Unjuk Kerja Beberapa Metode Volume Hingga untuk Persamaan *Burgers*

Birgitta Lucy Christabella[1], Sudi Mungkasi[2]
[1] Data Modeller, IT Enterprise Data Management, PT Bank Sinarmas Tbk, Jakarta, Indonesia
[2] Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Mrican, Tromol Pos 29, Yogyakarta 55002, Indonesia

*e-mail : sudi@usd.ac.id

Abstrak— Enam metode volume volume hingga diuji unjuk kerjanya dalam menyelesaikan persamaan Burgers. Keenam metode tersebut adalah metode upwind non-konservatif, upwind konservatif, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, MacCormack, dan Godunov. Dari perbandingan hasil simulasi, diperoleh bahwa metode upwind konservatif mempunyai unjuk kerja paling baik dalam menyelesaikan persamaan Burgers.

Kata Kunci— metode volume hingga, persamaan Burgers, unjuk kerja

I. PENDAHULUAN

Persamaan Burgers merupakan bentuk sederhana dari sistem persamaan Navier-Stokes yang masih memuat unsur nonlinear dan unsur advektif gelombang [1]. Persamaan Navier-Stokes banyak diterapkan dalam dinamika fluida, baik fluida cair maupun gas [2-3]. Oleh sebab itu, untuk menyelesaikan sistem persamaan Navier-Stokes yang rumit, bisa dimulai dari mencari metode yang tepat untuk menyelesaikan persamaan Burgers.

Beberapa peneliti telah berusaha mempelajari dan menerapkan persamaan Burgers dalam berbagai masalah terkait metode numeris [4-8]. Beberapa buku teks juga menyajikan beberapa metode volume hingga untuk bisa diterapkan dalam penyelesaian persamaan diferensial hiperbolik, termasuk persamaan Burgers [9-10]. Literatur mengindikasikan bahwa metode volume hingga mempunyai potensi yang baik untuk dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan Navier-Stokes. Oleh sebab itu, makalah ini akan menguji beberapa metode volume hingga standar untuk menyelesaikan persamaan Burgers, sebagai bentuk paling sederhana nonlinear dari sistem persamaan Navier-Stokes.

Makalah ini akan mempunyai dua bagian inti, yaitu bagian model dan metode serta bagian hasil simulasi. Makalah akan ditutup dengan beberapa kalimat simpulan.

II. MODEL DAN METODE

Model (persamaan) Burgers yang akan digunakan sebagai kasus uji dalam makalah ini berbentuk

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0. \tag{1}$$

Persamaan ini disebut pula sebagai persamaan Burgers inviscid, karena tidak memuat suku viskos. Persamaan (1) disebut sebagai persamaan Burgers (inviscid) bentuk konservatif.

Received August 29th, 2019; Reviewed September 3rd, 2019; Accepted September 10th, 2019

Dalam makalah ini kasus uji persamaan Burgers (1), yang dilengkapi nilai awal dan syarat batas, akan diselesaikan menggunakan beberapa metode volume hingga. Selanjutnya unjuk kerja beberapa motode volume hingga tersebut akan diamati. Terdapat enam metode volume hingga yang akan diuji, yaitu metode volume hingga berjenis: upwind non-konservatif, upwind konservatif, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, MacCormack, dan Godunov.

A. Metode Volume Hingga Upwind Non-Konservatif

Untuk kasus fungsi $u(x,t)$ yang terdiferensial, persamaan Burgers (1) dapat ditulis menjadi

$$u_t + uu_x = 0. \tag{2}$$

Persamaan (2) merupakan persamaan Burgers bentuk non-konservatif.

Dengan mengasumsikan diskritisasi seragam baik terhadap ruang dan waktu, dengan langkah ruang dinotasikan Δx dan langkah waktu dinotasikan Δt, diperoleh ruang diskrit $x_j = x_0 + j\Delta x$ dan waktu diskrit $t^n = t^0 + n\Delta t$. Menggunakan kerangka metode volume hingga, digunakan notasi $U_j^n \approx u(x_j, t^n)$. Metode volume hingga non-konservatif berbentuk

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} U_j^n \left(U_j^n - U_{j-1}^n \right).$$

B. Metode Volume Hingga Upwind Konservatif

Metode volume hingga upwind konservatif berbentuk

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[f\left(U_j^n\right) - f\left(U_{j-1}^n\right) \right].$$

dengan $f(u) = u^2/2$ untuk persamaan Burgers (1).

C. Metode Volume Hingga Lax-Friedrichs

Metode Lax-Friedrichs nonlinear mengambil bentuk

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[f\left(U_{j+1}^n\right) - f\left(U_{j-1}^n\right) \right]$$

dengan $f(u) = u^2/2$ untuk persamaan Burgers (1).

D. Metode Volume Hingga Lax-Wendroff

Metode Lax-Wendroff untuk persamaan $u_t + A(u)\, u_x = 0$ mempunyai bentuk

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} A^2 (U_{j+1}^n - 2U_j^n - U_{j-1}^n)$$

dengan $A(u) = f'(u)$, maka bentuk konservatif dari Lax-Wendroff untuk $u_t + f(u)_x = 0$ adalah

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(f\left(U_{j+1}^n\right) - f\left(U_{j-1}^n\right)\right) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left[A_{j+1/2}\left(f\left(U_{j+1}^n\right) - f\left(U_j^n\right)\right) - A_{j-1/2}\left(f\left(U_j^n\right) - f\left(U_{j-1}^n\right)\right)\right]$$

dimana $A_{j\pm 1/2}$ adalah matriks Jacobian yang dinilai pada $\frac{1}{2}\left(U_j^n + U_{j\pm 1}\right)$. Untuk persamaan Burgers yang berlaku $f'(u) = u$ diperoleh

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[\frac{1}{2}\left(U_{j+1}^n\right)^2 - \frac{1}{2}\left(U_{j-1}^n\right)^2\right]$$
$$+\frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left[\left(\frac{1}{2}\left(U_j^n + U_{j+1}^n\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(U_{j+1}^n\right)^2 - \frac{1}{2}\left(U_j^n\right)^2\right) - \left(\frac{1}{2}\left(U_j^n + U_{j-1}^n\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(U_j^n\right)^2 - \frac{1}{2}\left(U_{j-1}^u\right)^2\right)\right]$$

E. Metode Volume Hingga MacCormack

Metode MacCormack adalah variasi dari skema dua langkah Lax-Wendroff yang bentuknya lebih sederhana:

$$U_j^* = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[f\left(U_{j+1}^n\right) - f\left(U_j^n\right)\right]$$
$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_j^n + U_j^*\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[f\left(U_j^*\right) - f\left(U_{j-1}^*\right)\right]$$

Sehingga untuk persamaan Burgers (1) dengan $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ yang dimiliki menjadi

$$U_j^{\overline{n+1}} = U_j^* = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{1}{2}\left(U_{j+1}^n\right)^2 - \frac{1}{2}\left(U_j^n\right)^2\right]$$
$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_j^n + U_j^*) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[\frac{1}{2}(U_j^*)^2 - \frac{1}{2}(U_{j-1}^*)^2\right]$$

F. Metode Volume Hingga Godunov

Metode Godunov berbentuk

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F\left(U_j^n, U_{j+1}^n\right) - F\left(U_{j-1}^n, U_j^n\right)\right]$$

dengan fluks numerik F didefinisikan oleh $F(U,V) = \frac{(u^*)^2}{2}$ dimana u^* didefinisikan sebagai berikut:

jika $U \geq V$ maka

$$u^* = \begin{cases} U & \text{jika } \frac{U+V}{2} > 0, \\ V & \text{selainnya.} \end{cases}$$

jika $U < V$ maka

$$u^* = \begin{cases} U & \text{jika} \quad U > 0, \\ V & \text{jika} \quad V < 0, \\ 0 & \text{jika} \quad U \leq 0 \leq V. \end{cases}$$

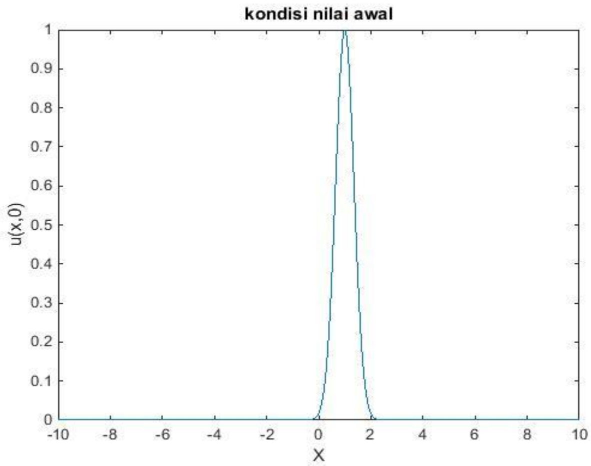
Selanjutnya, metode-metode dalam bagian ini akan diuji unjuk kerjanya.

III. HASIL SIMULASI

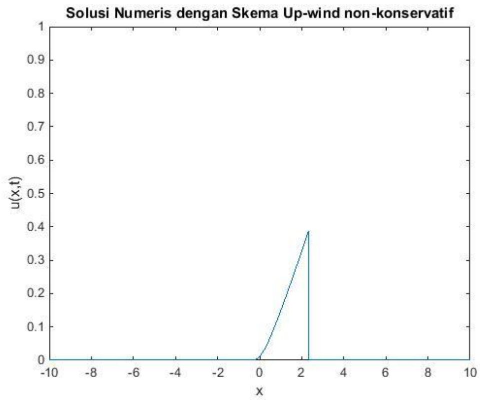
Dalam bagian ini, hasil penyelesaian akan didiskusikan. Lebih lanjut, galat dan waktu komputasi direkam untuk mengamati unjuk kerja masing-masing metode yang diuji.

A. *Diskusi Hasil Penyelesaian*

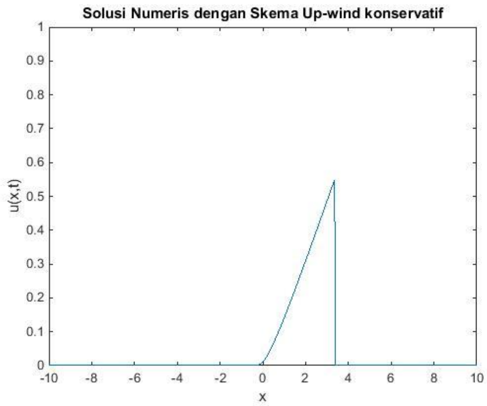
Hasil simulasi penyelesaian numeris persamaan Burgers menggunakan program MATLAB. Akan diperlihatkan hasil simulasi dengan nilai awal $u_0(x) = e^{-(2(x-1))^2}$, domain ruang $-10 \le x \le 10$, dengan menggunakan nilai $\Delta x = 0{,}01$ dan $\Delta t = 0{,}5 \times \Delta x$. Kondisi batas ini adalah $u(x,t) = u(-10,t);\ u(x,t) = u(10,t) = 0$. Kondisi awal persamaan Burgers sebelum menggunakan metode volume hingga ditunjukkan pada Gambar 1. Selanjutnya akan ditunjukkan gambar grafik dari hasil simulasi terakhir persamaan Burgers menggunakan metode volume hingga dalam Gambar 2-7.



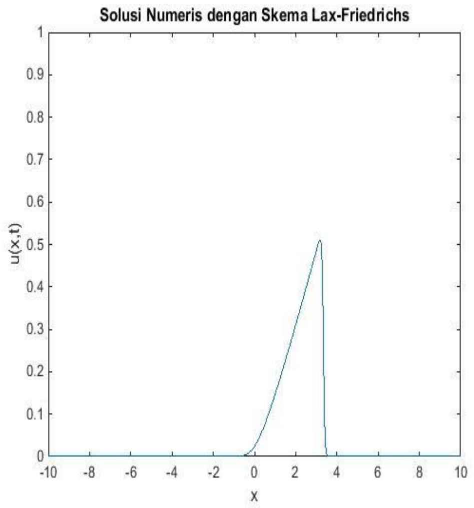
Gambar 1. Kondisi nilai awal persamaan Burgers



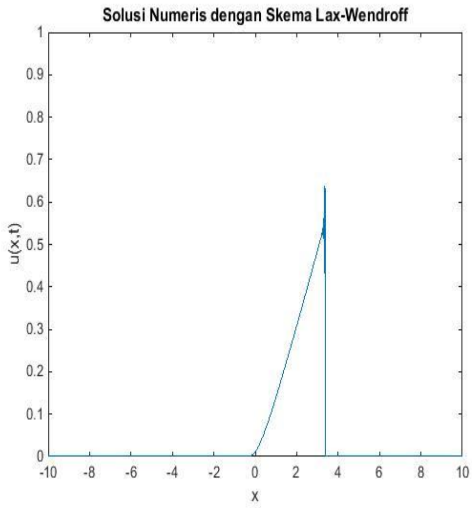
Gambar 2. Solusi numeris persamaan Burgers inviscid menggunakan skema upwind non-konservatif.



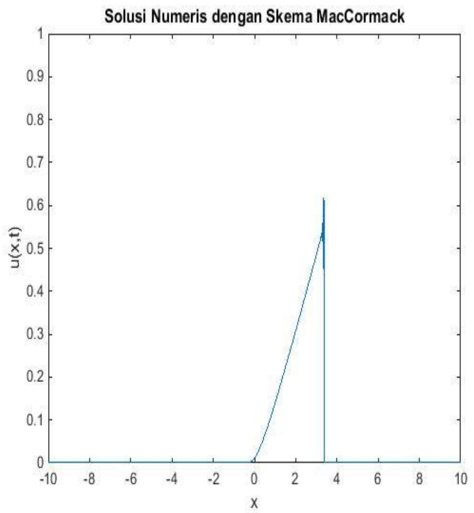
Gambar 3. Solusi numeris persamaan Burgers inviscid menggunakan skema upwind konservatif.



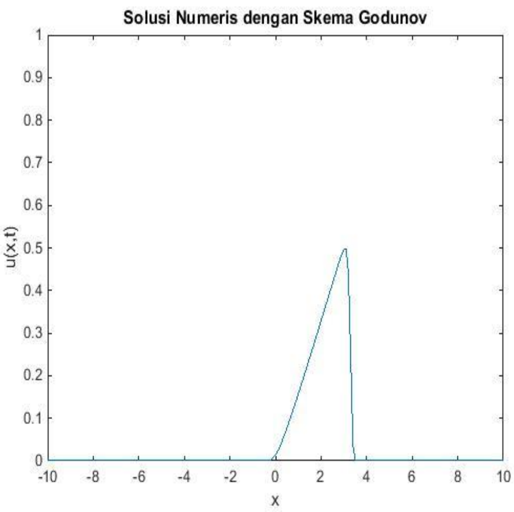
Gambar 4. Solusi numeris persamaan Burgers inviscid menggunakan skema Lax-Friedrichs



Gambar 5. Solusi numeris persamaan Burgers inviscid menggunakan skema Lax-Wendroff



Gambar 6. Solusi numeris persamaan Burgers inviscid menggunakan skema MacCormack



Gambar 7. Solusi numeris persamaan Burgers inviscid menggunakan skema Godunov

Diperhatikan Gambar 2-7. Terlihat bahwa semakin bertambahnya waktu, solusi akhir menggunakan metode volume hingga upwind non-konservatif, upwind konservatif, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, MacCormack, dan Godunov untuk persamaan Burgers, hasil simulasinya akan berjalan ke arah kanan atau condong ke depan. Dilihat Gambar 2 menjelaskan bahwa hasil simulasi diskontinu dan tidak berosilasi, sedangkan Gambar 3 terlihat hasil simulasinya bersifat diskontinu dan tidak ada osilasi. Pada Gambar 4 dan 7 terlihat bahwa hasil simulasinya tidak terdapat osilasi, tetapi bersifat kontinu. Hasil simulasi pada Gambar 5 dan 6 terdapat osilasi dan diskontinu.

B. Pengamatan Galat

Diambil persamaan Burgers dengan kondisi awal

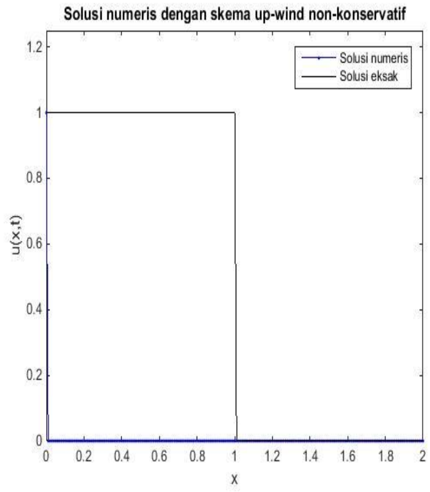
$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \le 0, \\ 0, & \text{jika } x > 0, \end{cases}$$

serta kondisi batas $u(x,t)=u(0,t)=1$ dan $u(x,t)=u(2,t)=0$. Solusi eksak masalah ini adalah

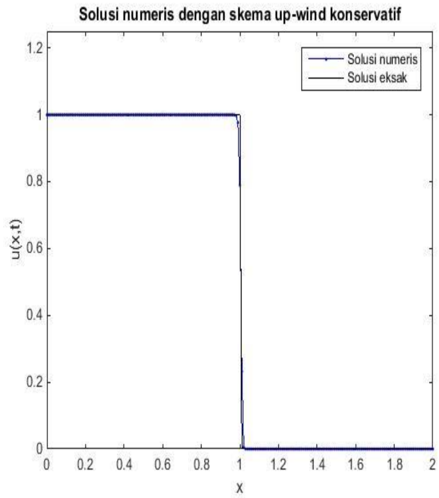
$$u(x,t)=\begin{cases}1, & \text{jika} \quad x\le \dfrac{t}{2}, \\ 0, & \text{jika} \quad x>\dfrac{t}{2}.\end{cases}$$

Di sini diambil domain ruang $0\le x\le 2$ dan domain waktu $0\le t\le 2$. Simulasi ini menggunakan nilai $\Delta x=0{,}01$ dan $\Delta t=0{,}5\times\Delta x$.

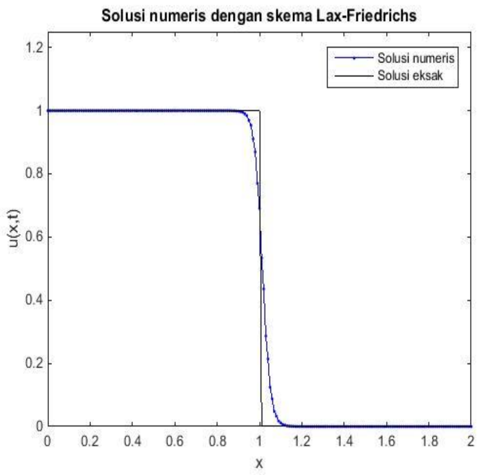
Dalam perhitungan galat penulis menggunakan galat rata-rata yang diperoleh dari rata-rata jumlahan semua nilai galat absolut di semua titik dari solusi numeris. Pengamatan galat dapat dilihat pada Gambar 8 sampai 13 dan Tabel 1.



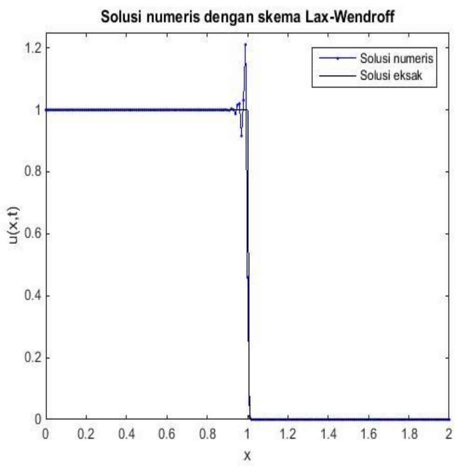
Gambar 8. Solusi skema upwind non-konservatif



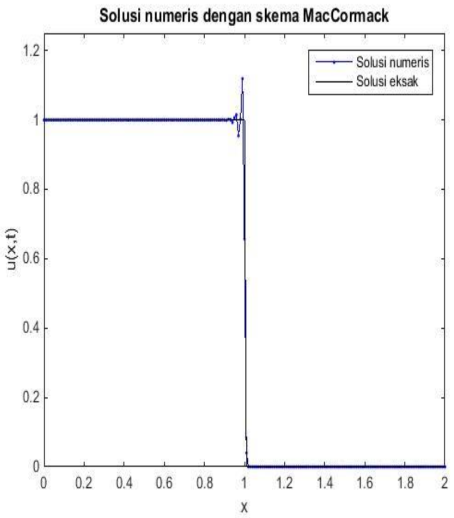
Gambar 9. Solusi skema upwind konservatif



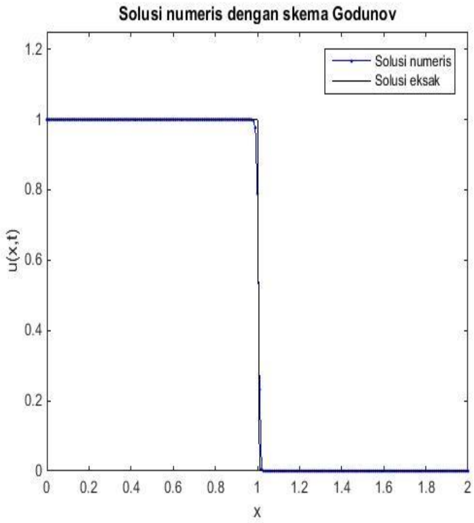
Gambar 10. Solusi skema Lax-Friedrichs



Gambar 11. Solusi skema Lax-Wendroff



Gambar 12. Solusi skema MacCormack



Gambar 13. Solusi skema Godunov

TABEL I
GALAT DAN WAKTU KOMPUTASI PERSAMAAN BURGERS MENGGUNAKAN BEBERAPA METODE VOLUME HINGGA

Metode Numeris Volume Hingga	Rata-rata Galat	Waktu (detik)
Skema upwind non-konservatif	0.4975	6.818089
Skema upwind konservatif	0.0024	6.696206
Skema Lax-Friedrichs	0.0133	6.854580
Skema Lax-Wendroff	0.0046	10.080987
Skema MacCormack	0.0029	8.638803
Skema Godunov	0.0024	9.752869

Berdasarkan Gambar 8 sampai 13 dan Tabel 1, metode upwind non-konservatif gagal menyelesaikan persamaan Burgers. Kelima metode lainnya bisa menyelesaikan persamaan Burgers. Metode Lax-Wendroff dan MacCormack menghasilkan osilasi semu di sekitar titik diskontinu. Dari enam metode yang diuji, diperoleh bahwa metode upwind konservatif mempunyai unjuk kerja yang paling baik.

IV. KESIMPULAN

Unjuk kerja enam metode volume hingga telah diamati. Dalam menyelesaikan persamaan Burgers inviscid, metode volume hingga upwind konservatif mempunyai unjuk kerja yang lebih baik daripada metode volume hingga upwind non-konservatif, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, MacCormack, dan Godunov. Metode volume hingga upwind konservatif menghasilkan galat yang kecil dengan waktu komputasi simulasi yang singkat.

UCAPAN TERIMA KASIH

Para penulis mengucapkan terima kasih kepada Universitas Sanata Dharma atas fasilitas untuk penelitian ini. Penulis kedua juga berterima kasih kepada Direktorat Riset dan Pengabdian kepada Masyarakat (DRPM), Kementerian Riset, Teknologi, dan Pendidikan Tinggi (Kemenristekdikti), Republik Indonesia atas dana hibah penelitian PDUPT nomor DIPA-042.06.1.401516/2019 tahun pelaksanaan 2019. Sebagian dari isi makalah ini merupakan hasil dalam Skripsi [11] yang disusun oleh penulis pertama di bawah bimbingan penulis kedua.

DAFTAR PUSTAKA

[1] M. Landajuela, *Burgers Equation,* Bilbao: Basque Center for Applied Mathematics, 2011.
[2] W. E Schiesser and G. W. Griffiths, *A Compendium of Partial Differential Equation Models,* New York: Cambridge University Press, 2009.
[3] D. A. Caughey and M. M. Hafez, *Frontiers of Computational Fluid Dynamics 2002,* Singapore: World Scientific, 2002.
[4] S. Bak, P. Kim, and D. Kim, “A semi-Lagrangian approach for numerical simulation of coupled Burgers' equations,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* vol. 69, pp. 31-44, 2019.
[5] A. G. Bratsos and A. Q. M. Khaliq, “An exponential time differencing method of lines for the Burgers and the modified Burgers equations,” *Numerical Methods for Partial Differential Equations,* vol. 34, no. 6, pp. 2024-2039, 2018.
[6] A. J. Howse, H. D. Sterck, R. D. Falgout, S. MacLachlan, and J. Schroder, “Parallel-in-time multigrid with adaptive spatial coarsening for the linear advection and inviscid Burgers equations,” *SIAM Journal on Scientific Computing,* vol. 41, no. 1, pp. A538-A565, 2019.
[7] F. Liu, Y. Wang, and S. Li, “Barycentric interpolation collocation method for solving the coupled viscous Burgers' equations,” *International Journal of Computer Mathematics,* vol. 95, no. 11, pp. 2162-2173, 2018.
[8] S. Nath and C. S. Rao, “Asymptotic periodic solutions of some generalized Burgers equations,” *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities,* vol. 33, no. 4, pp. 390-408, 2018.
[9] R. J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservations Laws,* Second Edition, Basel: Birkhauser, 1992.
[10] R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems,* Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
[11] B. L. Christabella, *Penyelesaian Numeris Persamaan Burgers Menggunakan Beberapa Metode Volume Hingga,* Skripsi, Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, 2018.

Birgitta Lucy Christabella, S.Si. adalah *data modeller* pada IT Enterprise Data Management (EDM) di PT Bank Sinarmas Tbk, Jakarta, Indonesia. Gelar Sarjana Sains (S.Si.) diperoleh dari Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta pada tahun 2018.

Sudi Mungkasi, S.Si., M.Math.Sc., Ph.D. adalah dosen pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta. Gelar Sarjana Sains (S.Si.) diperoleh dari Universitas Gadjah Mada tahun 2004. Gelar *Master of Mathematical Sciences* (M.Math.Sc.) dan *Doctor of Philosophy* (Ph.D.) diperoleh dari *Australian National University* tahun 2008 dan 2013 secara berturut-turut. Bidang penelitian yang sedang ditekuni saat ini adalah metode numeris untuk menyelesaikan model-model matematika. Penulis saat ini mempunyai jabatan fungsional Lektor Kepala *(Associate Professor)* dengan tugas tambahan sebagai Dekan Fakultas Sains dan Teknologi di Universitas Sanata Dharma.