_n - x_n\| + \alpha_n k_n\|T^n y_n - x_n\| + \|x_n - T^n x_n\| \\
&\leq (1 + k_1)\|T^n y_n - x_n\| + \|x_n - T^n x_n\| \\
&< 2(1 + k_1)\epsilon\,.
\end{aligned}$$

Jadi, $\lim\,(\|T^n x_{n+1} - x_{n+1}\|) = 0$.

Akhirnya, diperoleh bahwa untuk semua $n \geq L$ berlaku

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - Tx_{n+1}\| &\leq \|x_{n+1} + T^{n+1}x_{n+1} - T^{n+1}x_{n+1} + Tx_{n+1}\| \\
&\leq \|x_{n+1} - T^{n+1}x_{n+1}\| + \|T^{n+1}x_{n+1} - Tx_{n+1}\| \\
&\leq \|x_{n+1} - T^{n+1}x_{n+1}\| + k_1\|T^n x_{n+1} - x_{n+1}\| \\
&< (1 + k_1)\epsilon + 2k_1(1 + k_1)\epsilon\,.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, $\lim\,(\|Tx_{n+1} - x_{n+1}\|) = \lim\,(\|Tx_n - x_n\|) = 0$.

Karena T kontinu lengkap, maka terdapat barisan $\{x_{n_k}\}$ dari $\{x_n\}$ sedemikian sehingga $\{Tx_{n_k}\}$ konvergen, misalkan $x^* \in D$ dimana $\{Tx_{n_k}\} \to x^*$, dan karena $\lim\,(\|Tx_n - x_n\|) = 0$, maka $\{x_{n_k}\}$ juga konvergen ke x^*. Karena kekontinuan dari T dan karena $\{x_{n_k}\} \to x^*$, maka $\{Tx_{n_k}\} \to Tx^* = x^*$. Jadi, x^* adalah sebuah titik tetap dari T.

Selanjutnya, berdasarkan lemma 4.3.5, diketahui bahwa $\lim\,(\|x_n - x^*\|)$ ada. Sedangkan $\lim\left(\left\|x_{n_k} - x^*\right\|\right) = 0$ dimana $\left\{\left\|x_{n_k} - x^*\right\|\right\}$ dapat dipandang sebagai subbarisan dari $\{\|x_n - x^*\|\}$. Oleh karena itu, haruslah $\lim\,(\|x_n - x^*\|) = 0$. Artinya, $\{x_n\}$ konvergen ke suatu titik tetap x^* dari T.

Kemudian, karena

$$\|y_n - x_n\| \leq \beta_n\|T^n z_n - x_n\| \to 0, \text{ dan}$$
$$\|z_n - x_n\| \leq \beta_n\|T^n x_n - x_n\| \to 0,$$

maka $\{y_n\}$ dan $\{z_n\}$ juga konvergen ke x^*.

■

4. ITERASI TIGA LANGKAH PADA PEMETAAN ASIMTOTIK NON-EKSPANSIF DENGAN BEBERAPA KASUS KHUSUS

Pada iterasi tiga langkah, ketika $\gamma_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, maka $z_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian, langkah pertama pada iterasi tiga langkah tidak menghasilkan perubahan titik. Jadi, untuk kasus $\gamma_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ berlaku iterasi seperti berikut :

$$x_1 \in D \text{ sebarang}$$
$$y_n = \beta_n T^n x_n + (1 - \beta_n) x_n$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1 - \alpha_n) x_n,$$
$$n \geq 1,$$

dengan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$, dan $\{\gamma_n\}$ adalah barisan di $[0, 1]$. Teorema berikut ini menjelaskan kekonvergenan barisan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ yang diperoleh dari iterasi di atas.

Teorema 4.1 *Misalkan X ruang Banach yang konveks seragam, $D \subset X$ tak kosong, tutup, terbatas, dan konveks, $T : D \to D$ kontinu lengkap dan asimtotik non-ekspansif dengan barisan $\{k_n\}$ dimana $\lim (k_n) = 1$, $k_n \geq k_{n+1}$, dan $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$, dan $\{x_n\}, \{y_n\}$ adalah barisan yang didefinisikan oleh*

$$x_1 \in D \text{ sebarang}$$
$$y_n = \beta_n T^n x_n + (1 - \beta_n) x_n$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1 - \alpha_n) x_n,$$
$$n \geq 1,$$

dengan $\{\alpha_n\}$ dan $\{\beta_n\}$ adalah barisan di $[0, 1]$. Jika terdapat $a, b \in (0,1)$ dan $N_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $a \leq \alpha_n \leq b$ dan $k_n \beta_n < 1$ untuk setiap $n \geq N_0$ maka $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ konvergen ke suatu titik tetap dari T.

Bukti :

Karena terdapat $a, b \in (0,1)$ dan $N_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $a \leq \alpha_n \leq b$ untuk setiap $n \geq N_0$, maka berdasarkan lemma 4.3.3, dengan $\{\gamma_n\} = \{0\}$, berlaku

$$\lim(\|T^n y_n - x_n\|) = 0.$$

Dengan mengambil $\epsilon > 0$ sebarang, maka dapat ditemukan $H = H(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq H$ berlaku $\|T^n y_n - x_n\| < \epsilon$. Jadi, untuk $n \geq \max\{N_0, H\}$ berlaku

$$\begin{aligned}
\|x_n - y_n\| &= \beta_n \|T^n x_n - x_n\| \\
&\leq \beta_n (\|T^n y_n - x_n\| + \|T^n x_n - T^n y_n\|) \\
&\leq \beta_n (\|T^n y_n - x_n\| + k_n \|x_n - y_n\|) \\
&= \beta_n \|T^n y_n - x_n\| + \beta_n k_n \|x_n - y_n\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad \|x_n - y_n\| - \beta_n k_n \|x_n - y_n\| &\le \beta_n \|T^n y_n - x_n\| < \|T^n y_n - x_n\| \\ \Leftrightarrow \quad (1 - \beta_n k_n)\|x_n - y_n\| &< \epsilon \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

dan

$$1 - \beta_n k_n > 0\,.$$

Jadi, disimpulkan bahwa $\lim (\|x_n - y_n\|) = 0$ dan diperoleh

$$\lim (\|T^n x_n - x_n\|) = 0.$$

Selanjutnya, untuk $n \ge \max\{N_{\epsilon}, H\}$ juga berlaku

$$\begin{aligned} \|T^n x_{n+1} - x_{n+1}\| &= \|x_{n+1} - x_n + T^n x_n - T^n x_n + x_n - T^n x_{n+1}\| \\ &\le \|x_{n+1} - x_n\| + \|T^n x_n - T^n x_{n+1}\| + \|x_n - T^n x_n\| \\ &\le \|\alpha_n T^n y_n + (1 - \alpha_n) x_n - x_n\| + k_n \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\quad + \|x_n - T^n x_n\| \\ &= \alpha_n \|T^n y_n - x_n\| + \alpha_n k_n \|T^n y_n - x_n\| + \|x_n - T^n x_n\| \\ &\le (1 + k_1)\|T^n y_n - x_n\| + \|x_n - T^n x_n\| \\ &< 2(1 + k_1)\epsilon\,. \end{aligned}$$

Jadi, $\lim \ (\|T^n x_{n+1} - x_{n+1}\|) = 0$.

Akhirnya, diperoleh bahwa untuk semua $n \ge \max\{N_{\epsilon}, H\}$ berlaku

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - T x_{n+1}\| &\le \|x_{n+1} + T^{n+1} x_{n+1} - T^{n+1} x_{n+1} + T x_{n+1}\| \\ &\le \|x_{n+1} - T^{n+1} x_{n+1}\| + \|T^{n+1} x_{n+1} - T x_{n+1}\| \\ &\le \|x_{n+1} - T^{n+1} x_{n+1}\| + k_1 \|T^n x_{n+1} - x_{n+1}\| \\ &< (1 + k_1)\epsilon + 2k_1(1 + k_1)\epsilon\,. \end{aligned}$$

Dengan demikian, $\lim \ (\|T x_{n+1} - x_{n+1}\|) = \lim (\|T x_n - x_n\|) = 0\,$.

Karena T kontinu lengkap, maka terdapat barisan $\{x_{n_k}\}$ dari $\{x_n\}$ sedemikian sehingga $\{T x_{n_k}\}$ konvergen, misalkan $x^* \in D$ dimana $\{T x_{n_k}\} \to x^*$, dan karena $\lim (\|T x_n - x_n\|) = 0$, maka $\{x_{n_k}\}$ juga konvergen ke x^*. Karena kekontinuan dari T dan $\{x_{n_k}\} \to x^*$, maka $\{T x_{n_k}\} \to T x^* = x^*$. Jadi, x^* adalah sebuah titik tetap dari T.

Selanjutnya, berdasarkan lemma 4.3.5, diketahui bahwa $\lim (\|x_n - x^*\|)$ ada. Sedangkan $\lim \left(\left\|x_{n_k} - x^*\right\|\right) = 0$ dimana $\left\{\left\|x_{n_k} - x^*\right\|\right\}$ dapat dipandang sebagai subbarisan dari $\{\|x_n - x^*\|\}$. Oleh karena itu, haruslah $\lim (\|x_n - x^*\|) = 0$. Artinya, $\{x_n\}$ konvergen ke suatu titik tetap x^* dari T.

Kemudian, karena

$$\|y_n - x_n\| \le \beta_n \|T^n x_n - x_n\|,$$

maka $\{y_n\}$ juga konvergen ke x^*.

■

Adapun teorema selanjutnya menjelaskan iterasi tiga langkah pada pemetaan asimtotik non-ekspansif ketika $\gamma_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ dan $\beta_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.2 *Misalkan X ruang Banach yang konveks seragam, $D \subset X$ tak kosong, tutup, terbatas, dan konveks, $T: D \to D$ kontinu lengkap dan asimtotik non-ekspansif dengan barisan $\{k_n\}$ dimana $\lim (k_n) = 1$, $k_n \geq k_{n+1}$, dan $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, dan $\{x_n\}$ adalah barisan yang didefinisikan oleh*

$$x_1 \in D \text{ sebarang}$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T^n x_n + (1 - \alpha_n)x_n,$$
$$n \geq 1,$$

dengan $\{\alpha_n\}$ adalah barisan di $[0,1]$. Jika terdapat $a, b \in (0,1)$ dan $N_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $a \leq \alpha_n \leq b$ untuk setiap $n \geq N_0$ maka $\{x_n\}$ konvergen ke suatu titik tetap dari T.

Selanjutnya, dibahas mengenai kekonvergenan barisan yang diperoleh dari iterasi tiga langkah pada ruang Banach yang konveks seragam dan berdimensi hingga. Diketahui bahwa ruang Euclid berdimensi-n $(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Banach yang konveks seragam [5].

Dengan demikian, kriteria konveks seragam dan berdimensi hingga bukanlah dua kriteria yang saling bertentangan. Dengan memanfaatkan sifat kekompakan, dapat diperoleh lemma berikut ini.

Lemma 4.3 *Misalkan X ruang Banach yang konveks seragam dan berdimensi hingga, $D \subset X$ tak kosong, tutup, terbatas, dan konveks, $T: D \to D$ kontinu dan asimtotik non-ekspansif dengan barisan $\{k_n\}$ dimana $\lim (k_n) = 1$, $k_n \geq k_{n+1}$, dan $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, dan $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ adalah barisan yang didefinisikan oleh*

$$x_1 \in D \text{ sebarang}$$
$$z_n = \gamma_n T^n x_n + (1 - \gamma_n)x_n$$
$$y_n = \beta_n T^n z_n + (1 - \beta_n)x_n$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1 - \alpha_n)x_n,$$
$$n \geq 1,$$

dengan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$, dan $\{\gamma_n\}$ adalah barisan di $[0,1]$. Jika terdapat $a, b, p, q \in (0,1)$ dan $N_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $a \leq \alpha_n \leq b$ dan $p \leq \beta_n \leq q$ u s $n \geq N_0$ maka $\{x_n\}, \{y_n\}$, d $\{z_n\}$ konvergen ke suatu titik tetap dari T.

<u>Bukti</u> :

Karena X ruang Banach berdimensi hingga, berdasarkan teorema kekompakan [13], $\overline{R(T)} \subset D$ kompak di X. Dengan demikian, T kontinu dan memetakan D yang terbatas ke himpunan yang kompak relatif. Jadi, T kontinu lengkap. Selanjutnya, berdasarkan teorema 3.6, maka diperoleh $\{x_n\}, \{y_n\}$, dan $\{z_n\}$ konvergen ke suatu titik tetap dari T.

■

Dengan argumen yang serupa, kekonvergenan menuju titik tetap dari T juga terjadi pada iterasi tiga langkah yang direduksi, yaitu iterasi sebagaimana pada lemma 4.1 dan 4.2. Dengan demikian, lemma-lemma berikut ini berlaku.

Lemma 4.4 *Misalkan X ruang Banach yang konveks seragam dan berdimensi hingga, $D \subset X$ tak kosong, tutup, terbatas, dan konveks, $T: D \rightarrow D$ kontinu dan asimtotik non-ekspansif dengan barisan $\{k_n\}$ dimana $\lim(k_n) = 1$, $k_n \geq k_{n+1}$, dan $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, dan $\{x_n\}, \{y_n\}$ adalah barisan yang didefinisikan oleh*

$$x_1 \in D \text{ sebarang}$$
$$y_n = \beta_n T^n x_n + (1 - \beta_n)x_n$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1 - \alpha_n)x_n,$$
$$n \geq 1,$$

dengan $\{\alpha_n\}$ dan $\{\beta_n\}$ adalah barisan di $[0,1]$. Jika terdapat $a, b \in (0,1)$ dan $N_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $a \leq \alpha_n \leq b$ dan $k_n\beta_n < 1$ untuk setiap $n \geq N_0$ maka $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ konvergen ke suatu titik tetap dari T.

Lemma 4.5 *Misalkan X ruang Banach yang konveks seragam dan berdimensi hingga, $D \subset X$, tak kosong, tutup, terbatas, dan konveks, $T: D \rightarrow D$ kontinu dan asimtotik non-ekspansif dengan barisan $\{k_n\}$ dimana $\lim(k_n) = 1$, $k_n \geq k_{n+1}$, dan $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$, dan $\{x_n\}$ adalah barisan yang didefinisikan oleh*

$$x_1 \in D \text{ sebarang}$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T^n x_n + (1 - \alpha_n)x_n,$$
$$n \geq 1,$$

dengan $\{\alpha_n\}$ adalah barisan di $[0,1]$. Jika terdapat $a, b \in (0,1)$ dan $N_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $a \leq \alpha_n \leq b$ untuk setiap $n \geq N_0$ maka $\{x_n\}$ konvergen ke suatu titik tetap dari T.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Alexanderian, A. (2013). *On Compact Operators.* Texas: tidak diterbitkan.

[2] Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction To Real Analysis Third Edition.* Urbana: John Wiley & Sons, Inc.

[3] Browder, A. (1996). *Mathematical Analysis An Introduction.* New York: Springer-Verlag.

[4] Chidume, C. (2009). *Geometric Properties of Banach Spaces and Non Linier Iterations.* London: Springer-Verlag.

[5] Clarkson, J. A. (1936). Uniformly Convex Spaces. *Trans. AMS*, 396-414.

[6] Goebel, K., & Kirk, W. (1972). A Fixed Point Theorm for Asymptotically Nonexpansive Mappings. *Proceedings of The American Mathematical Society*, 171-174.

[7] Goldberg, R. (1976). *Methods of Real Analysis Second Edition.* Toronto: John Wiley & Sons, Inc.

[8] Gozali, S. M. (2010). *Pengantar Analisis Fungsional.* Bandung: tidak diterbitkan.

[9] Handayani, N. (2006). *Teorema Titik Tetap di Ruang Banach dan Aplikasinya pada Bidang Ekonomi (Skripsi).* Bogor: IPB.

[10] Hewwit, E., & Stromberg, K. (1969). *Real and Abstract Analysis.* Berlin: Springer-Verlag.

[11] Istratescu, V. I. (1979). *Fixed Point Theory*. D. Reidel Publishing Company.

[12] Kirk, W. A. (1965). A Fixed Point Theorm Which Are Not Increase Distance. *American Math Monthly, 72*(32), 1004-1006.

[13] Kreyzig, E. (1978). *Introduction to Functional Analysis and Its Applications.* New York: John Wiley and Sons.

[14] Osilike, M., & Aniagbosor, S. (2000). Weak and Strong Convergence Theorems for Fixed Points of Asymptotically Nonexpansive Mappings. *Mathematical and Computer Modelling, 32*, 1180-1191.

[15] Pata, V. (2014). *Fixed Point Theorems and Applications.* Milan: tidak diterbitkan.

[16] Precup, R. (2002). *Methods in Nonlinear Integral Equations.* Springer Netherlands.

[17] Royden, H. (1967). *Real Analysis Third Edition.* New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

[18] Schu, J. (1991). Weak and Strong Convergence To Fixed Points of Asymptotically Nonexpansive Mappings. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 153-159.

[19] Tan, K. K., & Xu, H. K. (1993). Approximating Fixed Points of Nonexpansive Mappings by The Ishikawa Iteration Process. *Journal of Math. Anal. and App.*, 301-308.

[20] Tan, K.K., & Xu, H.K. (1994). Fixed Point Iteration Processes for Asymptotically Nonexpansive Mappings. *Proceedings of The Am. Math. Soc.*, *122*, 733-739.

[21] Xu, B., & Noor, M. (2002). Fixed-Point Iterations for Asymptotically Nonexpansive Mappings in Banach Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *267*, 444-453.

[22] Xu, H. (1991). Inequality in Banach Spaces with Application. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, *16*(12), 1127-1138.

<table>
<tr><td>Judul Artikel :</td><td colspan="2">Iterasi Tiga Langkah pada Pemetaan Asimtotik Non-Ekspansif</td></tr>
<tr><td>Mahasiswa Penulis :</td><td colspan="2">Agung Anggoro (1200053)</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Bandung, Juni 2016
Penulis Penanggung Jawab,</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Siti Fatimah, S.Pd., M.Si., Ph.D.</td><td align="center">Dra. Encum Sumiaty, M.Si.</td></tr>
</table>