Metode Peramalan Mortalita Menggunakan Metode Lee-Carter

Ima Nursaadah, Entit Puspita, Rini Marwati
Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI
Correspondent author: imaginary1718@gmail.com

ABSTRAK Skripsi ini membahas mengenai aplikasi Model Lee-Carter untuk peramalan laju mortalita di Australia. Data yang digunakan adalah data peluang mortalita Australia tahun 1921-2008, dimana usia yang digunakan adalah 0-109 tahun. *Central death rates* $m_{x,t}$ diasumsikan berbentuk linear dan eksponensial. Selanjutnya peluang mortalita diestimasi menggunakan *Singular Value Deomposition (SVD)* dan dibentuk kembali menjadi sebuah tabel mortalita Model Lee-Carter. Selanjutnya, akan diramalkan indeks kematian menggunakan ARIMA (0,1,1) untuk tahun 2009-2011. Dengan asumsi a_x dan b_x konstan, akan dibentuk tabel mortalita tahun 2009-2011. Hasil dari peramalan tabel mortalita tahun 2009-2011 memberikan hasil peramalan yang baik. Diperoleh pula bahwa asumsi eksponensial untuk *central death rates* memberikan error yang lebih kecil dibandingkan dengan asumsi linear.
Kata kunci : mortalita, *central death rates*, peramalan, Lee-Carter

ABSTRACT This paper discusses about the application of the Lee-Carter Model to forecasting mortality rates in Australia. These rates are available for the periode that goes from 1921-2008, which using 0-109 ages. Central death rates assumed has linear and exponensial form. The probability of mortallity is estimated using The Singular Value Decomposition (SVD) and rebuilt to a mortality table Lee-carter model. Next, ARIMA (0,1,1) used for forecast the mortality indeks for the time periode that goes from 2009-2011 in order to project. Assuming both of a_x and b_x are constant. Results of forecasting mortality tables for 2009-2011 shows that exponential assumption for central death rates better than the linear assumption.
Keyword : mortality, *central death rates*, forecasting, Lee-Carter

1. PENDAHULUAN

Analisis mortalita banyak digunakan dikalangan akademisi, pembuat kebijakan, ataupun peneliti industri. Analisis mortalita digunakan untuk perencanaan dana pensiun, mengarahkan penelitian farmasi, perencanaan kesehatan dan penelitian medis. *Demographers* menggunakan data dalam *life table* untuk memprediksi jumlah penduduk dimasa mendatang, sedangkan aktuaris menggunakan data dalam *life table* untuk perkiraan *cash flow*, besar premi, cadangan asuransi hidup dan anuitas pensiun. Agensi resmi juga menggunakan peramalan mortalita untuk mendukung keputusan politik. Model teoritis dari *life table* merupakan model yang kontinu, namun informasi saat ini pada umumnya masih dalam bentuk diskret. Untuk mengetahui tingkat kematian penduduk pada masa depan dibutuhkan suatu metode peramalan yaitu suatu cara memperkirakan secara kuantitatif apa yang terjadi pada masa depan berdasarkan data yang relevan pada masa lalu. Metode peramalan sangat berguna untuk membantu dalam mengadakan pendekatan analisis terhadap pola data masa lalu, sehingga dapat memberikan tingkat keyakinan yang lebih atas ketepatan hasil ramalan yang dibuat. Keberhasilan dari suatu peramalan ditentukan oleh pengetahuan teknik tentang informasi masa lalu yang dibutuhkan serta teknik dan metode peramalan. Peramalan mortalita mempunyai sejarah yang panjang dalam demografi dan sains aktuaria. Pada tahun 1992, Lee dan Carter memperkenalkan sebuah model stokastik, berdasarkan pendekatan faktor analitik, untuk kecocokan dan prediksi laju mortalita di Negara Amerika Serikat. Kemudian, karena kesederhanaan modelnya dan pendayagunaan yang relatif baik, model Lee-Carter sering digunakan untuk demografi dan aplikasi aktuaria.

Metode Lee-Carter (Lee dan Carter, 1992) sangat berguna dan masih banyak digunakan untuk pendekatan pemodelan risiko kematian. Model Lee Carter pada awalnya diterapkan untuk data kematian AS untuk periode 1933-1987. Model ini berhasil digunakan untuk peramalan angka kematian dari beberapa Negara pada periode waktu yang berbeda, misalnya Kanada (Lee dan Nault, 1993), Chili (Lee dan Romawi, 1994) dan Jepang (Wilmoth, 1996). Selain itu, model Lee-Carter hanya melibatkan tiga parameter yaitu a_x yang menjelaskan komponen untuk usia, k_t menyatakan indeks kematian pada waktu t, dan b_x yaitu kecenderungan perubahan logaritma *central death rates* terhadap tingkat mortalita. Metode Lee-Carter merupakan suatu metode peramalan tingkat kematian yang menggabungkan model demografi dengan model statistik *time series*. Metode ini mengambil logaritma dari *Age Spesific Death Rate* (ASDR). Fitur yang paling penting dalam model ini adalah indeks kematian (k_t), dimana indeks kematian ini menggambarkan *trend* kematian dari waktu ke waktu. Peramalan kematian pada metode Lee-Carter didasarkan pada ekstrapolasi indeks kematian yang diperoleh melalui pemilihan model *time series* yang tepat. Dengan mengetahui nilai indeks kematian maka dapat dicari tingkat kematian penduduk sehingga dapat dihitung probabilitas kematian yang memungkinkan untuk menyusun tabel mortalita.

2. Central Death Rates

Tipe lain dari ukuran bersyarat untuk interval usia x sampai $x+1$ disebut tingkat kematian pusat (*central rate of death*), dan dinotasikan dengan m_x.

$$m_x = \frac{\int_x^{x+1} S(y)\lambda(y)d}{\int_x^{x+1} S(y)d}$$

Asumsi Linear

$$m_x = \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2} q_x}$$

Asumsi Eksponensial

$$m_x = -\ln(1 - q_x)$$

3. Singular Value Decomposition (SVD)

Teorema 1 Misalkan A matriks berukuran $m \times n$ maka terdapat matriks diagonal D_1 berukuran $r \times r$ dengan r adalah rank dari matriks A dan $r \leq \min(m, n)$, matriks orthogonal U berukuran $m \times m$, matriks orthogonal V berukuran $n \times n$ sehingga

$$A = U \quad V^T$$

Dengan D adalah matriks berukuran $m \times n$ yang mempunyai bentuk

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. ANALISIS METODE LEE-CARTER

Pada tahun 1992 Lee dan Carter [LC92] mengembangkan sebuah metode baru untuk peramalan mortalita dan untuk memperoleh prospektif tabel mortalita. Metode stokastik ini menganjurkan sebuah bentuk log-bilinear untuk *central death rate* $m_{x,t}$ untuk usia x pada waktu t. Ini terdiri dalam dua komponen mortalita usia-spesifik :

- Sebuah kumpulan dari usia spesifik konstan yaitu a_x, b_x
- Sebuah indek dari mortalita yaitu k_t

Model mengikuti bentuk :

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}\ ; \qquad t = 1,2,\dots,T\ ; x = 1,2,\dots,n$$

dengan batasan parameter :

$$\sum_{t=1}^{T} k_t = 0, \quad \sum_{x=1}^{n} b_x^2 = 1$$

dengan :

$m_{x,t}$: *Central detah rates* pada usia x di tahun ke t

a_x : pola rata-rata mortalita untuk usia x

b_x : kepekaan relatif logaritma *central death rates* terhadap perubahan dalam tingkat mortalita didalam waktu t pada usia x

k_t : tingkat mortalita ditahun t

$\varepsilon_{x,t}$: galat pada umur x ditahun t

Untuk membangun prospektif tabel mortalita, dibutuhkan :

- Estimasi seluruh parameter model Lee-Carter
  Sebuah solusi optimum dapat ditemukan dengan metode kuadrat terkecil dan diberikan oleh *Singular Value Decomposition* (SVD) (untuk menentukan parameter k_t dan b_x)
- Model fluktuasi parameter k_t menjelaskan evolusi mortalita. Pada faktanya hal ini dibutuhkan untuk proses spesifikasi bentuk k_t $(A\ (p), M\ (q), A\ (p,d,q), \dots)$ untuk membuat ramalan mortalita masa depan. Dalam hal ini memungkinkan untuk memperoleh prediksi dari peluang kematian.

Estimasi Parameter Lee-Carter dengan *Singular Value Decomposition* (SVD)

1. Estimasi $\hat{a}_x$
   Parameter a_x dapat diperoleh dengan meminimumkan $\varepsilon_{x,t}$ dari model Lee-Carter
   $$\varepsilon_{x,t} = \ln(m_x, t) - a_x - b_x k_t$$
   Parameter a_x diestimasi dengan meminimumkan $\varepsilon_{x,t}$ atau $\sum_{x=1}^{n} \varepsilon_{x,t} = 0$ untuk nilai t tertentu.

$$\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_{x,t} = \sum_{t=1}^{T} (\ln(m_x, t) - a_x - b_x k_t)$$

$$\sum_{t=1}^{T} \ln(m_x, t) - \sum_{t=1}^{T} a_x - \sum_{t=1}^{T} b_x k_t = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T} \ln(m_x, t) - T a_x - b_x \sum_{t=1}^{T} k_t = 0$$

$$\hat{a}_x = \frac{\sum_{t=1}^{T} \ln(m_x, t) - b_x \sum_{t=1}^{T} k_t}{T}$$

Dengan mengikuti batasan parameter

$$\sum_{t=1}^{T} k_t = 0, \quad \sum_{x=1}^{n} b_x^2 = 1$$

Maka diperoleh penaskir parameter a_x, yaitu :

$$\hat{a}_x = \frac{\sum_{t=1}^{T} \ln(m_{x,t})}{T}$$

2. Bentuk matriks A untuk menaksir parameter b_x dan k_t dimana :

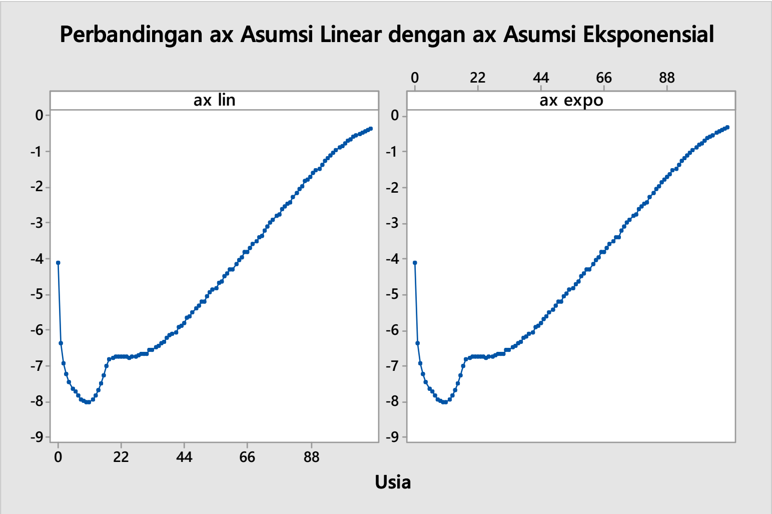
   $$A_{x,t} = \ln m_{x,t} - \hat{a}_x = b_x k_t$$

   Menerapkan metode SVD untuk matriks $A_{x,t}$ yang menguraikan matriks A menjadi :

   $$U \quad V^T = s \quad (A_{x,t}) = D_1 U_{x,1} V_{t,1} + \cdots + D_8 \ U_{x,8} \ V_{t,8}$$
3. Maka penaksir b_x diperoleh dari kolom pertama dari matriks U yang diperoleh dari SVD ($A_{x,t}$) dapat ditulis $\hat{b}_x = U_{n,1}$
4. Penaksir k_t diperoleh dari kolom pertama dari matriks V dari nilai singular pertama dapat ditulis $\hat{k}_t = D_1 V_{T,1} = \sigma_1 V_{T,1}$
5. Diperoleh estimasi $\ln(\hat{m}_x, t) = \hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{k}_t$
6. Pencocokan estimasi parameter model Lee-Carter dengan SVD dan menghitung SSE
7. Menghitung nilai k_t masa depan dengan menggunakan model yang sesuai.
8. Menghitung nilai peluang kematian masa depan dengan asumsi linear dan eksponensial.

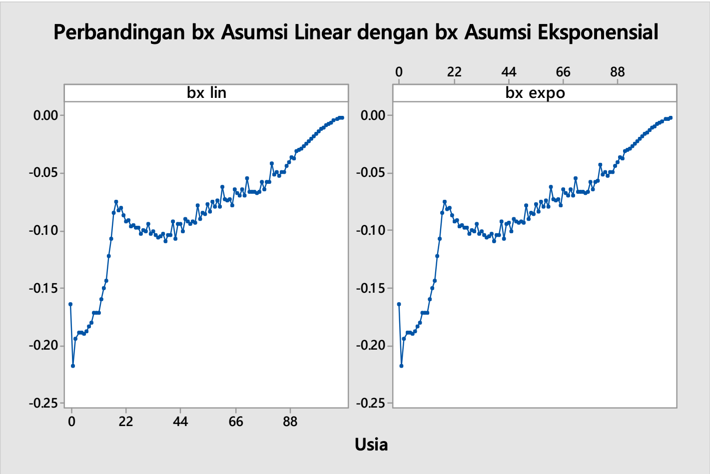
5. HASIL DAN PEMBAHASAN

Plot penaksir parameter a_x model Lee-Carter dengan asumsi linear dan eksponensial adalah sebagai berikut :



Grafik 1 Plot Nilai $\hat{a}_x$ Asumsi Linear dan Eksponensial

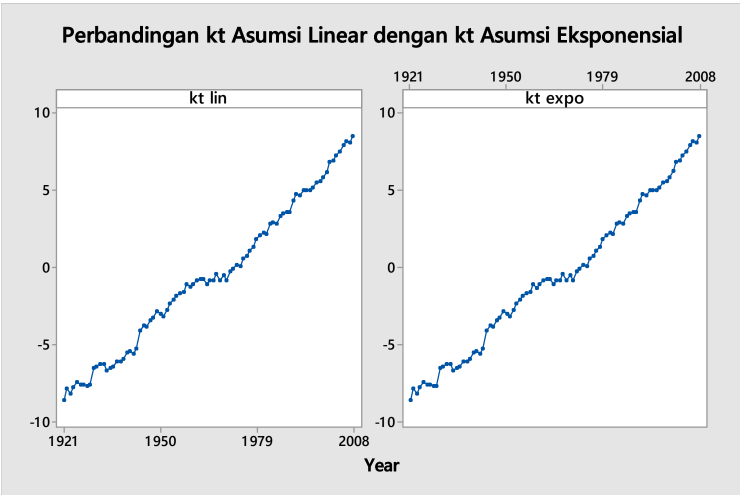
Dari Grafik 1 dapat ditunjukan bahwa $\hat{a}_x$ dengan asumsi linear dan eksponensial mempunyai *trend* yang cenderung naik, sementara usia yang lebih muda mempunyai laju mortalita yang lebih rendah sedangkan usia yang lebih tua mempunyai laju mortalita lebih tinggi. Plot penaksir parameter b_x model Lee-Carter dengan asumsi linear dan eksponensial adalah sebagai berikut :



Grafik 2 Plot Nilai $\hat{b}_x$ Asumsi Linear dan Eksponensial

Parameter b_x adalah sebuah komponen usia spesifik yang merepresentasikan seberapa cepat atau lambat mortalita pada usia x saat indeks mortalita berganti. Dari Grafik 4.2 dapat ditunjukan bahwa semakin tua usia seseorang, maka mortalita secara signifikan akan semakin bervariasi. Sedangkan untuk usia yang lebih muda, nilai parameter ini lebih rendah, yang berarti mortalita pada periode ini hampir tidak bervariasi.

Plot penaksir parameter k_t model Lee-Carter dengan asumsi linear dan eksponensial adalah sebagai berikut :



Grafik 3 Plot Nilai $\hat{k}_t$ Asumsi Linear dan Eksponensial

Indeks mortalita mengekspresikan *trend* waktu utama. Penurunan *trend* menunjukan sebuah peningkatan mortalita selama periode observasi. Seperti pada tahun 1921 ke 1922 indeks moralita meningkat, sehingga angka mortalita pada tahun 1921 lebih rendah dibandingkan dengan tahun 1922.

Identifikasi Model

Model *Box Jenkin's* yang akan diidentifikasi adalah AR(1), MA(1) dan ARMA(1,1).

- $\hat{k}_t$ asumsi linear

Tabel 1 Estimasi Model AR(1) Asumsi Linear

Final Estimates of Parameters				
Type	Coef	SE Coef	T	P
			-	
AR 1	-0.1881	0.1067	1.76	0.082
Constant	0.23214	0.03137	7.4	0.000

Berdasarkan *output Minitab 17* di atas, dengan hipotesis kriteria uji keberartian koefisien, $\phi = -0.1881$ dengan nilai *p-value* = 0.082 > 0.05, maka H_0 diterima yang berarti nilai tidak berbeda secara signifikan dengan nol, artinya koefisien ϕ tidak lolos uji keberartian koefisien. Sehingga model AR (1) tidak dapat digunakan untuk peramalan

- $\hat{k}_t$ asumsi eksponensial

Tabel 2 Estimasi Model AR(1) Asumsi Eksponensial

Final Estimates of Parameters				
Type	Coef	SE Coef	T	P
			-	
AR 1	-0.1891	0.1067	1.77	0.08
Constant	0.23231	0.03144	7.39	0.000

Berdasarkan *output Minitab 17* di atas, dengan hipotesis kriteria uji keberartian koefisien, $\phi = -0.1891$ dengan nilai *p-value* = 0.08 > 0.05, maka H_0 ditolak yang berarti nilai tidak berbeda secara signifikan dengan nol, artinya koefisien ϕ tidak lolos uji keberartian koefisien. Sehingga model AR (1) tidak dapat digunakan untuk peramalan.

Model MA (1)

Model kedua yang akan dilakukan estimasi dan verifikasi adalah model MA (1).

- $\hat{k}_t$ asumsi linear

Tabel 3 Estimasi Model MA(1) Asumsi Linear

Final Estimates of Parameters				
Type	Coef	SE Coef	T	P
MA 1	0.2262	0.1056	2.14	0.035
Constant	0.19523	0.02419	8.07	0.000

Berdasarkan *output Minitab 17* di atas, dengan hipotesis kriteria uji keberartian koefisien maka nilai *p-value* = 0.035 < 0.05, maka H0 ditolak yang berarti nilai berbeda secara signifikan dengan nol, dan *p-value* = 0.000 < 0.05 untuk konstanta, sehingga model MA (1) adalah

$$Z_t - 0.19523 = 0.2262a_{t-1} + a_t$$
$$a_t \sim N(0; \sigma^2{}_a)$$

selanjutnya, akan dilakukan uji kecocokan model

Tabel 4 Verifikasi Model MA(1) Asumsi Linear

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic				
Lag	12	24	36	48
Chi-Square	6.2	22.2	30	41
DF	10	22	34	46
P-Value	0.799	0.45	0.666	0.681

Untuk lag 12, lag 24, lag 36 dan lag 48 semua $p - v$ $> \alpha = 5\%$, sehingga maka H_0 diterima artinya model MA(1) cukup sesuai dengan data yang menurunkannya. Sehingga, model MA(1) baik atau cocok untuk digunakan dalam peramalan.

- $\hat{k}_t$ asumsi eksponensial

Tabel 5 Estimasi Model MA(1) Asumsi Eksponensial

Final Estimates of Parameters				
Type	Coef	SE Coef	T	P
MA 1	0.2278	0.1056	2.16	0.034
Constant	0.19521	0.02419	8.07	0.000

Berdasarkan *output Minitab 17* di atas, dengan hipotesis kriteria uji keberartian koefisien maka nilai *p-value* = 0.034 < 0.05, maka H_0 ditolak yang berarti nilai berbeda secara signifikan dengan nol, , dan *p-value* = 0.000 < 0.05 untuk konstanta, sehingga model MA (1) adalah

$$Z_t - 0.19521 = 0.2278\, a_{t-1} + a_t$$
$$a_t \sim N(0; \sigma^2{}_a)$$

selanjutnya, akan dilakukan uji kecocokan model,

Tabel 6 Verifikasi Model MA(1) Asumsi Eksponensial

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic				
Lag	12	24	36	48
Chi-Square	6.2	22.1	29.9	41
DF	10	22	34	46
P-Value	0.8	0.453	0.669	0.683

Untuk lag 12, lag 24, lag 36 dan lag 48 semua $p - v$ $> \alpha = 5\%$, sehingga maka H_0 diterima artinya model MA(1) cukup sesuai dengan data yang menurunkannya. Sehingga, model MA(1) baik atau cocok untuk digunakan dalam peramalan.

Model ARMA (1,1)

Model ketiga yang akan dilakukan estimasi dan verifikasi adalah model ARMA (1,1).

Tabel 7 Estimasi Model ARMA(1) Asumsi Linear

Final Estimates of Parameters				
Type	Coef	SE Coef	T	P
AR 1	-0.2016	0.1083	-1.86	0.066
MA 1	0.9727	0.059	16.48	0.000
Constant	0.00109	0.002164	0.5	0.616

Berdasarkan *output Minitab 17* di atas, dengan hipotesis kriteria uji keberartian koefisien, $\phi = -0.2016$ dengan nilai *p-value* = 0.066 > 0,05, maka H_0 diterima yang berarti koefisien tidak berbeda secara signifikan dengan nol, artinya koefisien ϕ tidak lolos uji keberartian koefisien. Jadi model ARMA (1,1) tidak dapat digunakan untuk peramalan.

- $\hat{k}_t$ asumsi eksponensial

Tabel 8 Estimasi Model ARMA(1,1) Asumsi Eksponensial

Final Estimates of Parameters				
Type	Coef	SE Coef	T	P
AR 1	-0.2026	0.1083	-1.87	0.065
MA 1	0.9727	0.0591	16.46	0.000
Constant	0.001097	0.002174	0.5	0.615

Berdasarkan *output Minitab 17* di atas, dengan hipotesis kriteria uji keberartian koefisien, $\phi = -0.2026$ dengan nilai *p-value* = 0.065 > 0.05, maka H_0 diterima yang berarti koefisien tidak berbeda secara signifikan dengan nol, artinya koefisien ϕ tidak lolos uji keberartian koefisien. Jadi model ARMA (1,1) tidak dapat digunakan dalam peramalan.

Peramalan

Setelah dilakukan verifikasi model dan didapakan model terbaik yaitu MA(1), model tersebut akan digunakan untuk peramalan nilai k_t untuk 3 tahun ke depan. Berikut ini hasil peramalan nilai k_t untuk 3 tahun kedapan dengan menggunakan model MA(1).

- Asumsi Linear

Tabel 9 Hasil Peramalan k_t Asumsi Linear

Forecasts from period 88				
		95% Limits		
Period	Forecast	Lower	Upper	Actual
89	8.68251	8.11098	9.25405	
90	8.87775	8.15509	9.60041	
91	9.07298	8.22574	9.92022	

- Asumsi Eksponensial

Tabel 10 Hasil Peramalan k_t Asumsi Eksponensial

Forecasts from period 88

		95% Limits		
Period	Forecast	Lower	Upper	Actual
89	8.68417	8.11138	9.25695	
90	8.87938	8.1557	9.60306	
91	9.07459	8.22645	9.92273	

Tabel 11

Perbandingan MAPE dan MSE Asumsi Linear dengan Eksponensial

Tahun	MSE		MAPE	
	Linear	Eksponensial	Linear	Eksponensial
2009	0.000021	0.000020	15.16%	15.15%
2010	0.000023	0.000023	15.34%	15.29%
2011	0.000031	0.000030	15.39%	15.36%

Dari tabel 14 dapat dilihat bahwa MSE asumsi eksponensial lebih kecil daripada MSE asumsi linear, kecuali pada tahun 2010. Kemudian, hasil peramalan peluang mortalita Australia tahun 2009, 2010, 2011 dengan menggunakan Metode Lee-Carter dikatakan baik. Dapat dilihat pula bahwa peramalan peluang mortalita Australia menggunakan Metode Lee-Carter dengan asumsi eksponensial lebih baik daripada menggunakan asumsi linear.

6. KESIMPULAN & SARAN

Kesimpulan

Dari pembahasan skripsi dengan judul "Peramalan Mortalita Menggunakan Metode Lee-Carter" dapat disimpulkan sebagai berikut

1. Model ARIMA yang cocok digunakan dalam peramalan peluang moratlita Australia tahun 2009-2011 dengan asumsi linear dan asumsi eksponensial adalah ARIMA (0,1,1)

2. Hasil peramalan mortalita Australia tahun 2009-2011 dengan sumsi linear dan eksponensial untuk tahun 2009, 2010, dan 2011 memberikan hasil peramalan yang baik.
3. Metode Lee-Carter dengan asumsi eksponensial memberikan nilai MAPE dan MSE yang lebih kecil dari asumsi linear untuk setiap tahunnya, kecuali untuk MSE tahun 2010. Sehingga, peramalam mortalita Australia tahun 2009-2011 dengan ausmsi ekspoenensial memberikan hasil peramalan yang lebih baik.

Saran

Skripsi Peramalan Mortalita Menggunakan Metode Lee-Carter dengan asumsi linear dan eksponensial pada data peluang mortalita Australia tahun 1921-2008 untuk usia 0-109 tahun menggunakan peluang mortalita *combined*, maka pada penulisan berikutnya dapat dikaji peluang mortalita berdasarkan *gender*. Penulisan lebih lanjut juga dapat menggunakan perbandingan metode estimasi lainnya seperti *Maximum Liklelihood* dan *Least Square*.

REFERENSI

Andreozzi, Lucia, dkk (2011). *The Lee Carter Method for Estimating and Forecasting Mortality : An Application In Argentina, school of Statistics Faculty of Economics and Statistics National University of Rosario, Argentina, Journal.*

Astuti, Ayu Indri. (2013). *Pemodelan Runtun Waktu Autoregressive Integrated Moving Average With Exogenous Variable (ARIMAX) dengan Efek Variasi Kalender*. Skripsi Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA UPI. Bandung: tidak diterbitkan

Darmawan, Ryaneka. (2015). *Penerapan Model Threshold Generalized Autoregressive Conditional Hereroscedastic (TGARCH) dalam Peramalan Harga Emas Dunia*. Skripsi Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA UPI. Bandung: tidak diterbitkan

Girosi, Federico & Gary King. (2008). *Demographic Forecasting.* United Kingdom : Princeton University Press.

Hoque, Nazrul. Dkk. (2013). *Applied Demography and Public Health*. New York : Springer Science + Bussines Media.

London, Dick. (1988). *Survival Models and Theirs Estimation, third edition.* United States of America: ACTEX Publication, Inc.

Petrova, Ingrid. (2012). *The Error Modelling for Forecasting of The Mortality Index,* 6th *International Scientific Conference Managing and Modelling of*

Financial Risk VSB-TU Ostrava Faculty of Economics, Finance Departement, Journal

Rossa, Agnieszka. (2011). *Future Life-Table Base on The Lee-Carter Methodology and Their Application to Calculating The Pension Annuities. Journal.*

Rorres, Anton (2004). *Aljabar Linear Elementer jilid 1*. Jakarta : Erlangga

Shapiro, Arnold F & Marie-Claire Koissi (2008). *The Lee Carter Model Under The Condition Of Variables Age-Specific Parameters, 43rd Actuarial Resesarch Conference, Regina, Canada.*

Soejoeti, Zanzawi. (1987). *Analisis Runtun Waktu*. Jakarta : Karunika Jakarta Univeristas Terbuka

Sukraini, Tri Tanami. (2013). *Peramalan Mortalita Menggunakan Model Lee-Carter*. (Tesis). Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Srimulyati, Eti. (2009). *Penggunaan Dekomposisi Nilai Singular (SVD) Pada Laten Semantic Indexing (LSI) Untuk Temu Kembali Informasi*. (Tesis). Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Insitut Teknologi Bandung, Bandung.

Supriyadi, Agus. (2009). *Pencocokkan dan Peramalan Mortalita Menggunakan Metode Lee-Carter*. (Tesis). Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Insitut Teknologi Bandung, Bandung.

Van der Meulen , Anousschka (2012). *Life Table and Survival Analysis* . Statistic Netherland Grafimedia.