Hasil *Cross Product* Dari Dua Graf-*k*

Rizza Lestari*, Rizky Rosjanuardi, Sumanang Muhtar Gozali

Program Studi Matematika
Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pendidikan Indonesia
*Surel : rizzalestari313@gmail.com

ABSTRAK. Artikel ini membahas tentang hasil *cross product* dari dua graf-k. Dalam penelitian ini dibahas mengenai struktur dari graf-k, yang terdiri dari kategori dan fungtor yang memenuhi sifat faktorisasi. Selanjutnya dibahas bagaimana hasil *cross product* dari dua graf-k, yang mencakup produk kategori dan fungtor untuk produk kategori tersebut. Lalu diberikan ilustrasi bagaimana membentuk graf-$(\mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2)$ dari dua graf-k yang berbeda, yaitu graf-k_1 dan graf-k_2.

Kata kunci : Kategori, fungtor, graf-k, *cross product*, fungtor untuk kategori produk, *cross product*.

The Cross Product From Two *k*-graphs

ABSTRACT. *This article discusses results of cross product of two k-graphs. This study discusses the structure of the k-graphs, which consists of category and functor that satisfying the factorisation property. Furthermore, we discussed the crossed product results from two k-graphs, which includes product category and functor for such product category. Then an illustration is given on how to form a $(k_1 + k_2)$-graph from two different k-graphs, namely k_1-graph and k_2-graph.*

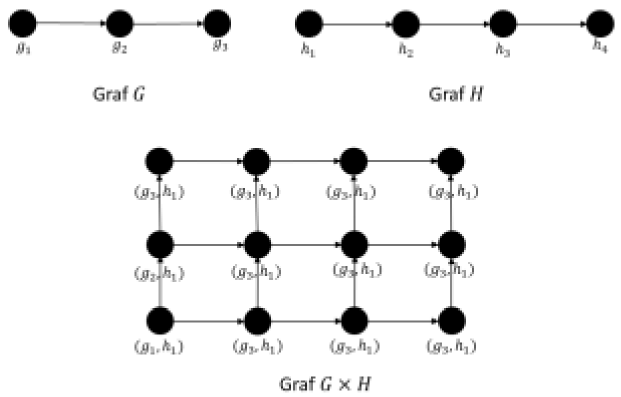
Keywords *: Category, functor, k-graph, cross product, functor for product category, cross product.*

1. PENDAHULUAN

Misalkan terdapat dua himpunan tak kosong A dan B. Menurut definisi 1.1.5 pada [1, hlm. 4], produk kartesius dari dua buah himpunan A dan B adalah himpunan $A \times B$ yang berisi semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$, yang bisa dituliskan sebagai $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Menurut Beineke dan Wilson [2, hlm. 1], sebuah graf dapat dipandang sebagai pasangan dari himpunan (V, E), di mana V adalah himpunan berhingga dan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut simpul dan E adalah himpunan tak terurut dari pasangan simpul-simpul berbeda yang disebut sisi. Oleh karena itu dapat dibicarakan produk kartesius dari dua buah graf. Berdasarkan definisi pada [4, hlm. 3], produk kartesius dari graf G dan H, dinotasikan $G \times H$, adalah graf dengan himpunan simpul $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$, yaitu himpunan $\{(\mathrm{g}, \mathrm{h}) : \mathrm{g} \in \mathrm{V(G)}, \mathrm{h} \in \mathrm{V(H)}\}$. Himpunan sisi dari $G \times H$ berisi semua pasangan $[(\mathrm{g}_1, \mathrm{h}_1), (\mathrm{g}_2, \mathrm{h}_2)]$ dari simpul dengan $[\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2] \in \mathrm{E(G)}$ di mana $E(G)$ adalah himpunan sisi dari graf G dan $\mathrm{h}_1 = \mathrm{h}_2$, atau $[\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2] \in \mathrm{E(H)}$ di mana $E(H)$ adalah himpunan sisi dari graf H dan $\mathrm{g}_1 = \mathrm{g}_2$.

Gambar 1 merupakan contoh produk kartesius dari graf G dan H. Diketahui bahwa $V(G) = \{g_1, g_2, g_3\}$ dan $V(H) = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ sehingga himpunan simpul dari graf $G \times H$ adalah $V(G \times H) = \{(g_i, h_j) : g_i \in V(G), h_j \in V(H)\ untuk\ 1 \le i \le 3\ dan\ 1 \le j \le 4\}$.



Gambar 1. Graf G, graf H dan graf $G \times H$.

Kumjian dan Pask [6] memperkenalkan notasi baru yaitu graf-k untuk memperumum konstruksi aljabar-C^* dari graf berarah yang dibahas pada artikel-artikel terkait sebelumnya yaitu [5] dan [7]. Pengenalan teori graf-k oleh Kumjian dan Pask [6] dan adanya produk kartesius dari dua buah graf memotivasi penulis untuk menggali lebih lanjut mengenai bagaimana hasil *cross product* dari dua buah graf-k.

2. METODOLOGI

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengidentifikasi graf-k_1 $(\Lambda_1, \mathrm{d}_1)$ dan graf-k_2 (Λ_2, d_2) menurut definisi 3.3 sehingga memperoleh komposisi dari $\lambda_1 \in \Lambda_1$ dan $\lambda_2 \in \Lambda_2$ yang bersifat unik. Juga memperoleh sifat faktorisasi pada masing-masing fungtor d_1 dan d_2.
2. Lalu dengan menggunakan definisi 3.6 diperoleh komposisi yang unik dari (λ_1, λ_2).
3. Untuk menunjukkan sifat faktorisasinya, identifikasi lebih dulu bahwa $N^{k_1} \times N^{k_2} = N^{k_1+k_2}$ berdasarkan pada contoh 3.7. Lalu dengan melakukan substitusi pada definisi fungtornya menurut proposisi 1, diperoleh bahwa fungtor untuk kategori produk $\mathrm{d}_1 \times \mathrm{d}_2$ memenuhi sifat faktorisasi.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Definisi dan Contoh

Definisi 3.1 Kategori [3, hlm. 52]

Sebuah kategori adalah kelas $\mathcal{C}$ dari objek yang dinotasikan dengan $A, B, C, \ldots$ bersama dengan :

1. Kelas dari himpunan-himpunan yang saling disjoin, dinotasikan $\hom(A, B)$, sebuah himpunan untuk setiap sepasang objek pada $\mathcal{C}$; (elemennya berupa $f : A \to B$, disebut morfisma dari A ke B);
2. Untuk setiap (A, B, C) dari objek di $\mathcal{C}$, fungsi
$$hom(B, C) \times hom(A, B) \to hom(A, C)$$
(untuk morfisma $f : A \to B$ dan $g : B \to C$, fungsinya ditulis sebagai $(g, f) \mapsto g \circ f$ dan $g \circ f : A \to C$ disebut komposisi dari f dan g) yang memenuhi dua aksioma yaitu :
   a. Asosiatif. Jika $f : A \to B$, $g : B \to C$ dan $h : C \to D$ adalah morfisma di $\mathcal{C}$, makah $\circ$ $(\mathrm{g} \circ \mathrm{f}) = (\mathrm{h} \circ \mathrm{g}) \circ \mathrm{f}$;
   b. Elemen identitas. Untuk setiap objek B di $\mathcal{C}$ terdapat sebuah morfisma $1_B : B \to B$ sedemikian sehingga untuk sebarang $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ berlaku $1_\mathrm{B} \circ \mathrm{f} = \mathrm{f}$ dan $\mathrm{g} \circ 1_\mathrm{B} = \mathrm{g}$.

Definisi 3.2 Fungtor [3, hlm. 465]

Misalkan $\mathcal{C}$ dan $\mathcal{D}$ adalah kategori. Sebuah fungtor kovarian T dari $\mathcal{C}$ ke $\mathcal{D}$ (dinotasikan dengan $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$) adalah sepasang fungsi (keduanya dinotasikan dengan T), fungsi pertama adalah fungsi yang memasangkan setiap objek C dari $\mathcal{C}$ ke objek $T(C)$ dari $\mathcal{D}$ dan fungsi kedua memasangkan setiap morfisma $f : C \to C'$ dari $\mathcal{C}$ ke morfisma $T(f) : T(C) \to T(C')$ dari $\mathcal{D}$, sedemikian sehingga memenuhi:

1. $\mathrm{T}(1_{\mathrm{C}}) = 1_{\mathrm{T(C)}}$, untuk setiap morfisma identitas 1_C di $\mathcal{C}$;
2. $\mathrm{T}(\mathrm{g} \circ \mathrm{f}) = \mathrm{T}(\mathrm{g}) \circ \mathrm{T}(\mathrm{f})$ untuk sebarang dua morfisma f, g di $\mathcal{C}$ di mana komposisi $g \circ f$ terdefinisi.

Definisi 3.3 Graf-k [6, hlm. 3]

Sebuah graf-k (Λ, d) berisi kategori kecil terhitung Λ (dengan pemetaan hasil dan sumber secara berurutan adalah r dan s) bersama dengan fungtor $d : \Lambda \to N^k$ yang memenuhi sifat faktorisasi yaitu untuk setiap $\lambda \in \Lambda$ dan $m, n \in N^k$ dengan $d(\lambda) = m + n$, terdapat elemen unik $\mu, \nu \in \Lambda$ sedemikian sehingga $\lambda = \mu\nu$ dan $d(\mu) = m$, $d(\nu) = n$. Untuk $n \in N^k$, definisikan $\Lambda^n = d^{-1}(n)$, di mana himpunan Λ^n berisi semua objek yang jika dipetakan oleh fungtor d maka akan bernilai n atau bisa juga dipandang sebagai himpunan lintasan dengan panjang n.

Contoh 3.4 [8, *example 10.3*]

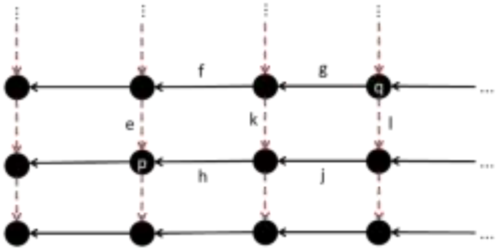
Definisikan graf-k Ω_k dengan membuat $\Omega_k^0 = N^k$, $\Omega_k^* = \{(p, q) : p, q \in N^k$ dan $p_i \leq q_i$ untuk semua $i\}$, $r(p, q) = p$, $s(p, q) = q$, dan $d(p, q) = q - p$. Lalu definisikan juga komposisinya dengan $(p, q)(q, r) = (p, r)$. Maka Ω_k adalah sebuah graf-k.

Contoh 3.5 ([8, *example 10.4*])

Kerangka-1 dari graf-2 Ω_2 terlihat seperti Gambar 2, di mana sisi pada $\Omega_2^{e_2}$ (sisi dengan derajat (0,1)) berwarna merah dan sisi pada $\Omega_2^{e_1}$ (sisi dengan derajat (1,0)) berwarna hitam. Pada gambar di bawah, lintasan (p, q) mempunyai derajat (2,1). Perhatikan bahwa lintasan (p, q) mempunyai tiga faktorisasi yaitu :

1. $(p, q) = efg = (1,0) + (1,0) + (0,1)$
2. $(p, q) = hkg = (1,0) + (0,1) + (1,0)$
3. $(p, q) = hjl = (0,1) + (1,0) + (1,0)$.

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X



Gambar 2. Kerangka-1 dari graf-2 Ω_2

Definisi 3.6 Produk Kategori [3, hlm. 467]

Misalkan $\mathcal{C}$ dan $\mathcal{D}$ keduanya kategori, produk dari keduanya adalah kategori $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ di mana objeknya adalah semua pasangan (C, D), dengan C adalah objek pada $\mathcal{C}$ dan D adalah objek pada $\mathcal{D}$. Morfisma dari $(C, D) \mapsto (C', D')$ pada $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ adalah pasangan (f, g) di mana $f : C \to C'$ adalah morfisma pada $\mathcal{C}$ dan $g : D \to D'$ adalah morfisma pada $\mathcal{D}$. Komposisinya diberikan oleh $(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$. Produk untuk kategori yang jumlahnya lebih dari dua juga didefinisikan serupa.

Contoh 3.7

Misalkan N^{k_1} dan N^{k_2} adalah dua buah kategori, produk dari keduanya adalah kategori $N^{k_1} \times N^{k_2}$ di mana objeknya adalah semua pasangan (m, n) dengan m adalah objek pada N^{k_1} dan n adalah objek pada N^{k_2}. Morfisma dari $(m, n) \mapsto (m', n')$ pada $N^{k_1} \times N^{k_2}$ adalah pasangan (f, g) di mana $f : m \to m'$ adalah morfisma pada N^{k_1} dan $g : n \to n'$ adalah morfisma pada N^{k_2}. Komposisinya diberikan oleh $(\mathrm{f}', \mathrm{g}') \circ (\mathrm{f}, \mathrm{g}) = (\mathrm{f}' \circ \mathrm{f}, \mathrm{g}' \circ \mathrm{g})$.

Jika diperhatikan, objek pada $N^{k_1} \times N^{k_2}$ adalah pasangan terurut (m, n) di mana $m = (m_1, m_2, \ldots m_{k_1})$ adalah objek pada N^{k_1} dan $n = \left(n_1, n_2, \ldots, n_{k_2}\right)$ adalah objek pada N^{k_2}. Jika ditulis menjadi pasangan terurut, maka diperoleh

$$(m, n) = (m_1, m_2, \ldots m_{k_1}, n_1, n_2, \ldots, n_{k_2})$$

Sehingga bisa terlihat bahwa $N^{k_1} \times N^{k_2} = N^{k_1 + k_2}$.

3.2 Hasil dan Contoh

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai hasil *cross product* dari dua graf-k, bagaimana hasil objek yang akan terbentuk, dan fungtor yang digunakan untuk memenuhi sifat faktorisasinya sehingga menjadi sebuah graf-k yang baru. Lalu diberikan juga contoh bagaimana elemen dan fungtor dari hasil *cross product* tersebut diperoleh.

Proposisi 1 [6, *proposition 1.8*]

Misalkan (Λ_1, d_1) adalah graf-k_1 dan (Λ_2, d_2) adalah graf-k_2, maka $(\Lambda_1 \times \Lambda_2, d_1 \times d_2)$ adalah graf-$(k_1 + k_2)$ dimana $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ adalah kategori produk dan $d_1 \times d_2 : \Lambda_1 \times \Lambda_2 \longrightarrow N^{k_1+k_2}$ yang diberikan oleh $d_1 \times d_2(\lambda_1, \lambda_2) = \big(d_1(\lambda_1), d_2(\lambda_2)\big) \in N^{k_1} \times N^{k_2}$ untuk $\lambda_1 \in \Lambda_1$ dan $\lambda_2 \in \Lambda_2$.

Bukti :

(Λ_1, d_1) adalah graf-k_1. Maka menurut definisi 3.1, Λ_1 adalah kategori kecil terhitung bersama dengan fungtor $d_1 \colon \Lambda_1 \to N^{k_1}$ yang memenuhi sifat faktorisasi yaitu untuk setiap $\lambda_1 \in \Lambda_1$ dan $m_1, n_1 \in N^{k_1}$ dengan $d_1(\lambda_1) = m_1 + n_1$, terdapat elemen unik $\mu_1, \nu_1 \in \Lambda_1$ sedemikian sehingga $\lambda_1 = \mu_1 \circ \nu_1$ dan $d_1(\mu_1) = m_1$, $d_1(\nu_1) = n_1$.

(Λ_2, d_2) adalah graf-k_2. Maka menurut definisi 3.1, Λ_2 adalah kategori kecil terhitung bersama dengan fungtor $d_2 \colon \Lambda_2 \to N^{k_2}$ yang memenuhi sifat faktorisasi yaitu untuk setiap $\lambda_2 \in \Lambda_2$ dan $m_2, n_2 \in N^{k_2}$ dengan $d_2(\lambda_2) = m_2 + n_2$, terdapat elemen unik $\mu_2, \nu_2 \in \Lambda_2$ sedemikian sehingga $\lambda_2 = \mu_2 \circ \nu_2$ dan $d_2(\mu_2) = m_2$, $d_2(\nu_2) = n_2$.

$\Lambda_1 \times \Lambda_2$ adalah kategori produk, menurut definisi 3.4 objeknya adalah semua pasangan terurut (λ_1, λ_2), di mana λ_1 adalah objek pada Λ_1 dan λ_2 adalah objek pada Λ_2. Morfisma dari $(\lambda_1, \lambda_2) \to (\lambda_1{}', \lambda_2{}')$ pada $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ adalah pasangan (f, g) di mana $f \colon \lambda_1 \to \lambda_1{}'$ adalah morfisma pada Λ_1 dan $g \colon \lambda_2 \to \lambda_2{}'$ adalah morfisma pada Λ_2. Komposisinya diberikan oleh $(\lambda_1', \lambda_2') \circ (\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1' \circ \lambda_1, \lambda_2{}' \circ \lambda_2)$.

Dengan definisi fungtor $d_1 \times d_2(\lambda_1, \lambda_2) = \big(d_1(\lambda_1), d_2(\lambda_2)\big)$, akan ditunjukkan sifat faktorisasinya.

Ambil sebarang $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ dengan $d_1 \times d_2(\lambda_1, \lambda_2) = m + n$ untuk suatu $m, n \in N^{k_1+k_2}$. Akan ditunjukkan terdapat elemen unik $(\mu_1, \mu_2), (\nu_1, \nu_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ sedemikian sehingga $(\lambda_1, \lambda_2) = (\mu_1, \mu_2) \circ (\nu_1, \nu_2)$ dan $d_1 \times d_2(\mu_1, \mu_2) = m,\ d_1 \times d_2(\nu_1, \nu_2) = n$.

Menurut definisi graf-k_1 Λ_1, diperoleh $\lambda_1 = \mu_1 \circ \nu_1$ di mana μ_1, ν_1 unik pada Λ_1 dan menurut definisi graf-k_2 pada Λ_2, diperoleh $\lambda_2 = \mu_2 \circ \nu_2$ di mana μ_2, ν_2 unik pada Λ_2. Lalu menurut definisi komposisinya, diperoleh $(\lambda_1, \lambda_2) = (\mu_1 \circ \nu_1, \mu_2 \circ \nu_2) = (\mu_1, \mu_2) \circ (\nu_1, \nu_2)$. Artinya, terdapat $(\mu_1, \mu_2), (\nu_1, \nu_2)$ unik pada $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ sedemikian sehingga $(\lambda_1, \lambda_2) = (\mu_1, \mu_2) \circ (\nu_1, \nu_2)$.

Lalu perhatikan bahwa $d_1 \times d_2(\lambda_1, \lambda_2) = d_1 \times d_2(\mu_1 \circ \nu_1, \mu_2 \circ \nu_2) = \big(d_1(\mu_1 \circ \nu_1), d_2(\mu_2 \circ \nu_2)\big) = m + n$. Menurut contoh 3.5, diperoleh $N^{k_1+k_2} =$

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

$N^{k_1} \times N^{k_2}$. Maka $m+n=(m_1+n_1, m_2+n_2)=(m_1,m_2)+(n_1,n_2)$, sehingga diperoleh $m=(m_1,m_2)$ dan $n=(n_1,n_2)$.

Selanjutnya perhatikan bahwa $\big(d_1(\mu_1\circ\nu_1), d_2(\mu_2\circ\nu_2)\big)=(m_1+n_1, m_2+n_2)$, maka $d_1(\mu_1\circ\nu_1)=m_1+n_1$ dan $d_2(\mu_2\circ\nu_2)=m_2+n_2$. Menurut sifat faktorisasi pada graf-k_1 Λ_1 dan graf-k_2 Λ_2, jika $d_1(\lambda_1)=m_1+n_1$ dengan $\lambda_1=\mu_1\circ\nu_1$ maka $d_1(\mu_1)=m_1$, $d_1(\nu_1)=n_1$ dan jika $d_2(\lambda_2)=m_2+n_2$ dengan $\lambda_2=\mu_2\circ\nu_2$ maka $d_2(\mu_2)=m_2$, $d_2(\nu_2)=n_2$. Sehingga diperoleh

$$d_1\times d_2(\mu_1,\mu_2)=\big(d_1(\mu_1),d_2(\mu_2)\big)=(m_1,m_2)=m \text{ dan}$$

$$d_1\times d_2(\nu_1,\nu_2)=\big(d_1(\nu_1),d_2(\nu_2)\big)=(n_1,n_2)=n.$$

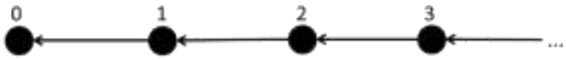
sehingga sifat faktorisasinya terpenuhi. ■

Contoh 3.9 ([6, hlm. 6])

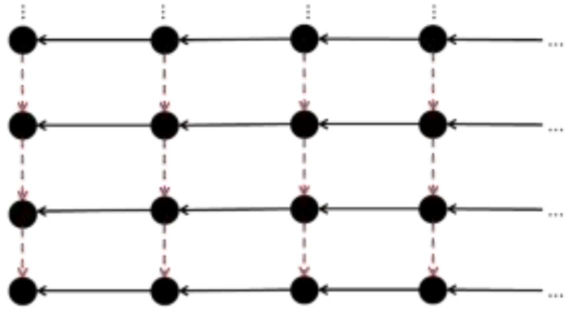
Contoh masalah untuk menggambarkan proposisi 1 tersebut adalah $\Omega_{k+l}\cong\Omega_k\times\Omega_l$ di mana $k,l>0$. Misalkan diambil $k=l=1$. Akan ditunjukkan bahwa elemen dan fungtor untuk $\Omega_1\times\Omega_1$ bersesuaian dengan elemen dan fungtor pada graf-2 Ω_2.

Berdasarkan definisi pada contoh 3.2, objek pada Ω_{11} dan Ω_{12} adalah $N=\{0,1,2,\dots\}$ dan objek pada Ω_2 adalah $N^2=\{(a_1,a_2): a_1\le a_2,\ a_1\in\Omega_{11},\ a_2\in\Omega_{12}\}$. Ilustrasi Graf-1 Ω_{11} dan Graf-1 Ω_{12} terdapat pada Gambar 3 dan Gambar 4. Dapat diamati bahwa elemen pada Ω_2 adalah pasangan terurut dari masing-masing objek pada Ω_{11} dan Ω_{12}. Ilustrasi terdapat pada Gambar 5.

Gambar 3. Graf-1 Ω_{11}



Gambar 4. Graf-1 Ω_{12}



Gambar 5. Graf-2 Ω_2

Notasikan objek pada Ω_{11} sebagai himpunan $\{a_{1_1}, a_{1_2}, ...\} \in N$. Fungtornya didefinisikan oleh $d_1(a_{1_1}, a_{1_2}) = a_{1_2} - a_{1_1}$. Lalu notasikan juga objek pada Ω_{12} sebagai himpunan $\{a_{2_1}, a_{2_2}, ...\} \in N$. Fungtornya didefinisikan oleh $d_2(a_{2_1}, a_{2_2}) = a_{2_2} - a_{2_1}$. Perhatikan bahwa objek pada Ω_2 bisa dinyatakan dengan himpunan $\{(a_{1_1}, a_{2_1}), (a_{1_2}, a_{2_2}), ...\} \in N^2$ dan fungtor yang terdefinisi adalah

$$d\left((a_{1_1}, a_{2_1}), (a_{1_2}, a_{2_2})\right) = (a_{1_2}, a_{2_2}) - (a_{1_1}, a_{2_1}) = (a_{1_2} - a_{1_1}, a_{2_2} - a_{2_1})$$
$$= \left(d_1(a_{1_1}, a_{1_2}), d_2(a_{2_1}, a_{2_2})\right).$$

Maka diperoleh bahwa elemen dan fungtor untuk hasil *cross product* yaitu Ω_2 bersesuaian dengan pernyataan pada proposisi 1.

Definisi 3.10 [6, *definition 1.9*]

Misalkan $f : N^l \to N^k$ adalah morfisma monoid, maka jika (Λ, d) adalah graf-k maka dapat dibentuk graf-l $f^*(\Lambda)$ di mana objek-objek dari $f^*(\Lambda)$ dapat diidentifikasi dari objek pada Λ dan$f^*(\Lambda) = \{(\lambda, n) : d(\lambda) = f(n)\}$ dengan $d(\lambda, n) = n$, $s(\lambda, n) = s(\lambda)$, dan $r(\lambda, n) = r(\lambda)$.

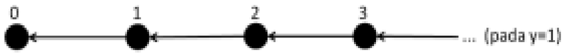
Contoh 3.11 [6, *examples 1.10(i)*]

Misalkan Λ adalah graf-k dan kita ambil $l = 1$. Jika kita definisikan morfisma $f_i(n) = ne_i$ untuk $1 \le i \le k$, kita mendapat graf koordinat $\Lambda_i = f_i^*(\Lambda)$ dari Λ yang merupakan graf-1.

Menurut definisi 3.3, kita punya $f : N \to N^k$ dengan $f_i(n) = ne_i$ untuk $1 \le i \le k$. Misalkan kita ambil $k = 2$. Maka kita punya dua morfisma yaitu $f_1(n) = ne_1 = (n, 0)$ dan $f_2(n) = ne_2 = (0, n)$, lalu diperoleh juga :

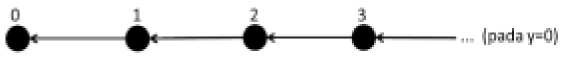
e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

1. $f_1^*(\Lambda) = \{(\lambda, n) : d(\lambda) = f_1(n) = (n, 0)\}$ dengan $d(\lambda, n) = n$, $s(\lambda, n) = s(\lambda)$, dan $r(\lambda, n) = r(\lambda)$. Himpunan $f_1^*(\Lambda)$ berisi pasangan terurut (λ, n) dengan $\lambda \in \Lambda$ yang merupakan graf-2 dengan syarat λ mempunyai derajat $(n, 0)$. Misalkan $\lambda = ((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ dan $d(\lambda) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Sehingga diperoleh $b_1 - a_1 = n$ dan $b_2 - a_2 = 0 \Leftrightarrow b_2 = a_2$. Ingat bahwa $\Lambda = \{\big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) : a_i \le b_i\ untuk\ i = 1,2\}$.
   (a) Misalkan untuk $a_2 = b_2 = 0$, kita punya
   $\lambda = \big((0,0), (0,0)\big)$, jika $b_1 = 0$
   $\lambda = ((0,0), (1,0))$ dan $((1,0), (1,0))$, jika $b_1 = 1$
   $\lambda = \big((0,0), (2,0)\big)$, $\big((1,0), (2,0)\big)$, dan $((2,0), (2,0))$, jika $b_1 = 2$.
   dan seterusnya (untuk $b_1 = 0,1,2,3, \ldots$). Sehingga diperoleh kerangkanya yang terdapat pada Gambar 6.



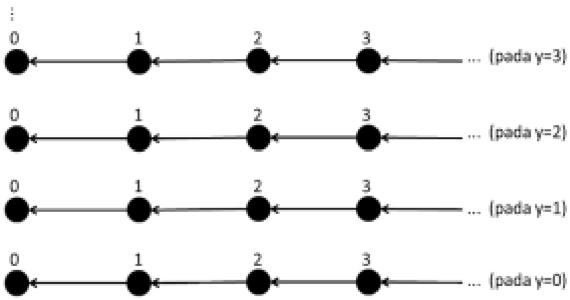
Gambar 6. Kerangka kasus (a)

   (b) Misalkan untuk $a_2 = b_2 = 1$, kita punya
   $\lambda = \big((0,1), (0,1)\big)$, jika $b_1 = 0$
   $\lambda = ((0,1), (1,1))$ dan $((1,1), (1,1))$, jika $b_1 = 1$
   $\lambda = \big((0,1), (2,1)\big)$, $\big((1,1), (2,1)\big)$, dan $((2,1), (2,1))$, jika $b_1 = 2$
   dan seterusnya (untuk $b_1 = 0,1,2,3, \ldots$). Sehingga diperoleh kerangkanya yang diilustrasikan pada Gambar 7.



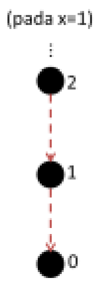
Gambar 7. Kerangka kasus (b)

   Sehingga secara keseluruhan kerangka untuk $a_2 = b_2 = 0,1,2,3, \ldots$ dan untuk $b_1 = 0,1,2,3, \ldots$ adalah graf yang digambarkan pada Gambar 8.



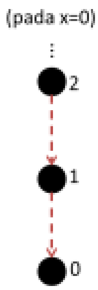
Gambar 8. Kerangka keseluruhan kasus 1

2. $f_2^*(\Lambda) = \{(\lambda, n) : d(\lambda) = f_2(n) = (0, n)\}$ dengan $d(\lambda, n) = n$, $s(\lambda, n) = s(\lambda)$, dan $r(\lambda, n) = r(\lambda)$. Himpunan $f_2^*(\Lambda)$ berisi pasangan terurut (λ, n) dengan $\lambda \in \Lambda$ yang merupakan graf-2 dengan syarat λ mempunyai derajat $(0, n)$. Misalkan $\lambda = ((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ dan $d(\lambda) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Sehingga diperoleh $b_1 - a_1 = 0 \Leftrightarrow b_1 = a_1$. dan $b_2 - a_2 = n$. Ingat bahwa $\Lambda = \{\big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) : a_i \leq b_i \; untuk \; i = 1,2\}$.
   (a) Misalkan $a_1 = b_1 = 0$, maka kita punya
   $\lambda = \big((0,0), (0,0)\big)$, jika $b_2 = 0$
   $\lambda = ((0,0), (0,1))$ dan $((0,1), (0,1))$, jika $b_2 = 1$
   $\lambda = \big((0,0), (0,2)\big)$, $\big((0,1), (0,2)\big)$, dan $((0,2), (0,2))$, jika $b_2 = 2$
   dan seterusnya (untuk $b_2 = 0,1,2,3, \ldots$). Sehingga diperoleh kerangkanya adalah seperti pada Gambar 9.



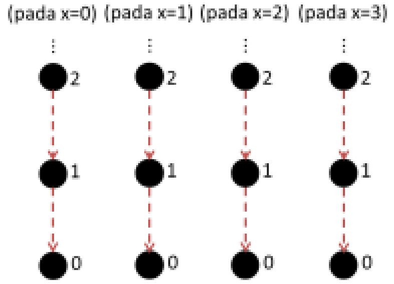
Gambar 9. Kerangka kasus (a)

   (b) Misalkan $a_1 = b_1 = 1$, maka kita punya
   $\lambda = \big((1,0), (1,0)\big)$, jika $b_2 = 0$
   $\lambda = ((1,0), (1,1))$ dan $((1,1), (1,1))$, jika $b_2 = 1$
   $\lambda = \big((1,0), (1,2)\big)$, $\big((1,1), (1,2)\big)$, dan $((1,2), (1,2))$, jika $b_2 = 2$
   dan seterusnya (untuk $b_2 = 0,1,2,3, \ldots$). Sehingga diperoleh kerangkanya adalah seperti Gambar 10.



Gambar 10. Kerangka kasus (b)

Sehingga secara keseluruhan kerangka untuk $a_1 = b_1 = 0,1,2,3,\ldots$ dan untuk $b_2 = 0,1,2,3,\ldots$ adalah graf yang tersaji pada Gambar 11.



Gambar 11. Kerangka keseluruhan kasus 2

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam artikel ini, maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Misalkan (K, d_1) adalah graf-k_1 dan (L, d_2) adalah graf-k_2. Bagaimanakah memandang $K \times L$ sebagai graf-$(k_1 + k_2)$?

   $K \times L$ bisa dipandang sebagai graf-$(k_1 + k_2)$ $(K \times L, d_1 \times d_2)$, di mana $(K \times L, d_1 \times d_2)$ juga mempunyai struktur yang sama dengan graf-k pada umumnya, yaitu memuat kategori produk dan fungtor untuk kategori produk yang memenuhi sifat faktorisasi.
2. Bagaimanakah bentuk objek kategori, morfisma, dan fungtor pada $K \times L$?
   (a) Bentuk objek kategori dari $K \times L$ adalah kategori produk dari kedua kategori pada masing-masing graf-k_1 dan graf-k_2, yaitu $K \times L = \{(k_i, l_i) : k_i \in K,\ l_i \in L\}$.
   (b) Bentuk morfismanya adalah himpunan pasangan terurut $\left((k_i, l_i), (k_j, l_j)\right)$ di mana $k_i, k_j \in K,\ l_i, l_j \in L$ untuk setiap $i, j \in \mathbb{N}$.
   (c) Definisi fungtor atau pemetaan morfisma yang terbetuk juga mengikuti fungtor dari graf-k_1 dan graf-k_2 yaitu dengan mendefinisikannya sebagai pasangan terurut, sehingga fungtor untuk $K \times L$ adalah $d_1 \times d_2(k_i, l_i) = (d_1(k_i), d_2(l_i))$ untuk sebarang objek $(k_i, l_i) \in K \times L$.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R. G., dan Sherbert, D. E. (2000). *Introduction To Real Analysis (3rd Edition)*. John Wiley dan Sons. Inc.

[2] Beineke, L. W., dan Wilson, R. J. (2005). *Topics in Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press.

[3] Hungerford, T. W. (1974). *Algebra*. Springer Sciences Business Media.

[4] Imrich, W., Klavzar, S., dan Rall, D. F. (2008). *Topics in Graph Theory (Graphs and Their Cartesian Product).* A K Peters, Ltd.

[5] Kumjian, A., dan Pask, D. (1997). *C^*-algebras of Directed Graphs And Group Actions. Article in Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 1-24.

[6] Kumjian, A., dan Pask, D. (2000). *Higher Rank Graph C^*-Algebra. New York Journal of Mathematics*, 1-20.

[7] Kumjian, A., Pask, D., dan Raeburn, I. (1998). *Cuntz-Krieger Algebras of Directed Graphs. Pasific Journal of Mathematics*, 161-174.

[8] Raeburn, I. (2005). *Graph Algebras, CBMS.* American Mathematical Society.