APERIODICITY PADA GRAF-k

Firda Bilqis Azizah H., Rizky Rosjanuardi, Isnie Yusnitha

Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI

*Surel: firda.bilqis@student.upi.edu

ABSTRAK. Diberikan suatu graf-k Λ berhingga baris tanpa *sources* . Sebagai analogi dari graf berarah E untuk dimensi yang lebih tinggi, dapat dikonstruksi suatu aljabar-C^* $C^*(\Lambda)$ yang dibangun oleh keluarga Cuntz-Krieger Λ. Pada tulisan ini, akan dibahas konsep kondisi *aperiodicity* pada graf-k Λ berhingga baris tanpa *sources* dan kaitannya dengan struktur ideal dari aljabar-C^* $C^*(\Lambda)$.

Kata kunci: graf-k, berhingga baris, tanpa *sources*, aljabar graf-k, *aperiodicity*, ideal.

ABSTRACT. Given a row-finite k-graph Λ with no sources. As a higher-dimensional analogue of directed graphs E, we can construct a C^*-algebra $C^*(\Lambda)$ called as C^*-algebra $C^*(\Lambda)$ generated by a Cuntz-Krieger Λ-family. In this study, we discuss about aperiodicity condition on a row-finite k-graph Λ with no source and its consequence to the ideal structure of a C^*-algebra $C^*(\Lambda)$.

Key words: row-finite, k-graph, no sources, k-graph algebra, aperiodicity, ideal.

1. PENDAHULUAN

Aljabar graf merupakan aljabar-C^* yang dibangun oleh operator-operator pada ruang Hilbert $\mathcal{H}$ yang merepresentasikan graf berarah. Teorema-teorema fundamentalnya telah lebih dulu dikaji dan dibuktikan oleh Enomoto dan Watatani [9]. Pada 1997-1998 Kumjian, Pask, Raeburn, dan Renault [13], dan Kumjian, Pask, dan Raeburn [12] mulai mengulas kembali kajian aljabar graf pada graf berarah. Kajian ini terus berkembang dan terbagi ke dalam dua rumpun yaitu aljabar lintasan Leavitt dan aljabar graf-k.

Kajian mengenai Aljabar lintasan Leavitt pertama kali diperkenalkan oleh Abrams dan Pino [1], dan sejak saat itu penelitian tentang aljabar lintasan Leavitt terus berkembang [1, 2, 3, 4, 14, 26, 27]. Salah satu arah pengembangan kajian aljabar lintasan Leavitt adalah diperkenalkannya konsep aljabar Kumjian-Pask dalam [15]. Konsep aljabar Kumjian-Pask ini selanjutnya mulai menarik perhatian peneliti lain untuk dikembangkan di antaranya dalam [6, 7, 23, 24, 28].

Sedangkan teori aljabar graf-k diperkenalkan pertama kali oleh Kumjian dan Pask [11] sebagai generalisasi dari kajian sebelumnya yang dilakukan oleh Robertson & Steger [21, 22], penelitian ini menggunakan pendekatan graf-k sebagai graf berarah dengan order lebih tinggi. Aljabar graf-k kemudian dikaji dan dikembangkan oleh banyak peneliti pada kelas-kelas yang berbeda sejak tahun 2000 sampai sekarang, diantaranya [8, 10, 16, 17, 18, 19, 20].

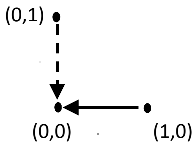
Pada tahun 2014, Kang dan Pask [10] mengkaji ruang ideal primitif dari graf-k berhingga baris tanpa *sources* melalui konsep *aperiodicity condition*. Pemahaman struktur ideal aljabar-C^* dari graf-k berhingga baris tanpa sources melalui konsep aperiodicity ini pertama kali diperkenalkan oleh [11] dan dikembangkan secara signifikan oleh [19]. Kajian ini menarik sebab di bawah hipotesis *aperiodicity*, struktur ideal dari $C^*(\Lambda)$-nya dapat dipahami dengan baik. Dalam artikel ini, penulis akan membahas lebih lanjut struktur ideal dari aljabar-C^* pada graf-k berhingga baris tanpa *sources*.

2. ALJABAR GRAF-k

Sebuah graf-k terdiri dari sebuah kategori Λ yang terhitung (dengan r sebagai *range* dan s sebagai *source*) dilengkapi sebuah *functor* $d: \Lambda \to \mathbb{N}^k$ yaitu pemetaan derajat yang memenuhi aturan faktorisasi: untuk setiap morfisma $\lambda \in \Lambda$ dan $m, n \in \mathbb{N}^k$ dengan $d(\lambda) = m + n$, terdapat secara tunggal pasangan $\mu, \nu \in \Lambda$ sedemikian sehingga $\lambda = \mu$ dan $d(\mu) = m,\ d(\nu) = n$.

Graf-k atau cukup ditulis Λ dikatakan memiliki berhingga baris jika himpunan lintasan berderajat m dengan *range* v yang dinotasikan dengan $v\Lambda^m$-nya berhingga untuk setiap $m \in \mathbb{N}^k$ dan $v \in \Lambda^0$, dan dikatakan tanpa *sources* jika $v\Lambda^{e_i} \neq \emptyset$ untuk setiap $v \in \Lambda^0$ dan e_i di mana $i \in \{1, \dots, k\}$ menyatakan banyak warna yang berbeda pada graf Λ.

Suatu graf-k dapat divisualisasi melalui sebuah kerangka-1 (1-*skeleton*), yang tidak lain merupakan graf berarah berwarna $(\Lambda^0, \bigcup_{i=1}^{k} \Lambda^{e_i}, r, s)$ di mana Λ^0 merupakan himpunan simpul, $\bigcup_{i=1}^{k} \Lambda^{e_i}$ merupakan himpunan sisi berderajat e_i yang ditandai dengan warna berbeda, dan pemetaan *range* r dan *source* s-nya mewarisi sifat Λ. Pada tulisan ini, setiap sisi yang digambar dengan garis putus-putus memiliki derajat (0,1) dinotasikan dengan e_1 dan didefinisikan sebagai 'merah', sementara sisi lainnya memiliki derajat (1,0) dinotasikan dengan e_2, didefinisikan sebagai 'hitam'.



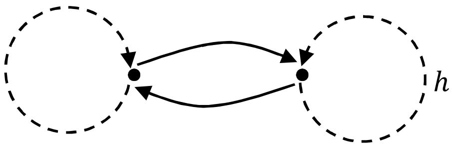
Gambar 2.1. Kerangka-1 dengan Graf-1

Perhatikan graf diatas. Lintasan λ memiliki derajat (1,0) dan lintasan μ memiliki derajat (0,1). Cara serupa dapat digunakan untuk memahami kerangka-1 dengan derajat lebih tinggi.

Banyaknya warna pada kerangka-1 tidak selalu berhubungan dengan graf Λ. Sebuah kerangka-1 bisa saja berkorespondensi dengan banyak graf Λ atau mungkin tidak sama sekali. Oleh karena itu, kerangka-1 saja tidak cukup untuk menentukan suatu graf Λ. Ada atau tidaknya graf Λ yang berkorespondensi dengan kerangka-1 ditentukan oleh aturan faktorisasi, yang dalam hal ini berkaitan dengan lintasan k-warna dan persegi k-warna.

Elemen-elemen dari Λ^n dapat diinterpretasikan sebagai diagram dua arah (bolak-balik) berderajat n yang disebut persegi dwiwarna di mana morfisma-morfismanya bersesuaian dengan sisi-sisi di kerangka-1 yang telah diberikan, yang selanjutnya disebut lintasan dwiwarna. Karenanya, diberikan kerangka-1 E dari Λ dan koleksi persegi dwiwarna S, terdapat paling banyak satu graf-k dengan kerangka-1 E dan persegi dwiwarna S. Untuk k=2, kondisi ini cukup untuk menentukan suatu graf Λ. Jika kondisi ini dipenuhi, maka akan selalu terdapat tepat satu graf-2 dengan kerangka-1 dan persegi dwiwarna S [25].

Contoh 2.1. Kerangka-1 yang Berkoresponden dengan Tepat Satu Graf-k [17]



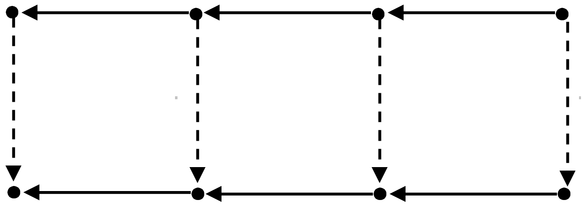
Gambar 2.2. Kerangka-1 dengan Tepat Sebuah Graf Λ

Berdasarkan kerangka-1 di atas, akan ditunjukkan terdapat tepat satu graf-2 Λ.

Lintasan dwiwarna dari u ke v yang diperoleh dari kerangka diatas adalah $(e,f),(f,g),(g,h)(h,e)$. Karena tidak ada lintasan dwiwarna lain, maka persegi dwiwarna yang mungkin didapat adalah

$$S=\{\{(h,e),(e,f)\},\{(f,g),(g,h)\}\}$$

Karena $k = 2$, pilihan ini secara otomatis mengarah ke sebuah graf-2 tunggal dengan kerangka-1 E dan persegi dwiwarna S. Oleh karena itu, terdapat sebuah elemen tunggal λ ∈ $u\Lambda^{(3,1)}v$ yang bersesuaian dengan diagram dua-arah dibawah:



Gambar 2.3. Diagram Dua Arah

Dari diagram di atas diperoleh faktorisasi dari λ sebagai berikut:

$$\lambda = g \quad h = g \quad h = ghe \quad = f$$

Keluarga Cuntz-Krieger Λ di aljabar-C^* B terdiri dari keluarga isometri parsial $\{t_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ yang memenuhi relasi Cuntz-Krieger sebagai berikut:

1. $\{t_v : v \in \Lambda^0\}$ adalah proyeksi-proyeksi yang saling ortogonal,
2. $t_\lambda t_\mu = t_\lambda$ untuk setiap $\lambda, \mu \in \Lambda$ dengan $s(\lambda) = r(\mu)$,
3. $t_\lambda^* t_\lambda = t_{s(\lambda)}$,
4. $t_v = \sum_{\{\lambda \in v\Lambda^m\}} t_\lambda t_\lambda^*$ untuk setiap $v \in \Lambda^0$ dan $m \in \mathbb{N}^k$.

Lemma 2.2 [16]

Misalkan Λ adalah graf berhingga baris tanpa *sources*, dan $T = \{t_\lambda\}$ adalah keluarga Cuntz-Krieger Λ, maka untuk setiap $\lambda, \mu \in \Lambda$ dan $q \geq d(\lambda) \vee d(\mu)$, diperoleh:

$$T_\lambda^* T_\mu = \sum_{\{\alpha \in \Lambda^{q-d(\lambda)}, \beta \in \Lambda^{q-d(\mu)} : \lambda \quad = \mu \quad\}} T_\alpha T_\beta^*$$

Persamaan ini dapat dituliskan sebagai jumlah berhingga dari isometri-isometri parsial $T_\alpha T_\beta^*$ yang merentang suatu subaljabar-∗ dari $C^*(\Lambda)$, sedemikian sehingga diperoleh:

Akibat 2.3 [16]

Misalkan Λ adalah graf berhingga baris tanpa *sources*, dan $T = \{t_\lambda\}$ adalah keluarga Cuntz-Krieger Λ, maka

$$C^*(T) = C^*(\{t_\lambda\}) = \overline{\text{span}}\{t_\lambda t_\mu^* : \lambda, \mu \in \Lambda^*\}$$

Dengan menggunakan **Akibat 2.3** ini, dapat dikonstruksi sebuah aljabar graf pada graf-k berhingga baris tanpa *sources* seperti halnya pada graf berarah, dinotasikan dengan aljabar-C^* $C^*(\Lambda)$ yang dibangun oleh suatu keluarga Cuntz-Krieger Λ universal $\{t_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ dengan $t_\lambda \neq 0$ untuk setiap $\lambda \in \Lambda$ pada suatu ruang Hilbert yang *separable*.

Proposisi 2.4 [16]
Misalkan Λ adalah graf berhingga baris tanpa *sources*. Maka terdapat sebuah aljabar-C^* $C^*(\Lambda)$ yang dibangun oleh keluarga Cuntz-Krieger Λ $\{s_\lambda\}$ sedemikian sehingga untuk setiap keluarga Cuntz-Krieger Λ $\{t_\lambda\}$ di aljabar-C^* B, terdapat homomorfisma $\pi_t : C^*(\Lambda) \to B$ yang memenuhi $\pi_t(S_\lambda) = t_\lambda$ untuk setiap $\lambda \in \Lambda$. Aljabar-C^* $C^*(\Lambda)$ ini disebut aljabar-C^* dari Λ.

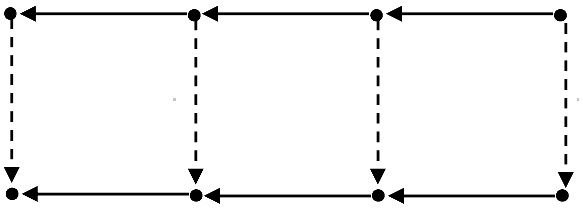
3. STRUKTUR IDEAL

Definisi 3.1: Tidak Memiliki *Local Periodicity* [10]
Misalkan Λ adalah suatu graf-k berhingga baris tanpa *sources*. Graf Λ dikatakan tidak memuat *local periodicity* pada $v \in \Lambda^0$ jika untuk setiap pasangan $m \neq n \in \mathbb{N}^k$, terdapat sebuah lintasan $\lambda \in v\Lambda$ sedemikian sehingga $d(\lambda) \geq m \vee n$ dan

$$\lambda(m, m + d(\lambda) - (m \vee n)) \neq \lambda(n, n + d(\lambda) - (m \vee n))$$

Contoh 3.2. Simpul yang Tidak Memuat Local Periodicity

Misalkan terdapat suatu lintasan $\lambda \in a\Lambda$ dengan $s(\lambda) = x$ berderajat $d(\lambda) = (3,1)$ pada graf berikut:



Gambar 3.1. Graf Λ berderajat (3,1)

- untuk $m = (3,0)$, dan $n = (0,1)$ terdapat lintasan $\lambda = j_i\ hi$, di mana
  $d(\lambda) = (3,1) \geq (3,0) \vee (0,1) = (3,1)$,
  $\lambda\big((3,0), (3,0) + (3,1) - (3,1)\big] = \lambda\big((3,0), (3,0)\big]$,

$\lambda\big((0,1),(0,1)+(3,1)-(3,1)\big) = \lambda\big((0,1),(0,1)\big)$.
Jadi $\lambda\big((3,0),(3,0)\big) \neq \lambda\big((0,1),(0,1)\big)$

- untuk $m = (1,0)$, dan $n = (2,1)$, terdapat lintasan $\lambda = n \;\; hi$, di mana
  $d(\lambda) = (3,1) \geq (1,0) \vee (2,1) = (2,1)$,
  $\lambda\big((1,0),(1,0)+(3,1)-(2,1)\big) = \lambda\big((1,0),(2,0)\big)$,
  $\lambda\big((2,1),(2,1)+(3,1)-(2,1)\big) = \lambda\big((2,1),(3,1)\big)$.
  Jadi $\lambda\big((1,0),(2,0)\big) \neq \lambda\big((2,1),(3,1)\big)$
- untuk $m = (1,1)$, dan $n = (2,0)$, terdapat lintasan $\lambda = n \;\; hi$, di mana
  $d(\lambda) = (3,1) \geq (1,1) \vee (2,0) = (2,1)$,
  $\lambda\big((1,1),(1,1)+(3,1)-(2,1)\big) = \lambda\big((1,1),(2,1)\big)$,
  $\lambda\big((2,0),(2,0)+(3,1)-(2,1)\big) = \lambda\big((2,0),(3,0)\big)$.
  Jadi $\lambda\big((1,1),(2,1)\big) \neq \lambda\big((2,0),(3,0)\big)$.

Berdasarkan uraian di atas, dapat ditunjukkan bahwa tidak terdapat *local periodicity* pada $a \in \Lambda^0$. ■

Definisi 3.3: *Aperiodic* [10]
Sebuah graf Λ dikatakan *aperiodic* atau memenuhi kondisi *aperiodicity* jika setiap simpulnya tidak memuat *local periodicity*.

Definisi 3.4: *Saturated* dan *Hereditary* [10]
Misalkan Λ suatu graf-k berhingga baris tanpa *sources*. Definisikan sebuah relasi $\leq$ pada Λ^0 oleh $v \leq w$ jika dan hanya jika $v\Lambda w \neq \emptyset$

a. Sebuah subset H di Λ^0 dikatakan *hereditary* jika $v \in H$ dan $v \leq w$ menyebabkan $w \in H$
b. Sebuah subset H di Λ^0 dikatakan *saturated* jika untuk setiap $v \in \Lambda^0$,
$$r^{-1}(v) \neq \emptyset \text{ dan}$$
$$\{s(\lambda): \lambda \in v\Lambda^{e_i}\} \subset H \text{ untuk suatu } i \in \{1,\ldots,k\} \Rightarrow v \in H$$

Saturation dari himpunan H dinotasikan dengan $\overline{H}$ adalah subhimpunan *saturated* terkecil dari Λ^0 yang memuat H.

Definisi 3.5: *Strong Aperiodicity* [10]
Misalkan Λ sebuah graf-k berhingga baris tanpa *sources* dan $H \subsetneq \Lambda^0$ merupakan subhimpunan dari Λ^0 yang saturated dan hereditary. Definisikan
$$\Gamma(\Lambda \backslash H) \coloneqq (\Lambda^0 \backslash H, \{\lambda \in \Lambda: s(\lambda) \notin H\}, r, s).$$
Graf Λ dikatakan *strongly aperiodic* jika $\Gamma(\Lambda \backslash H)$ memenuhi kondisi *aperiodicity* untuk semua subhimpunan H.

Catatan [10]

Misalkan $C^*(\Lambda)$ suatu aljabar-C^* untuk suatu graf Λ berhingga baris tanpa *sources*. Untuk suatu ideal I di $C^*(\Lambda)$, misalkan $H_I = \{v \in \Lambda^0 : t_v \in I\}$. Selain itu, untuk setiap subhimpunan H di Λ^0, I_H menotasikan ideal di $C^*(\Lambda)$ yang dibangun oleh $\{t_v : v \in H\}$. Maka, sesuai [5, Lemma 4.3] dapat ditunjukkan bahwa untuk suatu subhimpunan *saturated hereditary* H di Λ,

$$I_H = \overline{\text{span}}\{t_\alpha t_\beta^* : \alpha, \beta \in \Lambda \text{ dan } s(\alpha) = s(\beta) \in \overline{H}\}$$

Lebih khusus, I_H dikatakan *gauge invariant* dalam hal $\gamma_z(a) = a$ untuk setiap a □ I_H dan z □ $\mathbb{T}^k$. Lebih lanjut, setiap ideal *gauge invariant* akan berbentuk seperti tersebut diatas. Teorema dibawah ini memberikan deskripsi lengkap mengenai ideal-ideal *gauge invariant* dari $C^{□}(\Lambda)$.

Teorema 3.6 [10]

Misalkan (Λ, d) adalah suatu graf-k berhingga baris tanpa *sources*, H adalah subhimpunan dari Λ^0, dan I suatu ideal di $C^{□}(\Lambda)$. I_H dan H_I didefinisikan sebagai berikut.

1. Jika I adalah ideal *gauge invariant* taknol dari $C^{□}(\Lambda)$, maka H_I adalah himpunan tak kosong yang *saturated* dan *hereditary*, dan $I = I_{H_I}$.
2. Jika H adalah sebuah subhimpunan *saturated* dan *hereditary* dari Λ^0 dan I_H adalah ideal yang terkait, maka $H = H_{I_H}$.
3. Pemetaan $H \to I_H$ sebuah isomorfisma dari *lattice of* subhimpunan *saturated* dan *hereditary* dari Λ^0 ke *lattice of* ideal-ideal *gauge invariant* tutup dari $C^{□}(\Lambda)$.
4. Misalkan $H \neq \Lambda^0$ *saturated* dan *hereditary*, maka
$$\Gamma(\Lambda \backslash H) = (\Lambda^0 \backslash H, \{\lambda □ \Lambda : s(\lambda) □ H\}, r, s)$$
adalah graf-k berhingga baris tanpa *sources*, dan $C^{□}(\Lambda)/I_H$ isomorfik secara kanonik ke $C^{□}(\Gamma(\Lambda \backslash H))$

Catatan: Subhimpunan Λ^0, □ selalu *saturated* dan *hereditary* berdasarkan ideal trivial $C^{□}(\Lambda)$, $\{0\}$ dari $C^{□}(\Lambda)$.

Aidan Sims dan David Robertson [19] telah mengkaji bahwa setiap ideal dari aljabar-$C^{□}$ $C^{□}(\Lambda)$ adalah *gauge invariant*. Selanjutnya, melalui konsep *aperiodicity*, proposisi ini menunjukkan bahwa jika graf A berhingga baris tanpa *sources* nya *strongly aperiodic*, maka ideal-idealnya *gauge invariant.*

Proposisi 3.7 [10]

Misalkan Λ suatu graf-k berhingga baris tanpa *sources* yang *strongly aperiodic*, maka semua ideal-ideal dari $C^{□}(\Lambda)$-nya *gauge invariant.*

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Abrams, G., & Pino, G. A. (2005). The Leavitt Path Algebra of A Graph. *Journal of Algebra*, 319-334.

[2] Abrams, G., & Pino, G. A. (2007). Purely Infinite Simple Leavitt Path Algebras. *J. Pure Appl. Algebra, 207*, 553-563.

[3] Abrams, G., & Pino, G. A. (2008). The Leavitt Path Algebras of Arbitrary Graphs. *Houston J. Math, 34*, 423-442.

[4] Ara, P., Moreno, M., & Pardo, E. (2007). Nonstable K-theory for Graph Algebras. *Algebr.Represent. Theory, 10*, 157-178.

[5] Bates, T., Pask, D., Raeburn, I., & Szymanski, W. (2000). The C*-Algebras of Row-Finite Graphs. *New York J. Math*, 307-324.

[6] Brown, J. H., & Huef, A. A. (2012). The Socle and Semisimplicity of A Kumjian-Pask Algebra.

[7] Clark, L. O., Flynn, C., & Huef, A. A. (2014). Kumjian-Pask Algebras of Locally Convex Higher-rank Graphs. *J. Algebra, 399*, 445-474.

[8] Davidson, K. R., & Yang, D. (2009). Periodicity in Rank 2 Graph Algebras. *Canad. J. Math*, 1239-1261.

[9] Enomoto, M., & Watatani, Y. (1980). A Graph Theory for C*-algebras. *Math. Japan, 25*, 435-442.

[10] Kang, S., & Pask, D. A. (2014). Aperiodicity and Primitive Ideals of Row-Finite k-Graphs. *International Journal of Mathematics, 25*(3), 1450022.

[11] Kumjian, A., & Pask, D. (2000). Higher Rank Graph C*-Algebras. *New York Journal of Mathematics*, 1-20.

[12] Kumjian, A., Pask, D., & Raeburn, I. (1998). Cuntz Krieger Algebras of Directed Graphs. *Pacific Journal of Mathematics, 184*, 1-14.

[13] Kumjian, A., Pask, D., Raeburn, I., & Renault, J. (1997). Graphs, Groupoids, and Cuntz-Krieger Algebras. *J. Funct. Anal*, 505-541.

[14] Pino, G. A., & Crow, K. (2011). The Center of A Leavitt Path Algebra. *Rev. Mat. Iberoam., 27*, 621–644.

[15] Pino, G. A., Clark, J., Huef, A. A., & Raeburn, I. (2013). Kumjian-Pask Algebra of Higher Rank Graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 3613-3641.

[16] Raeburn, I. (2005). *Graph Algebras*. Rhode Island: American Mathematical Society.

[17] Raeburn, I., Sims, A., & Yeend, T. (2003). Higher-Rank Graphs And Their C*-Algebras. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 99-115.

[18] Raeburn, I., Sims, A., & Yeend, T. (2004). The C*-algebras of Finitely Aligned Higher-Rank Graphs. *J. Funct. Anal*, 206-240.

[19] Robertson, D. I., & Sims, A. (2007). Simplicity of C*-Algebras Associated to Higher-Rank Graphs. *Bulletin of The London Mathematical Society,* 337-344.

[20] Robertson, D. I., & Sims, A. (2009). Simplicity of C*-algebras Associated to Row-finite Locally Convex Higher-rank Graphs. *Israel J. Math*, 171-192.

[21] Robertson, G., & Steger, T. (1996). C*-algebras Arising from Group Action on The Boundary of A Triangle Building. *Proc. London Math. Soc., 72,* 613-637.

[22] Robertson, G., & Steger, T. (1999). Affine Buildings, Tiling Systems, and Higher Rank Cuntz-Krieger Algebras. *J. Reine Angew. Math, 513*, 115-144.

[23] Rosjanuardi, R. (2013). Complex Kumjian-Pask Algebra. *Acta Matematica Sinica, 29*(11), 2073-2078.

[24] Rosjanuardi, R., & Yusnitha, I. (2016). Kumjian-Pask Algebra of Desourcification. *AIP Conf. Proc., 1708,* 060006.

[25] Sims, A. (2003). *C*-Algebras Associated to Higher-Rank Graphs*. Ph.D. Thesis, The University of Newcastle.

[26] Tomforde, M. (2007). Uniqueness Theorems and Ideal Structure for Leavitt Path Algebras. *J. Algebra, 318*, 270–299.

[27] Tomforde, M. (2011). Leavitt Path Algebras With Coe□cients in A Commutative Ring. *J. Pure Appl.Algebra, 215*, 471–484.

[28] Yusnitha, I., & Rosjanuardi, R. (2016). Complex Kumjian-Pask Algebras of 2-Graphs. *AIP Conf. Proc., 1708,* 060010.