REFLEKSIVITAS PADA RUANG ORLICZ DENGAN KEKONVERGENAN RATA-RATA

Mila Apriliani Utari, Encum Sumiaty, Sumanang Muchtar

Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia

*Coresponding author: mila.utari@ymail.com

ABSTRAK: Ruang Orlicz (L_θ) merupakan perluasan dari ruang terintegral Lebesgue $L_p, p \geq 1$ yang diperkenalkan oleh Z.W. Rirnbaun dan W. Orlicz pada sekitar tahun 1931. Terdapat beberapa sifat dari $L_p, p \geq 1$ yang berlaku pada ruang Orlicz dengan syarat fungsi Young θ yang berlaku pada ruang Orlicz memenuhi kondisi Δ_2. Pada tulisan ini dibahas mengenai refleksivitas pada ruang Orlicz dengan memanfaatkan kondisi Δ_2 pada θ yang mengimplikasikan kekonvergenan rata-rata dan kepadatan pada L_θ.

Kata kunci: Ruang Orlicz, Refleksivitas, Konvergen Rata-Rata, Kondisi Δ_2

ABSTRACT: Introduced by Z. W. Rimbaun and W. Orlicz around 1931, Orlicz spaces (L_θ) is an extension of Lebesgue spaces $L_p, p \geq 1$. There are some properties of $L_p, p \geq 1$ which applicable on Orlicz spaces with condition that Young function θ in Orlicz spaces satisfies Δ_2-condition. In this paper, we study the reflectivity of Orlicz spaces using Δ_2-condition on θ which implies mean convergence and density on L_θ.

Keyword: Orlicz Spaces, Reflectivity, Mean Convergence, Δ_2-condition.

PENDAHULUAN

Misalkan θ adalah sebuah fungsi yang terdefinisi pada bilangan real. Fungsi θ disebut fungsi Young jika θ merupakan fungsi genap, konveks, $\theta(0) = 0$ dan $\lim_{x \to \infty} \theta(x) = \infty$. Fungsi Young dan ruang $L_p, p \geq 1$ menjadi dasar terbentuknya ruang Orlicz. Ruang Orlicz didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi terukur f yang memenuhi $\int \theta\big(a\ \ (x)\big)\, d\ \ < \infty$ untuk suatu $a > 0$, yang dinotasikan dengan L_θ.

Fungsi θ dikatakan memenuhi kondisi Δ_2 jika terdapat $k > 0$ sedemikian sehingga $\theta(2x) < k\ \ (x)$ untuk semua $x > 0$. Kondisi Δ_2 merupakan suatu prasyarat yang menghubungkan antara ruang $L_p, p \geq 1$ dengan ruang Orlicz, terdapat beberapa sifat pada ruang Orlicz yang serupa dengan sifat pada ruang $L_p, p \geq 1$ jika θ memenuhi kondisi Δ_2.

Pada tulisan ini akan dibahas sifat-sifat apa saja yang berlaku pada ruang Orlicz jika θ memenuhi kondisi Δ_2, diantaranya mengenai kekonvergenan, kepadatan, dan refleksivitas pada ruang Orlicz.

KONSEP DASAR RUANG ORLICZ

Ruang Orlicz merupakan perumuman dari fungsi terintegral Lebesgue L_p, $p \geq 1$ dengan mengganti fungsi mutlak dengan fungsi yang lebih umum yaitu fungsi Young.

Definisi 2.1 : Fungsi Young[1]

Suatu fungsi $\theta : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dikatakan fungsi Young jika memenuhi kondisi berikut:

a) θ adalah fungsi genap
b) $\theta(0) = 0$
c) θ adalah fungsi konveks pada $\mathbb{R}$
d) $\lim_{x \to \infty} \theta(x) = \infty$.

Contoh:

$\theta(x) = |x|^p, p \geq 1$ merupakan fungsi Young.

Setelah kita mempunyai fungsi Young, kita definisikan fungsi komplemen Young.

Definisi 2.2 : Fungsi Komplemen Young[1]

Jika $\theta, \psi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ merupakan fungsi Young dengan

$$\psi(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{x|y| - \theta(x)\}, \quad y \in \mathbb{R}$$

maka ψ merupakan fungsi komplemen Young dari θ.

Selanjutnya didefinisikan kondisi-Δ_2 yang akan banyak digunakan dalam pembahasan tulisan ini.

Definisi 2.3 : Kondisi Δ_2[2]

Fungsi Young $\theta : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dikatakan memenuhi kondisi Δ_2 jika terdapat dua konstanta $T \geq 0$ dan $k > 0$ sedemikian sehingga $\theta(T) < \infty$ dan $\theta(2t) \leq k\ (t)$ untuk semua $t \geq T$.

Teorema 2.4[2]

Misalkan θ memenuhi kondisi Δ_2 dan $w \in L_\theta$. Jika terdapat sebuah $m \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\varrho(w;\theta) \leq \frac{1}{k^m}$$

dimana k merupakan konstanta yang memenuhi kondisi Δ_2 untuk θ, maka

$$\|w\|_\theta \leq \frac{c}{2^m}$$

dengan

$$c = \begin{cases} 2 & \text{jika } \mu(\Omega) = \infty \\ 2 + \theta(T)\mu(\Omega) & \text{jika } \mu(\Omega) < \infty. \end{cases}$$

Selanjutnya didefinisikan sebuah norm yang menggunakan fungsi Young θ yaitu Norm Luxemburg dan didefinisikan pula konvergen rata-rata pada ruang Orlicz.

Definisi 2.5 : Norm Luxemburg[3]

Jika θ adalah fungsi Young dan $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sembarang fungsi terukur maka

$$\|f\|_\theta = \inf\left\{ b > 0\ ;\ \int_\Omega \theta\left(\frac{f(x)}{b}\right) d\mu \leq 1\ , x \in \Omega \right\} \in [0,\infty).$$

Definisi 2.6 : Konvergen Rata-Rata[2]

Barisan (u_n) di L_θ dikatakan konvergen rata-rata ke u di L_θ jika

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(u_n - u;\theta) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \theta(|u_n(x) - u(x)|)\, d\mu = 0.$$

Teorema 2.7

Jika $\|w\|_\theta \leq 1$ maka $\varrho(w,\theta) \leq \|w\|_\theta$ untuk setiap $w \in L_\theta$.

Diberikan definisi ruang Orlicz dan norm Orlicz sebagai berikut.

Definisi 2.8 : Ruang Orlicz[3]

Misalkan θ adalah fungsi Young. Ruang Orlicz $L_\theta(\Omega)$ adalah himpunan semua fungsi terukur f pada himpunan tak kosong Ω sedemikian sehingga terdapat $a > 0$ sehingga $\int_\Omega \theta(a|f(x)|)d\mu < \infty$, dan dinotasikan dengan

$$L_\theta(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ terukur} ;\ \exists\, a > 0 \ni \int_\Omega \theta(a|f(x)|)d\mu < \infty \right\}$$

Definisi 2.9 : Norm Orlicz[3]

Misalkan θ dan ψ adalah fungsi-fungsi Young yang saling komplemen.

$$\|f\|_{\theta,\psi} = s \quad \left\{ \int_{\Omega} f(x)g(x)d \;\; ; g \in L_{\psi}, \|g\|_{\psi} \leq 1 \right\}, f \in L_{\theta}$$

adalah norm pada L_θ yang ekivalen dengan $\|f\|_\theta$ untuk semua $f \in L_\theta$.

Misalkan $B(\Omega)$ adalah himpunan semua fungsi terukur terbatas yang terdefinisi pada Ω. Ruang $E_\theta(\Omega)$ didefinisikan sebagai penutup $B(\Omega)$ dengan norm Orlicz.

PEMBAHASAN

Beberapa sifat yang akan dibahas pada tulisan ini yaitu kekonvergenan, kepadatan, dan refleksivitas pada ruang Orlicz.

Kekonvergenan pada Ruang Orlicz

Pertama-tama dibahas hubungan antara kekonvergenan rata-rata dan kekonvergenan di L_θ.

Teorema 3.1.1[2]

Kekonvergenan di L_θ mengakibatkan kekonvergenan rata-rata.

Bukti:

Diambil sebarang barisan (u_n) yang konvergen ke u di L_θ, artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq K$ berlaku $\|u_n - u\|_\theta < \varepsilon$.
Karena (u_n) konvergen ke u untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka berlaku pula untuk $\varepsilon = 1$.
Berdasarkan Teorema 2.7 pilih $w = u_n - u$. Sehingga diperoleh

$$\varrho(u_n - u; \theta) \leq \|u_n - u\|_\theta < \varepsilon$$

Dengan kata lain $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(u_n - u; \theta) = 0$.
Hal ini berarti barisan (u_n) konvergen rata-rata ke u.

Teorema 3.1.2[2]

Misalkan θ memenuhi kondisi Δ_2. Barisan (u_n) konvergen ke u di $L_\theta(\Omega)$ jika dan hanya jika (u_n) konvergen rata-rata ke u.

Bukti:

Bukti ke arah kanan sudah jelas. Selanjutnya akan dibutikan ke arah kiri.
Diambil sebarang barisan (u_n) yang konvergen rata-rata ke u, maka

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(u_n - u; \theta) = 0.$$

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, pilih $m \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\|u_n - u\|_\theta > \frac{\varepsilon}{2^m}$, dengan

$$c = \begin{cases} 2 & \text{jika } \mu(\Omega) = \infty \\ 2 + \theta(T)\mu(\Omega) & \text{jika } \mu(\Omega) < \infty. \end{cases}$$

Selanjutnya pilih $n_0 = n_0(m)$ sehingga $\varrho(u_n - u; \theta) < \frac{1}{k^m}$ untuk $n \geq n_0$.
Berdasarkan Teorema 2.7 maka untuk $w = u_n - u$ diperoleh

$$\|u_n - u\|_\theta < \frac{c}{2^m} < \varepsilon \quad \text{untuk } n \geq n_0$$

Artinya barisan (u_n) konvergen ke u di L_θ.

Kepadatan pada Ruang Orlicz

Pada subbab ini akan ditunjukkan bahwa $E_\theta = L_\theta$ jika θ memenuhi kondisi Δ_2.

Teorema 3.2.1[2]

Jika $\mu(\Omega) < \infty$ maka setiap fungsi terukur terbatas berada di L_θ.

Definisi 3.2.2

$B(\Omega)$ padat di L_θ dengan kekonvergenan rata-rata jika untuk setiap $u \in L_\theta$ terdapat barisan $(u_n) \in B(\Omega)$ sedemikian sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(u_n - u; \theta) = 0.$$

Teorema 3.2.3[2]

Jika $\mu(\Omega) < \infty$, maka himpunan semua fungsi terukur terbatas di Ω adalah subset padat di L_θ dengan kekonvergenan rata-rata.

Teorema 3.2.4[2]

Jika θ memenuhi kondisi Δ_2 maka $E_\theta = L_\theta$.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.2.3 diperoleh bahwa $B(\Omega)$ adalah subset padat di L_θ dengan kekonvergenan rata-rata, dan berdasarkan Teorema 3.1.2 diperoleh jika θ memenuhi kondisi Δ_2 maka $B(\Omega)$ adalah subset padat di L_θ dengan kekonvergenan di L_θ. Akibatnya

$$E_\theta = L_\theta.$$

Fungsional Linear Kontinu

Pada subbab ini akan dibahas dualitas dari L_θ.

Teorema 3.3.1

L_ψ adalah ruang dual dari E_θ.

Teorema 3.3.2

Jika θ memenuhi kondisi Δ_2 maka ruang dual dari L_θ adalah L_ψ, dan
Jika ψ memenuhi kondisi Δ_2 maka ruang dual dari L_ψ adalah L_θ.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.3.1 diketahui bahwa L_ψ adalah ruang dual dari E_θ dan berdasarkan Teorema 3.2.4 jika θ memenuhi kondisi Δ_2 maka $E_\theta = L_\theta$.

Refleksivitas pada Ruang Orlicz

Definisi 3.4.1[2]

Misalkan X adalah ruang Banach dan X^* adalah ruang dual dari X, maka ruang dual dari X^* adalah

$$X^{**} = (X^*)^*.$$

$J: X \to X^{**}$ yang didefinisikan oleh

$$(J\,)(\varphi) = \varphi(u)$$

dengan $u \in X$ dan $\varphi \in X^*$ disebut pemetaan kanonik dari X ke X^{**} yang memenuhi $u^{**}(\varphi) = \varphi(u)$ dengan $u^{**} \in X^{**}$.

Ruang Banach X dikatakan refleksif jika

$$J(X) = X^{**}.$$

Teorema 3.4.2[2]

Misalkan θ dan ψ adalah fungsi Young yang saling komplemen, maka ruang Orlicz L_θ refleksif jika dan hanya jika θ dan ψ memenuhi kondisi Δ_2.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.3.4 terdapat tepat satu $g \in L_\psi$ sedemikian sehingga

$$u^*(f) = \int_\Omega f\,(t)g(t)d$$

untuk setiap $f \in L_\theta$, dengan $u^* \in [L_\theta]^*, u^{**} \in [L_\theta]^{**}, v^* \in \left[L_\psi\right]^*$, dan $u^{**}(u^*) = v^*(g)$.

Digunakan kembali Teorema 3.3.4 sehingga terdapat tepat satu $h \in L_\theta$ sedemikian sehingga

$$v^*(\varphi) = \int_\Omega h\,(t)\varphi(t)d$$

untuk setiap $\varphi \in L_\psi$.

Oleh karena itu

$$u^{**}(u^*) = v^*(g) = \int_\Omega g\,(t)h(t)d \;\; = u^*(h).$$

Sampai disini telah dibuktikan bahwa untuk sebarang $u^{**} \in [L_\theta]^{**}$ terdapat sebuah $h \in L_\theta$ sedemikian sehingga untuk setiap $u^* \in [L_\theta]^*$ mengakibatkan

$$u^{**}(u^*) = u^*(h)$$

dengan kata lain

$$J(h) = u^{**}$$

dengan J adalah pemetaan kanonik. Dengan demikian

$$J(L_\theta) = [L_\theta]^{**}.$$

DAFTAR PUSTAKA

Rao, M. M., & Ren, Z. D. (1991). *Theory of Orlicz Spaces.* New York: Marcell Dekker Inc.

Kufner, A., John, O., & Fucik, S. (1977). *Function Spaces.* Czechoslovakia: Noordhoff International Publishing.

Leonard, C. (2007). Orlicz Spaces. 1-10.