

# Pembuatan Program Aplikasi Untuk Analisis Persamaan Nonlinier Sine Gordon pada *Long Josephson Junction* Bahan Superkonduktor dengan Menggunakan Metode *Finite Difference*

Wellya Sari, Hidayati, Hufri

Jurusan Fisika, Universitas Negeri Padang  
Jln. Prof. Dr. Hamka Kampus FMIPA UNP Air Tawar Barat Padang  
[wellya87@ymail.com](mailto:wellya87@ymail.com)

## ABSTRACT

*Josephson junction consists of two superconductor materials seperated by a thin isolator. Electricity current from junction can be explained by Sine-Gordon equation. From the equation, it will be obtained model of fluxon's wave that is one of soliton. This research's type is desriptive which use numerical approach by finite diffrence methode. It is designed a program that use Matlab R.2010 software to solve nonlinear equation and to get soliton's solution. From the solution, fluxon and anti fluxon wave property on Long Josephson Junction can be analised. The solution show soliton characteristics, that a fluxon can move for long distance without any shape changed. If there is a fluxon or antfluxon collision, they will preserve ordinary shape. When a fluxon reach end of junction, fluxon will be transformed to antfluxon, and vice versa. If current density  $j_c$  is small then voltage is small too.*

**Keywords:** Superconductors, Long Josephson Junction, fluxon

## PENDAHULUAN

Gejala nonlinier telah lama dikenal dalam fisika seperti dalam kasus hidrodinamika yang ditemukan pertama kali oleh John Scott Russell (1808-1882). Dia mengamati gerak gelombang soliter sepanjang kanal Edinburg-Glosgow. Ide soliton bermula ketika John Scott Russel fisikawan Skotlandia, mengamati fenomena gelombang air sepanjang kanal di Edinburg-Glasgow. John Scott Russell mengamati suatu gerak gelombang tunggal yang bergerak sepanjang kanal tanpa mengalami perubahan bentuk maupun pengurangan laju lambat gelombang. Berdasarkan hasil pengamatan tersebut Russel mampu menghasilkan gelombang serupa dalam satu eksperimen dan mendapatkan bahwa laju gelombang tersebut sebanding dengan amplitudonya. Russel memaparkan hasil pengamatannya yang diterbitkan dalam *Report of the British Association for the Advancement of Science*. Ia menyebut fenomena ini sebagai "Gelombang Translasi Besar".<sup>[1]</sup>

Gelombang nonlinier dapat merambat tanpa mengalami perubahan bentuk dan kecepatan yang disebut dengan soliton. Keunikan soliton ini adalah mampu mempertahankan bentuk dan strukturnya setelah bertumbukan dengan soliton lainnya dan soliton tunggal dapat menjarak pada jarak yang jauh tanpa ada perubahan profil<sup>[2]</sup>. Setelah interaksi, soliton muncul kembali, mempertahankan cirinya dengan kecepatan dan bentuk yang sama. Konsep soliton banyak digunakan seperti pada model partikel subatomik, transfer energi pada sistem syaraf manusia, fluxon pada *Josephson Junction*, solaron

pada fisika zat padat, bipolaron pada superkonduktor bersuhu tinggi.

Analisis terhadap persamaan Sine-Gordon pada *Long Josephson Junction* bahan superkonduktor dapat diselesaikan secara analitik namun membutuhkan waktu lama dan tidak dapat melihat bentuk tumbukan antara soliton dengan soliton lainnya. Namun pada analisis numerik dapat melihat tumbukan antara soliton dengna soliton lainnya. Model matematis persamaan gelombang nonlinier Sine-Gordon menggambarkan terbentuknya fluxon dalam bahan superkonduktor

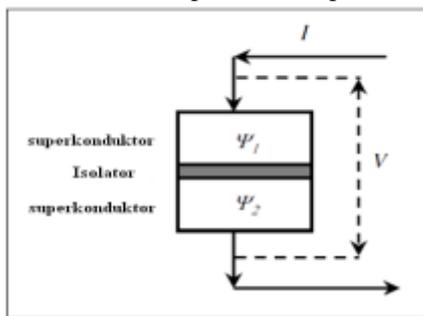
Permodelan fluxon pada *Long Josephson Junction* dilakukan melalui perhitungan parameter-parameter dalam bahan superkonduktor dengan pendekatan numerik. Persamaan Sine Gordon pada dasarnya adalah persamaan differensial parsial orde 2. Metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial pada persamaan Sine-Gordon tersebut, salah satunya adalah metode beda hingga (*Finite Difference Methods*). Metode *Finite Difference* merupakan suatu metode yang digunakan untuk mendekati harga turunan fungsi pada setiap titik domain solusi dari persamaan differensial<sup>[3]</sup>. Penelitian ini menerapkan metode *finite difference* untuk menyelesaikan persamaan Sine-Gordon pada *Long Josephson Junction* yang menghasilkan solusi berupa fluxon-fluxon.

*Long Josephson Junction* adalah dua bahan superkonduktor yang dipisahkan oleh bahan isolator tipis. Pada sambungan ini akan terdapat arus DC yang mengalir walaupun tanpa diberi arus luar. Jika diberi arus luar

walaupun sangat kecil maka akan timbul arus bolak balik AC dengan frekuensi yang sangat tinggi.

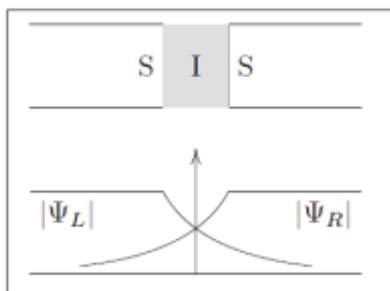
Mekanika kuantum memprediksikan bahwa elektron-elektron pada logam sebenarnya memiliki kemungkinan kecil untuk ditemukan di luar material atau logam. Hal ini membuka kemungkinan penerobosan (*tunneling*) elektron. Jika dua logam didekatkan tetapi masih memiliki ruang diantaranya terdapat kemungkinan sebuah elektron dari sebuah logam satu ditemukan pada logam lainnya. Jika diantara dua logam diberikan beda potensial, maka arus dapat mengalir dari satu logam ke logam lain meskipun terdapat isolator diantaranya. Efek ini disebut juga efek *Josephson*.

Efek *Josephson* terjadi jika dua superkonduktor didekatkan satu sama lain, seperti terlihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Skema *Josephson Junction*<sup>[6]</sup>

Pada dua superkonduktor, seluruh elektron terkondensasi ke keadaan superkonduktor dengan membentuk pasangan-pasangan cooper. Karena seluruh pasangan-pasangan elektron berada pada keadaan kuantum yang sama, dapat dijelaskan sebagai fungsi gelombang tunggal. Fungsi gelombang elektron pada superkonduktor bagian kiri dilambangkan dengan  $\psi_L$  dan fungsi gelombang sebelah kanan dilambangkan dengan  $\psi_R$ .



Gambar 2. Dua Superkonduktor yang dipisah Isolasi Tipis<sup>[7]</sup>

Persamaan Schrodinger untuk sistem ini adalah sebagai berikut:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_L = E_L \psi_L - K \psi_R \quad (1)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_R = E_R \psi_R - K \psi_L \quad (2)$$

Sebuah gelombang dalam fungsi kompleks, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\psi_L = \sqrt{\rho_L} e^{i\theta_L} \quad (3)$$

$$\psi_R = \sqrt{\rho_R} e^{i\theta_R} \quad (4)$$

Amplitudo fungsi gelombang adalah akar dari kerapatan pasangan dengan beda fase antara kedua fungsi gelombang:

$$\varphi = (\theta_L - \theta_R) \quad (5)$$

Pada *Josephson Junction* arus dapat mengalir walaupun tanpa diberi beda potensial. Ini disebut dengan efek *Josephson DC*.

$$I = I_c \sin \varphi = I_c \sin (\theta_L - \theta_R) \quad (6)$$

Pada persamaan (6) tersebut variabel  $\varphi$  menunjukkan beda fase antara kedua elektroda superkonduktor.  $I_c$  menunjukkan aliran *supercurrent* maksimum yang melewati sambungan yang merupakan arus kritis. Jika arus dialirkan melewati lapisan sambungan tersebut maka akan dihasilkan tegangan jatuh listrik. Jika beda fase antara superkonduktor sama dengan 0 (nol) maka tidak akan terjadi aliran arus pada sambungan.

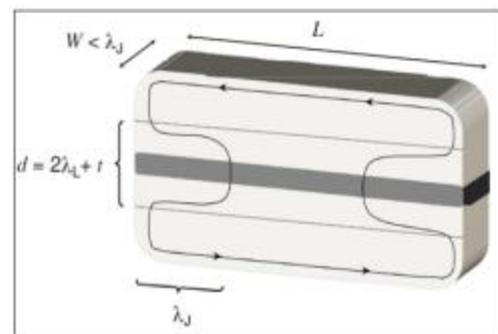
Pada kondisi lain, jika beda fase sebesar  $+\pi/2$  maka arus kritis akan tercapai. Efek *Josephson DC* menunjukkan arus DC mengalir melalui isolator tanpa beda potensial luar. Hal ini sangat berbeda dengan penerobosan (*Tunneling*) arus biasa dimana beda potensial diperlukan untuk mendapatkan arus dari satu logam ke logam lain. Selain itu, bahkan jika arus yang sangat kecil diberikan pada sambungan akan menghilangkan arus DC ini. Perbedaan fase ( $\varphi$ ) akan meningkat terhadap waktu dan karenanya akan menjadi arus AC yang berosilasi dengan cepat dengan voltase diantara dua elektroda sebagai berikut:

$$\Phi = \frac{\varphi}{2\pi} \Phi_0 \quad (7)$$

$$V = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (8)$$

Dengan  $\Phi_0 = h/2e$  yang merupakan besar fluks magnetik kuantum ( $\Phi_0 = 2.07 \times 10^{-15}$  Wb). Karena perbedaan fase penting, maka tidak akan mungkin untuk menjelaskan fenomena ini dengan teori fisika klasik.

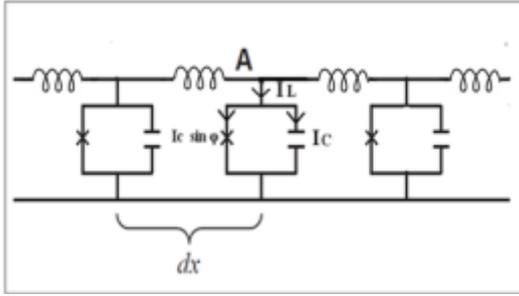
Untuk memahami persamaan *Long Josephson Junction* banyak model yang digunakan. Salah satunya dengan menganalisa *Long Josephson Junction* seperti pada Gambar 3.



Gambar 3. Bentuk Linear *Long Josephson Junction*<sup>[6]</sup>

*Long Josephson Junction* pada Gambar 3 didefinisikan sebagai sambungan kecil dengan panjang  $L$ .  $\lambda_j$  menyatakan seberapa jauh medan magnet dapat masuk ke dalam *Long Josephson Junction*.

Model yang paling umum digunakan adalah RCSJ (*Resistively and Capacitively Shunted Junction*). Sedangkan untuk model yang lebih sederhana adalah CSJ model (*Capacitively Shunted Junction*) dengan menganggap tidak ada sama sekali hambatan pada permukaan superkonduktor dan isolator. Pada penelitian ini hanya difokuskan pada CSJ Model. Sambungan dimodelkan sebagai bagian kecil kapasitor keping sejajar sepanjang  $dx$  yang terhubung secara paralel melalui induktor satu sama lain. Elektroda pada superkonduktor dimodelkan sebagai hubungan paralel sebuah induktor dan kapasitansi kapasitor. Pada setiap titik di sambungan, terdapat arus yang mengalir sepanjang sambungan, seperti ditunjukkan pada Gambar 4.



Gambar 4. Model CSJ dimodifikasi pada *Long Josephson Junction*

Berdasarkan hukum Kirchoff untuk arus yang melewati titik A berlaku:

$$I_L = I_c + I_c \sin \varphi \quad (9)$$

Selanjutnya dihitung arus untuk setiap bagian  $dx$ ,

$$\frac{I_L}{dx} = \frac{I_c}{dx} + \frac{I_c \sin \varphi}{dx} \quad (10)$$

untuk perubahan arus pada induktor memiliki persamaan:

$$\frac{dI_L}{dx} = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 d} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (11)$$

untuk perubahan arus pada kapasitor memiliki persamaan:

$$\frac{dI_c}{dx} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \Phi_0}{t_{ox} 2\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (12)$$

substitusikan persamaan (11) dan (12) ke persamaan (10) sehingga diperoleh

$$\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 d} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \Phi_0}{t_{ox} 2\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + j_c \sin \varphi \quad (13)$$

Selanjutnya dengan membagi persamaan (13) dengan  $j_c$  maka kita akan memperoleh persamaan:

$$\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 d j_c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \Phi_0}{t_{ox} 2\pi j_c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \sin \varphi \quad (14)$$

Dari persamaan (14) diperoleh beberapa besaran yaitu kedalaman medan magnet mempengaruhi *Josephson Junction*

( $\lambda_j$ ), Frekuensi plasma *Josephson* ( $\omega_p$ ) dan cepat rambat gelombang elektromagnetik ( $c_j$ ),

$$\lambda_j = \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 d j_c}} \quad (15)$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{2\pi j_c t_{ox}}{\Phi_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} \quad (16)$$

$$c_j = \omega_p \cdot \lambda_j \quad (17)$$

Selanjutnya substitusi persamaan (15), (16) dan (17) ke persamaan (14) diperoleh:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_j^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \omega_p^2 \sin \varphi = 0 \quad (18)$$

Persamaan (18) merupakan persamaan Sine Gordon pada *Long Josephson Junction*. Persamaan ini dapat diselesaikan secara analitik yang memberikan hasil yaitu:

$$\varphi(x, t) = 4 \arctan \left( \exp \left( \pm \frac{(x - vt)}{\lambda_j \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_j}\right)^2}} \right) \right) \quad (19)$$

Persamaan (19) dapat diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode beda hingga (*Finite Difference Method*) dengan batas tanpa fluks dapat dinyatakan sebagai berikut. Pada interval  $x \in [0, L]$  dengan kondisi awal:

$$\varphi(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}(x, 0) = g(x) \quad (20)$$

dan dengan syarat batas tanpa fluks

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0, L} = 0 \quad (21)$$

Dalam metode *finite difference* persamaan (19) dapat dinyatakan dalam rumus sebagai berikut:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{\varphi(x_{i+1}, t_j) - 2\varphi(x_i, t_j) + \varphi(x_{i-1}, t_j)}{\Delta x^2} \quad (22)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2\varphi(x_i, t_j) + \varphi(x_i, t_{j-1}))}{\Delta t^2} \quad (23)$$

Persamaan (22) dan (23) disubstitusikan ke persamaan (18) maka akan diperoleh

$$-\varphi_i^{j-1} + 2 \left[ 1 - \left( c_j \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] \varphi_i^j + \left( c_j \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\varphi_{i+1}^j + \varphi_{i-1}^j) - \omega_p^2 \Delta t^2 \sin(\varphi_i^j) = \varphi_i^{j+1} \quad (24)$$

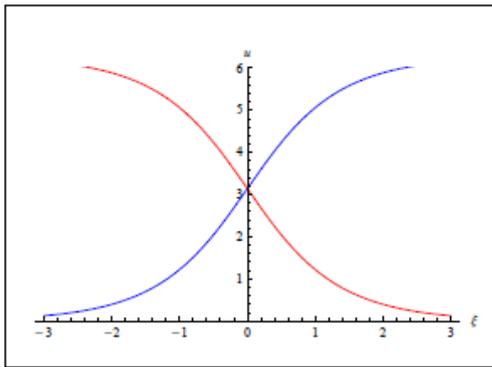
Dengan memisalkan  $\alpha = c_j \frac{\Delta t}{\Delta x}$  maka persamaan (24) akan menjadi

$$\varphi_i^{j+1} = -\varphi_i^{j-1} + 2[1 - \alpha^2] \varphi_i^j + \alpha^2 (\varphi_{i+1}^j + \varphi_{i-1}^j) - \omega_p^2 \Delta t^2 \sin(\varphi_i^j) \quad (25)$$

dengan  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, M$  dan  $j = 0, 1, 2, 3, \dots, T$ .

Persamaan (25) merupakan bentuk persamaan (18) dalam bentuk numerik yang akan diselesaikan dengan metode metode hingga. Penelitian yang telah dilakukan bertujuan untuk menganalisa gelombang nonlinier Sine-Gordon pada *Long Josephson Junction* ideal, memperlihatkan permodelan gelombang nonlinier pada *Long Josephson Junction*, serta menganalisa bentuk variasi permodelan gelombang nonlinier Sine Gordon dalam bentuk satu soliton dan dua soliton.

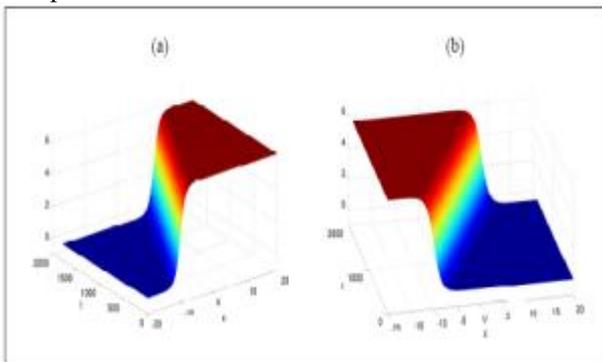
Berdasarkan Gambar 5 dan Gambar 6 dengan mengatur nilai Kerapatan Arus ( $j_c$ ), Kedalaman Penetrasi Medan Magnet  $\lambda_J$ , dan Frekuensi plasma *Josephson* ( $\omega_p$ ). Sehingga didapatkan solusi berupa soliton (kink) dan anti soliton (anti kink)<sup>[4]</sup>



Gambar 5. Soliton (Kink) Anti Soliton (Anti Kink)<sup>[5]</sup>

Gambar 5 merupakan bentuk penjarangan gelombang soliton pada posisi lintang dan bujur. Penjarangan gelombang soliton dan anti soliton sebagai gelombang nonlinier mendapatkan solusi berupa persamaan Sine-Gordon.

Profil gelombang soliton juga dapat dilihat dalam bentuk 3 dimensi. Simulasi dari kontur ini menunjukkan solusi soliton terhadap jarak dan waktu. Pada analisis numerik dapat di lihat pada Gambar 6



Gambar 6.(a) Soliton dan (b) Anti Soliton<sup>[5]</sup>

Gambar 6 menunjukkan bentuk kontur yang disertai dengan arah gelombang soliton. Secara umum, bentuk kontur merupakan profil sirkular. Tahapan yang dilakukan pada penelitian ini adalah membuat perhitungan numerik berdasarkan persamaan Sine-Gordon. Perhitungan numerik tersebut menghasilkan matriks yang membentuk *plotting* model 3 dimensi menggunakan Matlab.R.2010

## METODE PENELITIAN

Jenis penelitian yang dilakukan untuk menyelesaikan penelitian ini adalah penelitian deskriptif. Penelitian ini dilaksanakan di Laboratorium Fisika Komputasi Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Padang.

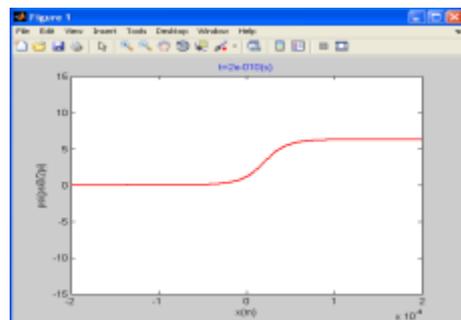
Pelaksanaan penelitian dalam perencanaannya, dibagi menjadi beberapa tahap yaitu: Tahap Persiapan, hal-hal yang dilakukan antara lain menelusuri kepustakaan, kajian teori, dan analisis kebutuhan, serta perancangan *flowchart* untuk program yang akan dibuat. Tahap pelaksanaan dengan mudah dilakukan yaitu membuat program berdasarkan *flowchart* yang telah dibuat dan menguji kelayakan program. Untuk menguji kebenaran hasil program, dilakukan analisis data dengan cara membandingkan hasil yang didapat dari program aplikasi dengan referensi yang ada seperti terlihat pada Gambar 5 dan Gambar 6.

## HASIL

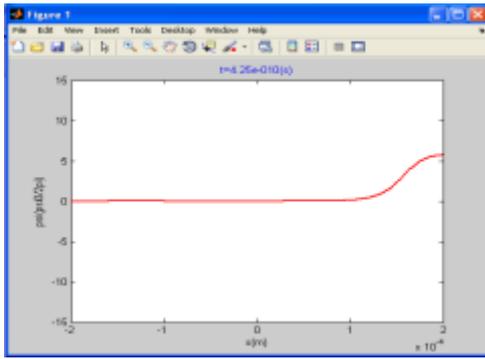
Dengan membandingkan persentase kesalahan pengukuran antara solusi analitik dan solusi numerik pada persamaan (19) dan persamaan (25) diperoleh persentase kesalahan antara 0% sampai 2.88%. Sehingga bentuk grafik untuk solusi analitik dan numerik menghasilkan bentuk grafik yang sama.

Sehingga metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier pada *Long Josephson Junction*, hanya saja pada solusi analitik tidak dapat melihat sifat dan interaksi tumbukan antara fluxon, sedangkan untuk melihat interaksi fluxon pada *Long Josephson Junction* dilakukan dengan pendekatan menggunakan solusi numerik

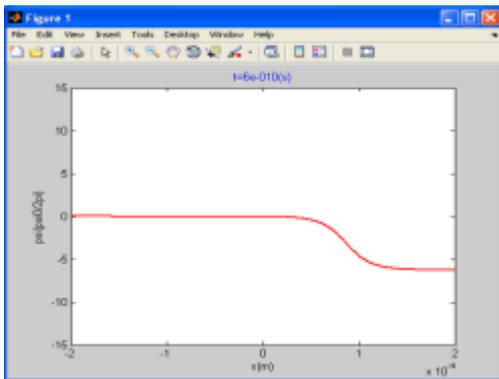
Berdasarkan persamaan (19) diperoleh solusi positif dan negatif untuk persamaan nonlinier Sine-Gordon pada *Long Josephson Junction* yang menyatakan fluxon dan anti fluxon. Solusi ini mempunyai sifat yang luar biasa, yaitu jika dua fluxon bertumbukan, fluxon akan tetap mempertahankan bentuknya semula. Persamaan ini menggambarkan fluxon dan interaksinya pada *Long Josephson Junction*. Solusi persamaan nonlinier Sine-Gordon pada *Long Josephson Junction* pada saat variasi variabel kerapatan arus ( $j_c = 524 \times 10^4 \text{ A/m}^2$ ), kedalaman penetrasi medan magnet ( $d=1760 \text{ \AA}$ ), dan perbandingan antara cepat rambat gelombang elektromagnetik (*swihart velocity*) dan kecepatan ruang hampa ( $\bar{c}/c = 0.010$ ) untuk fluxon dan dengan t yang berbeda:



(a)

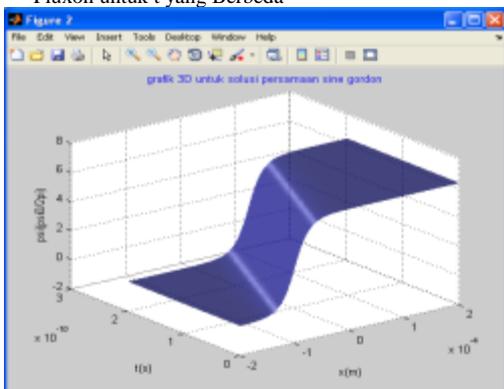


(b)



(c)

Gambar 7. Grafik Animasi Solusi Numerik Persamaan Sine Gordon pada Fluxon untuk t yang Berbeda

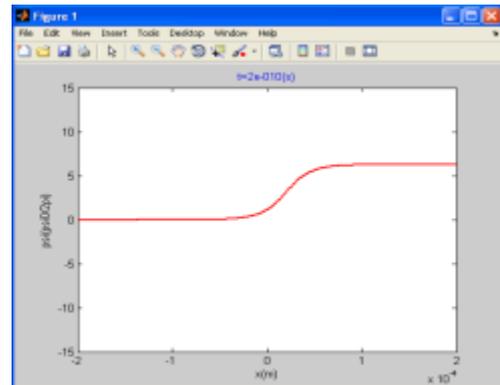


Gambar 8. Grafik 3D Solusi Numerik Persamaan Sine Gordon pada Fluxon

Berdasarkan Gambar 7, pada Gambar (a) dengan ( $t = 2 \times 10^{-10}$  dan  $x = 0.2 \times 10^{-4}$ ), Gambar (b) pada saat ( $t = 4.25 \times 10^{-10}$ ,  $x = 1.5 \times 10^{-4}$ ) dan Gambar (c) ( $t = 6 \times 10^{-10}$ ,  $x = 6 \times 10^{-4}$ ) memperlihatkan bentuk animasi pada penjalaran fluxon dari solusi persamaan nonlinier Sine Gordon, fluxon tunggal akan menjalar dengan jarak yang cukup jauh tanpa mengalami perubahan bentuk. Apabila fluxon bertumbukan dengan ujung sambungan maka fluxon akan dipantulkan kembali sehingga menjadi anti fluxon seperti Gambar (c). Gambar 8 merupakan bentuk tiga dimensi solusi solusi numerik dari *Long Josephson Junction* dengan arah pergerakan putaran fluxon ke kanan.

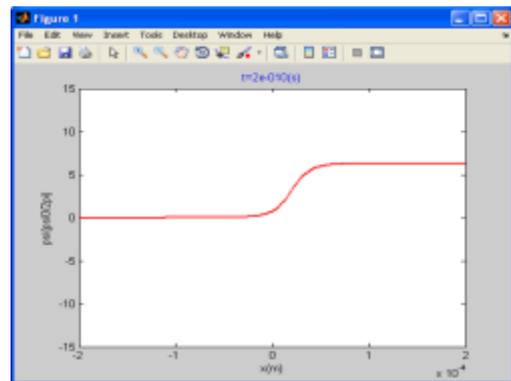
a. Solusi Fluxon dengan Kerapatan Arus yang Berbeda  
 Kerapatan arus ( $j_{c1} = 524 \times 10^4 \text{ A/m}^2$ ), ( $j_{c2} = 1000 \times 10^4 \text{ A/m}^2$ ,  $j_{c3} = 1574 \times 10^4 \text{ A/m}^2$  yang berbeda, kedalaman penetrasi medan magnet ( $d = 1760 \text{ \AA}$ ), dan perbandingan antara cepat rambat gelombang elektromagnetik (*swihart velocity*) dan di ruang hampa  $\bar{c}/c = 0.010$

1) Fluxon ( $j_c = 524 \times 10^4 \text{ A/m}^2$ )



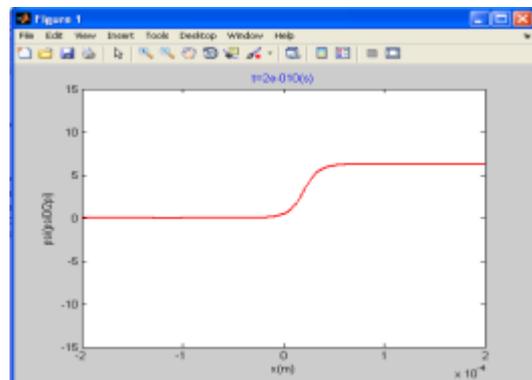
(a)

2) Fluxon pada saat  $j_{c2} = 1000 \times 10^4 \text{ A/m}^2$



(b)

3) Fluxon pada saat  $j_{c3} = 1570 \times 10^4 \text{ A/m}^2$



(c)

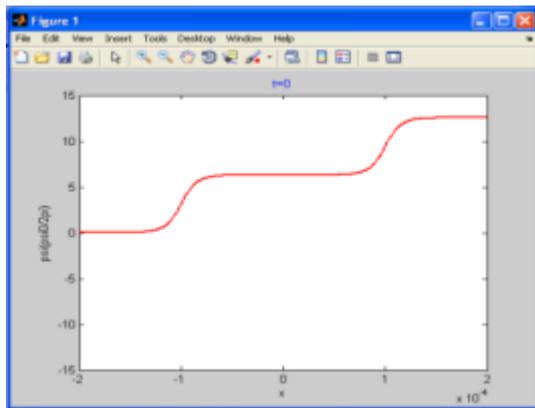
Gambar 9. Grafik Animasi dan 3D Solusi Numerik Persamaan Sine Gordon pada Fluxon dengan Variasi  $j_c$ .

Berdasarkan Gambar 9 seperti terlihat pada Gambar (a), Gambar (b) dan Gambar (c) untuk solusi fluxon dapat dilihat bahwa arah pergerakan fluxon bergerak ke arah kanan dengan perbedaan tingkat kemiringan dari grafik, kemiringan grafik menyatakan voltase pada *Long Josephson Junction*. Jika rapat arus pada *Long Josephson Junction* kecil maka tingkat kemiringan dari grafik sangat besar sehingga voltase yang dihasilkan kecil dan arus yang mengalir juga kecil, begitu juga sebaliknya jika rapat arus pada *Long Josephson Junction* diberikan besar maka grafik akan terlihat lebih tegak sehingga voltase yang dihasilkan juga besar dan arus yang mengalir juga besar.

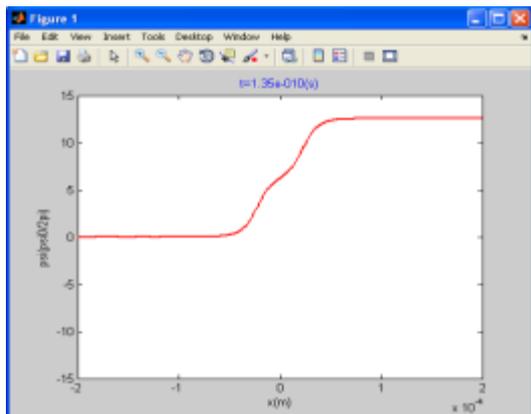
b. Variasi Tumbukan untuk Interaksi Fluxon

Interaksi tumbukan antara fluxon, dengan kerapatan arus ( $j_c = 1570 \times 10^4 \text{ A/m}^2$ ), kedalaman penetrasi medan magnet ( $d=1760 \text{ \AA}$ ), dan rasio antara cepat rambat gelombang elektromagnetik (*swihart velocity*) dan kecepatan ruang hampa  $\bar{c}/c = 0.010$

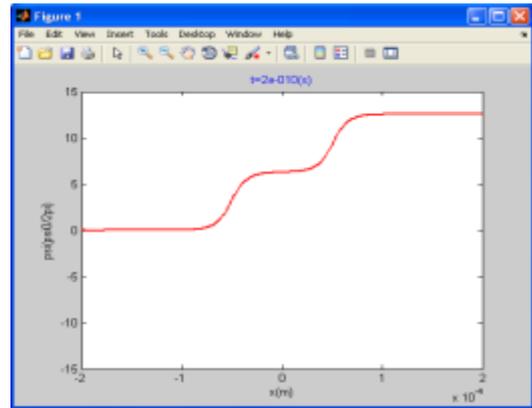
1) Interaksi antara Fluxon dengan Fluxon



(a)



(b)



(c)

Gambar 10. Grafik Animasi Solusi Numerik Persamaan Sine Gordon pada Interaksi Fluxon-Fluxon

Gambar 10 terlihat interaksi antara fluxon dengan fluxon. Gambar (a) memperlihatkan sebelum terjadinya tumbukan, Gambar (b) saat terjadi tumbukan dan Gambar (c) memperlihatkan interaksi antara fluxon dengan fluxon setelah terjadi tumbukan, Interaksi fluxon dengan fluxon akan terjadi reaksi tolak menolak dari kedua fluxon tanpa mengalami perubahan bentuk. Sehingga reaksinya berubah menjadi tumbukan antara anti fluxon dengan anti fluxon. Hal ini sesuai dengan ciri soliton, dimana soliton mampu mempertahankan bentuk dan strukturnya setelah bertumbukan dengan soliton lainnya.

**PEMBAHASAN**

Jenis-jenis dari solusi persamaan Sine-Gordon pada *Long Josephson Junction* yaitu fluxon dan anti fluxon. Jika dipilih hasil positif dari  $\sqrt{1 - v^2}$  maka solusinya adalah fluxon, jika hasil negatif yang dipilih maka solusi yang didapatkan adalah anti fluxon. Solusi ini mempunyai sifat yang luar biasa, yaitu jika dua fluxon bertumbukan, fluxon akan tetap mempertahankan bentuknya semula. Dengan kata lain jika satu fluxon membawa informasi, maka setelah tumbukan dengan fluxon yang lain maka tidak akan ada kehilangan energi. Hasil permodelan gelombang soliton merupakan hasil penyelesaian persamaan differensial nonlinier. Persamaan ini menggambarkan fluxon dalam *Long Josephson Junction*.

Berdasarkan hasil penelitian, pada *Long Josephson Junction* dapat diamati adalah keberadaan fluxon. Fluxon adalah arus yang berputar melewati isolator.

Fluxon dapat bergerak jika diberikan arus bias pada superkonduktor atas dari sebuah sumber arus. Arus akan mengalir sepanjang permukaan atas superkonduktor dan kemudian mengalir secara vertikal ke bawah pada sambungan. Hali ini akan mempengaruhi fluxon.

Sebuah fluxon dapat diamati dalam pengukuran karena fluxon dapat menaikkan voltase lokal ketika melewati sambungan. Karena fluxon-fluxon bergerak dengan kecepatan tinggi maka fluxon dapat mencapai ujung sambungan dengan cepat. Pada tumbukan dengan ujung sambungan beberapa hal dapat terjadi, tergantung dari kondisi batas. Fluxon dapat

dipantulkan menjadi anti fluxon yang juga merupakan arus yang berputar namun dengan arah yang berkebalikan. Oleh karena itu, anti fluxon akan bergerak dengan arah yang berlawanan sehingga anti fluxon menjauhi ujung sambungan, ketika anti fluxon mencapai ujung yang lain. Anti fluxon berkemungkinan dipantulkan menjadi sebuah fluxon kembali.

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari hasil program yang dirancang dengan menggunakan variasi variabel Kerapatan Arus ( $j_{c1} = 524 \times 10^4 \text{ A/m}^2$ ,  $j_{c2} = 1000 \times 10^4 \text{ A/m}^2$ ,  $j_{c3} = 1570 \times 10^4 \text{ A/m}^2$ ), Kedalaman Penetrasi Medan Magnet ( $d=1760 \text{ \AA}$ ), dan perbandingan antara cepat rambat gelombang elektromagnetik (*swihart velocity*) dengan Kecepatan ruang hampa ( $\bar{c}/c = 0.010$ ). Bentuk model gelombang pada Gambar 1 dan Gambar 2 untuk persamaan sine-Gordon murni dengan model gelombang fluxon pada *Long Josephson Junction* ideal menghasilkan bentuk solusi yang sama, dimana solusi yang didapatkan berupa fluxon dan anti fluxon. Pada model *Long Josephson Junction* ideal, jika diberikan nilai rapat arus  $j_c \ll$  maka akan diperoleh voltase ( $\frac{d\phi}{dt}$ ) yang kecil dimana arus yang mengalir juga sangat kecil, begitu juga sebaliknya jika diberikan nilai rapat arus  $j_c \gg$  maka akan diperoleh voltase ( $\frac{d\phi}{dt}$ ) yang besar dan arus yang sangat besar pula.

Pada analisa satu maupun tiga dimensi terlihat bahwa pemenuhan syarat-syarat untuk pembentukan soliton untuk persoalan persamaan Sine-Gordon pada *Long Josephson Junction* membawa kepada persoalan nonlinieritas yang cukup kompleks. Dimana dari hasil pembahasan di atas dapat kita ketahui bahwa fluxon tunggal dapat melaju pada jarak yang cukup jauh tanpa mengalami perubahan bentuk, fluxon dapat mempertahankan bentuk dan strukturnya ketika bertumbukan dengan fluxon yang lainnya.

## KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisa numerik dan pembahasan yang telah dilakukan menghasilkan kesimpulan sebagai berikut :

1. Solusi numerik dapat memperlihatkan bentuk interaksi antara fluxon dengan fluxon, yaitu fluxon tunggal mampu menjalar pada jarak yang cukup jauh tanpa mengalami perubahan bentuk. Jika dua fluxon bertumbukan, fluxon akan tetap mempertahankan bentuknya semula.
2. Hasil permodelan dari solusi persamaan Sine-Gordon pada *Long Josephson Junction* yaitu fluxon dan anti fluxon. Jika dipilih hasil positif maka solusinya adalah

fluxon, jika hasil negatif yang dipilih maka solusi yang didapatkan adalah anti fluxon.

3. Pada model *Long Josephson Junction*, jika diberikan nilai rapat arus  $j_c \ll$  maka akan diperoleh voltase ( $\frac{d\phi}{dt}$ ) yang kecil arus yang dihasilkan juga kecil, begitu juga sebaliknya jika diberikan nilai rapat arus  $j_c \gg$  maka akan diperoleh voltase ( $\frac{d\phi}{dt}$ ) yang besar maka arus yang dihasilkan juga sangat besar.
4. Perbandingan antara solusi numerik dan solusi analitik dengan memberikan nilai yang sama pada setiap variabel, diperoleh persentase kesalahan antara 0% sampai dengan 2.88%

## DAFTAR RUJUKAN

- [1] Drazin, P.G. 1992. "Soliton an introduction". New York: Cambridge University Press
- [2] Maudin. Lufsy. "Dinamika Soliton dalam Bahan Feromagnetik". Jurnal Fisika Indonesia, Nomor 18, vol.VI, Edsi Agustus 2002 ISSN : 1410-2994, hal 11-26
- [3] Supriyanto Suparno. 2008. *Komputasi untuk Sains dan Teknik*. Jakarta : Departemen Fisika-FMIPA UI
- [4] Barone, Antonio.1939. "Physics and Applications of the Josephson Effect". New York: Universita di Napoli
- [5] <http://pauli.uni-muenster.de/tp/fileadmin/lehre/NumMethoden/WS0910/ScriptPDE/SineGordon.pdf>
- [6] Pfeiffer, Judith. 2010. "Fractional Vortices in Josephson Tunnel Junctions with a Ferromagnetic Interlayer". Dissertation. Zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften der Fakultät für Mathematik und Physik der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen
- [7] Visser, Timco. 2002. "Modeling and Analysis of Long Josephson Junctions". Tesis. University of Twente.
- [8] Krane, Kenneth S. "Fisika Modern". Jakarta: Universitas Indonesia (UI-Press)
- [9] Marlianto, Eddy. 2008. "Studi Ultrasonik pada Bahan Superkonduktor Suhu  $\sim 30\text{K}$ ". Medan : Universitas Sumatra Utara.
- [10] M. Bunjamin. "Gejala Gelombang Taklinear: Soliton": FMIPA Universitas Indonesia dan Universitas Nasional
- [11] Yulianti, Tatik. 2010. "Sintesis Superkonduktor BPSCCO/Ag Menggunakan Metode Padatan". Surakarta: Fisika FMIPA Universitas Sebelas Maret.